# Zbiór zadań z geometrii

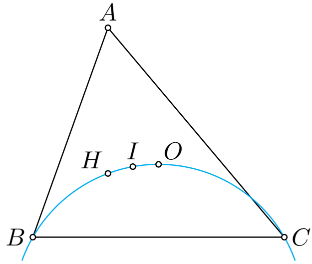
**Dominik Burek**
**Michał Woźny**

Kraków 2019

**ISBN XXX-X-XXXX-XXXX-X**

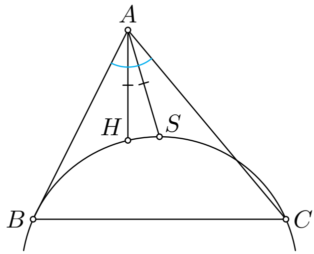
# Kąty 45°, 60°, 90°

**1.** W trójkącie $ABC$ (rys. 1) kąt przy wierzchołki $A$ ma miarę $60^\circ$. Pokazać, że punkty $B$, $C$, ortocentrum oraz środki okręgów wpisanego i opisanego w trójkącie $ABC$ leżą na jednym okręgu.



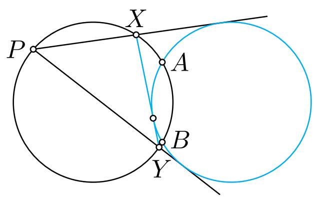
rys. 1

**2.** Punkt $H$ jest ortocentrum nierównoramiennego trójkąta $ABC$ (rys. 2). Punkt $S$ jest środkiem tego łuku $BC$ okręgu opisanego na trójkącie $BCH$, który zawiera punkt $H$. Znaleźć miarę kąta $BAC$ jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.



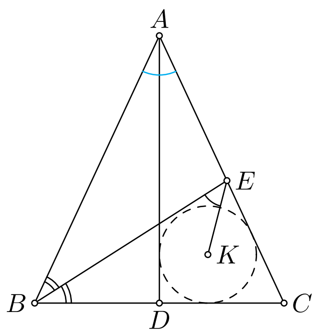
rys. 2

**3.** Okręgi $\omega_1$ i $\omega_2$ (rys. 3) o promieniu $r$ przecinają się w punktach $A$ i $B$, przy czym $|AB| = r$. Z punktu $P$ leżącego na $\omega_1$ prowadzimy styczne do $\omega_2$, które przecinają $\omega_1$ w punktach $X$ i $Y$. Pokazać, że prosta $XY$ jest styczna do $\omega_2$.



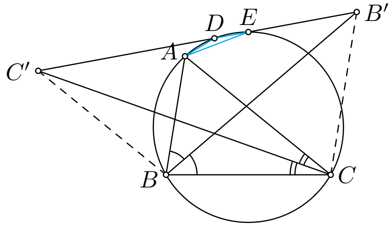
rys. 3

**4.** W trójkącie $ABC$ (rys. 4) zachodzi równość $AB = AC$. Dwusieczne kątów $CAB$ oraz $ABC$ przecinają jego boki $BC$ oraz $AC$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Punkt $K$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ADC$. Załóżmy ponadto, że $\measuredangle BEK = 45^\circ$. Wyznaczyć możliwe wartości $\measuredangle CAB$.



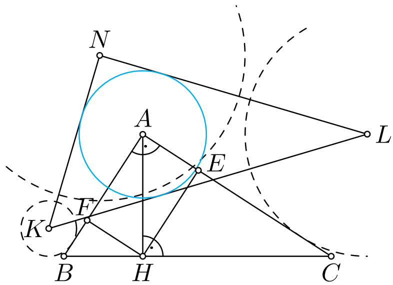
rys. 4

**5.** W trójkącie różnobocznym $ABC$ (rys. 5) kąt przy wierzchołku $A$ ma miarę $60^\circ$. Na dwusiecznych kątów $ABC$ i $BCA$ wybrano punkty $B'$ i $C'$, że $BC' \parallel CA$ oraz $CB' \parallel AB$. Prosta $B'C'$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punktach $D$ i $E$, odpowiednio. Pokazać, że trójkąt $ADE$ jest równoramienny.




rys. 5

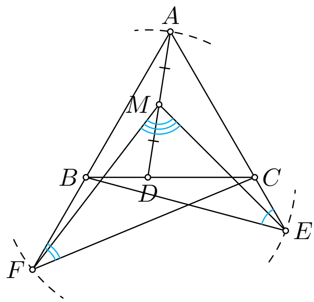
**6.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 6), w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkt $H$ jest spodkiem wysokości opuszczonej z punktu $A$, natomiast $E$ i $F$ są rzutami prostokątnymi punktu $H$ na boki odpowiednio $CA$ i $AB$. Niech punkty $K$, $L$ i $N$ będą $H$-środkami dopisanymi do trójkątów $HBF$, $HCE$ i $HEF$. Pokazać, że $A$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $KLN$.




rys. 6

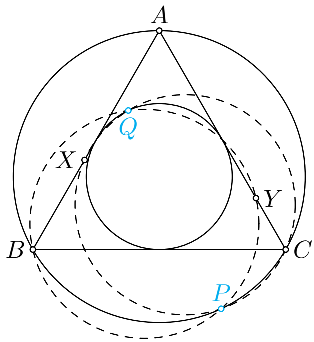
**7.** Dany jest trójkąt równoboczny $ABC$ (rys. 7). Punkt $D$ leży na boku $BC$. Okrąg o środku w punkcie $D$ i promieniu $AD$ przecina $AC$ i $AB$ odpowiednio w punktach $E$ i $F$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $AD$. Pokazać, że

$$\sphericalangle AEB + \sphericalangle AFC = \sphericalangle EMF.$$



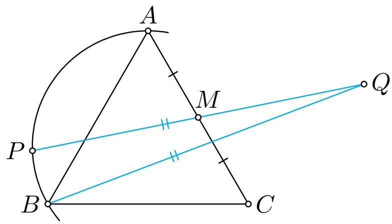

rys. 7

**8.** W trójkącie równobocznym $ABC$ (rys. 8) okręgi $\omega$ i $o$ są odpowiednio okręgiem wpisanym i opisanym. Punkty $X$ i $Y$ leżą na odcinkach $AB$ i $AC$, odpowiednio tak, że prosta XY zawiera środek trójkąta $ABC$. Okręgi $\Omega_1$ i $\Omega_2$ mają średnice $XC$ i $YB$, odpowiednio. Pokazać, że $\Omega_1$ i $\Omega_2$ przecinają się w punktach leżących na $\omega$ i $o$.



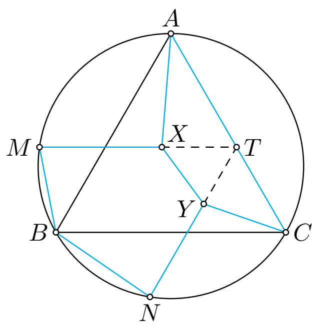
rys. 8

**9.** Dany jest trójkąt równoboczny $ABC$ (rys. 9). Punkt $P$ leży na krótszym łuku $AB$ okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $AC$. Punkt $Q$ jest symetryczny do punktu $P$ względem punktu $M$. Wykaż, że $BQ = PQ$.



rys. 9

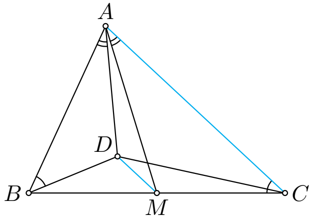
**10.** W trójkącie równobocznym $ABC$ (rys. 10) na boku $AC$ dany jest punkt $T$. Punkty $M$ i $N$ leżą na krótszych łukach $AB$ i $BC$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, tak że $MT \parallel BC$ oraz $NT \parallel AB$. Proste $AN$ i $MT$ przecinają się w punkcie $X$, a proste $CM$ i $NT$ przecinają się w punkcie $Y$. Pokazać, że obwody wielokątów $AXYC$ i $XMBNY$ są równe.



rys. 10

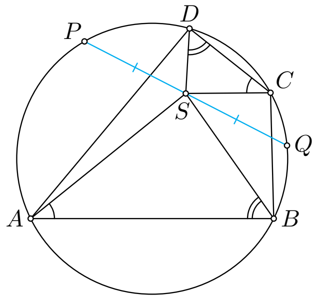
# Podobieństwo i symediany

**11.** Punkt $M$ jest środkiem boku $BC$ trójkąta $ABC$ (rys. 11). Punkt $D$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$ i spełnia równości $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MAC$. Udowodnij, że prosta $DM$ jest równoległa do prostej $AC$.



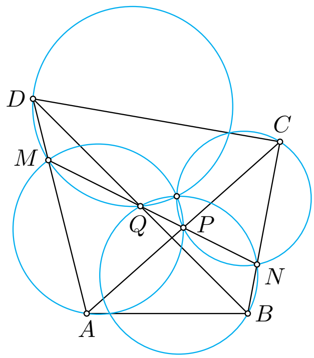

rys. 11

**12.** Czworokąt $ABCD$ (rys. 12) jest wpisany w okrąg $o$. Punkt $S$ leży wewnątrz okręgu $o$ i spełnia równości $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC$ oraz $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD$. Prosta zawierająca dwusieczną kąta $ASD$ przecina okrąg $o$ w punktach $P$ i $Q$. Wykaż, że $PS = QS$.



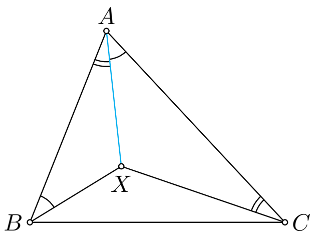

rys. 12

**13.** Czworokąt $ABCD$ (rys. 13) jest wypukły. Punkty $P$ i $Q$ są środkami przekątnych $AC$ i $BD$ odpowiednio. Prosta $PQ$ przecina boki $BC$ i $DA$ w punktach $N$ i $M$ odpowiednio. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach $BNQ$, $CNP$, $DMQ$ i $AMP$ mają punkt wspólny.




rys. 13

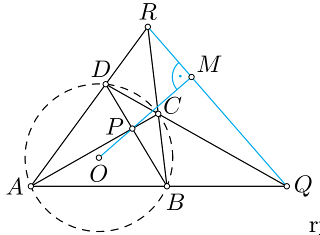
**14.** W trójkącie $ABC$ (rys. 14) punkt $X$ jest środkiem podobieństwa spiralnego przesyłającego $B$ w $A$ i $A$ w $C$. Pokazać, że $AX$ jest symedianą w trójkącie $ABC$.



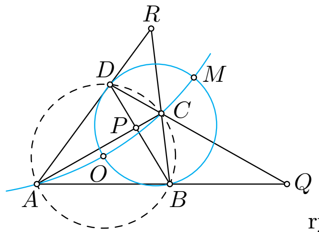

rys. 14

**15.** Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku w punkcie $O$. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $Q$, proste $AD$ i $BC$ w punkcie $R$, a przekątne $AC$ i $BD$ w punkcie $P$. Punkt $M$ jest punktem Miquela czworokąta $AQCR$. Pokazać, że:

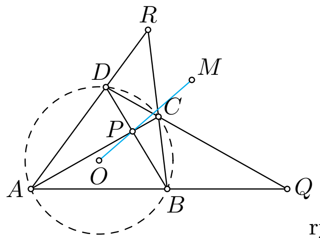
1. $OM \perp QR$ (rys. 15a).
2. Czwórki punktów $C$, $O$, $A$, $M$ oraz $B$, $O$, $D$, $M$ leżą na jednym okręgu (rys. 15b).
3. Punkty $O$, $M$, $P$ są współliniowe (rys. 15c).
4. $M$ jest obrazem inwersyjnym punktu $P$ względem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ (rys. 15d).



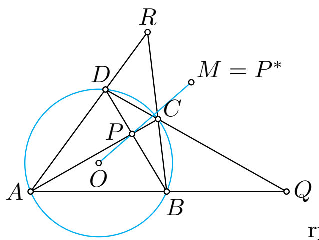
rys. 15a



rys. 15b

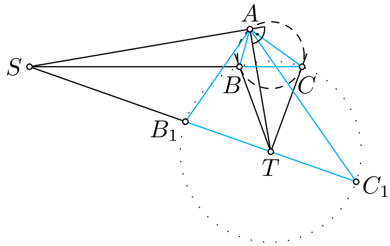


rys. 15c



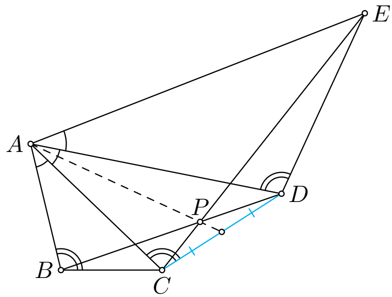
rys. 15d

**16.** Trójkąt $ABC$ (rys. 16) jest wpisany w okrąg $\omega$. Styczne do $\omega$ w punktach $B$ i $C$ przecinają się w punkcie $T$. Punkt $S$ leży na półprostej $BC$ tak, że $AS \perp AT$. Punkty $B_1$ i $C_1$ leżą na $ST$ ($C_1$ leży między $B_1$ i $S$) tak że $B_1T = BT = C_1T$. Pokazać, że trójkąty $ABC$ i $AB_1C_1$ są podobne.




rys. 16

**17.** W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ (rys. 17) takim, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE$ i $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle EDA$, przekątne $BD$ i $CE$ przecinają się w punkcie $P$. Pokazać, że $AP$ połowi $CD$.

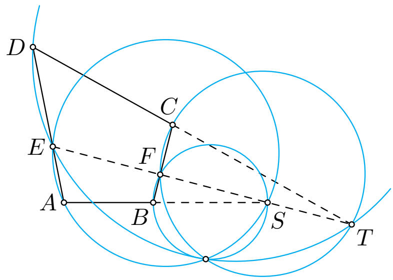



rys. 17

**18.** W czworokącie $ABCD$ (rys. 18) punkty $E$ i $F$ leżą na $AD$ i $BC$ tak, że

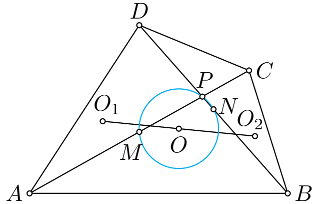
$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}.$$

Prosta $EF$ przecina boki $BA$ i $CD$ w punktach $S$ i $T$, odpowiednio. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach $SAE$, $SBF$, $TCF$ i $TDE$ przecinają się w jednym punkcie.



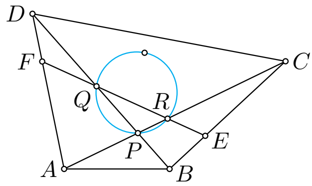

rys. 18

**19.** W czworokącie $ABCD$ (rys. 19) przekątne $AC$ i $BD$ przecinają się w punkcie $P$. Punkty $O_1$ i $O_2$ są środkami okręgów opisanych na trójkątach $APD$ i $BPC$, odpowiednio. Niech $M$, $N$ i $O$ będą środkami $AC$, $BD$ i $O_1O_2$, odpowiednio. Pokazać, że $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $MPN$.



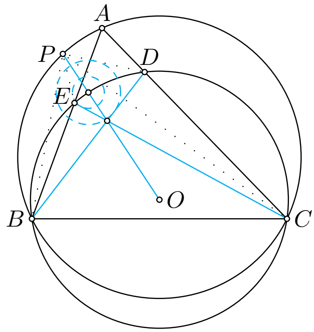

rys. 19

**20.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ (rys. 20) boki $BC$ i $AD$ mają równą długość. Punkty $E$ i $F$ leżą wewnątrz $BC$ i $AD$ odpowiednio tak, że $BE = DF$. Proste $AC$ i $BD$ przecinają się w punkcie $P$ a proste $BD$ i $EF$ przecinają się w punkcie $Q$. Proste $EF$ i $AC$ przecinają się w punkcie $R$. Rozpatrzmy trójkąty $PQR$ przy zmieniających się punktach $E$ i $F$. Pokazać, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny różny od $P$.



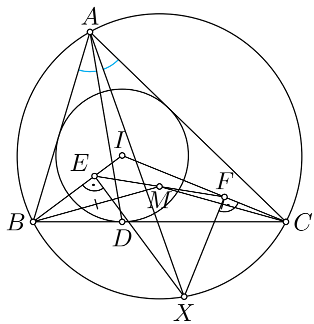
rys. 20

**21.** Dany jest ostrokątny różnoboczny trójkąt $ABC$ (rys. 21). Okrąg $\omega$ o środku w $O$ przechodzi przez $B$ i $C$ oraz przecina boki $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $E$ i $D$. Punkt $P$ leży na łuku $BC$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ zawierającym punkt $A$. Udowodnić, że proste $BD$, $CE$ i $OP$ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy środki okręgów wpisanych w trójkąty $PBD$ i $PCE$ pokrywają się.



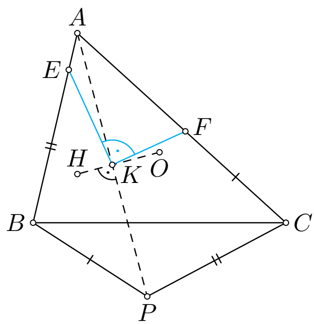
rys. 21

**22.** Okrąg wpisany o środku w punkcie $I$ jest styczny do boku $BC$ nierównoramiennego trójkąta $ABC$ (rys. 22) w punkcie $D$. Punkt $X$ leży na łuku $BC$ (niezawierającego punktu $A$) okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkty $E$ i $F$ są rzutami punktu $X$ na proste $BI$ i $CI$, odpowiednio. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $EF$. Pokazać, że jeśli $MB = MC$, to $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAX$.



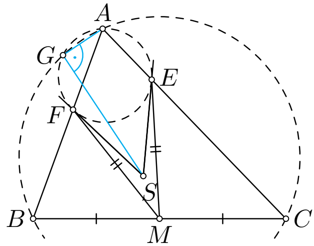
rys. 22

**23.** Punkty $O$ i $H$ są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum w trójkącie $ABC$ (rys. 23). Punkt $P$ jest obrazem punktu $A$ względem prostej $OH$. Załóżmy, że $A$ i $P$ leży po przeciwnych stronach prostej $BC$. Punkty $E$, $F$ leżą na $AB$, $AC$ odpowiednio tak, że $BE = PC$ oraz $CF = PB$. Niech prosta $AP$ przecina $OH$ w punkcie $K$. Pokazać, że $\sphericalangle EKF = 90°$.



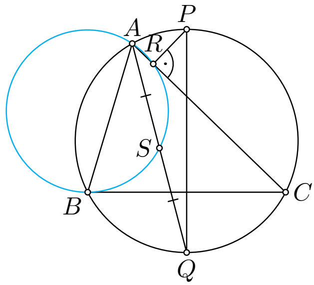
rys. 23

**24.** Punkt $M$ jest środkiem odcinka boku $BC$ trójkąta $ABC$ (rys. 24) wpisanego w okrąg $\Omega$. Punkty $E$ i $F$ leżą na bokach $CA$ i $AB$, odpowiednio, przy czym $ME = MF$. Styczne w punktach $E$ i $F$ do okręgu $\Gamma$ opisanego na trójkącie $AEF$ przecinają się w punkcie $S$. Okręgi $\Omega$ i $\Gamma$ przecinają się w punkcie $G \neq A$. Pokazać, że $\sphericalangle AGS = 90°$.



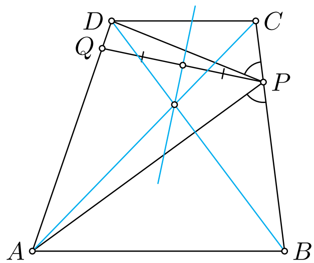
rys. 24

**25.** Symetralna boku $BC$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ (rys. 25) w punktach $P$ i $Q$, przy czym punkty $A$ i $P$ leżą po tej samej stronie prostej $BC$. Punkt $R$ jest rzutem prostokątnym punktu $P$ na prostą $AC$. Punkt $S$ jest środkiem odcinka $AQ$. Wykazać, że punkty $A$, $B$, $R$ i $S$ leżą na jednym okręgu.



rys. 25

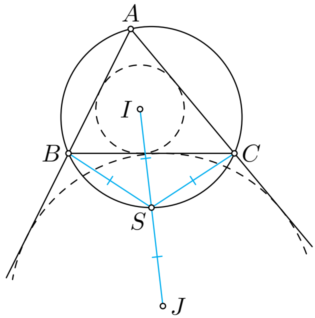
**26.** Dany jest trapez $ABCD$ (rys. 26) o podstawach $AB$ i $CD$. Punkty $P$ i $Q$ leżą odpowiednio na ramionach $BC$ i $AD$, przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka $PQ$ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.



rys. 26

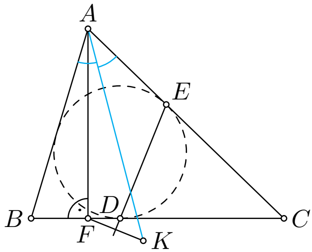
# Okrąg wpisany i dopisany

**27.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 27). Niech $I$ będzie środkiem okręgu wpisanego, zaś $J$ środkiem okręgu $A$-dopisanego. Prosta $AI$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punkcie $S \neq A$. Udowodnić, że $SB = SI = SC = SJ$.




rys. 27

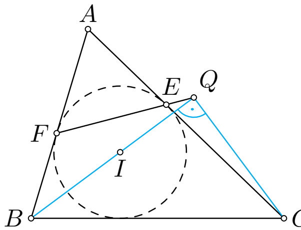
**28.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ (rys. 28) jest styczny do boków $AC$ i $AB$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Punkt $F$ jest rzutem prostokątnym punktu $B$ na prosta $AC$. Punkt $K$ jest symetryczny do punktu $F$ względem prostej $DE$. Dowieść, ze punkt $K$ leży na dwusiecznej kąta $ABC$.



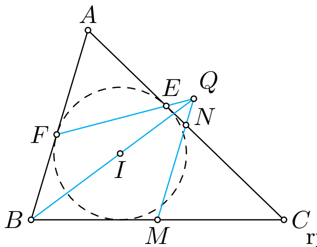

rys. 28

**29.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 29). Niech $I$ będzie środkiem okręgu wpisanego, zaś $E$ i $F$ punktami styczności tego okręgu z bokami $AC$ i $AB$, odpowiednio. Punkt $Q$ jest punktem przecięcia prostych $BI$ i $EF$, a $M$ i $N$ są odpowiednio środkami boków $BC$ i $AC$. Pokazać, że:

1. $\sphericalangle BQC = 90°$ (rys. 29a).
2. punkty $M$, $N$, $Q$ są współliniowe (rys. 29b).

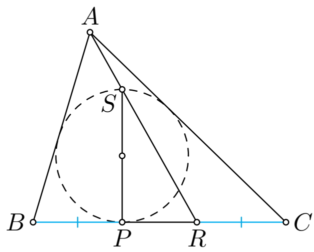



rys. 29a



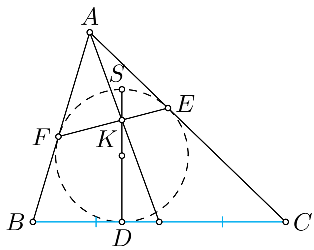

rys. 29b

**30.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 30). Okrąg wpisany jest styczny do $BC$ w punkcie $P$. Niech $PS$ będzie średnicą okręgu wpisanego, zaś $R$ punktem przecięcia prostych $AS$ i $BC$. Udowodnić, że $BP = CR$



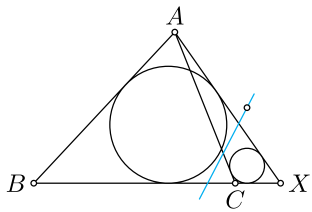
rys. 30

**31.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 31). Okrąg wpisany jest styczny do boków $BC$, $AC$ i $AB$ odpowiednio w punktach $D$, $E$ i $F$. Niech $DS$ będzie średnicą okręgu wpisanego i tnie $EF$ w $K$. Udowodnić, że $AK$ jest środkową.



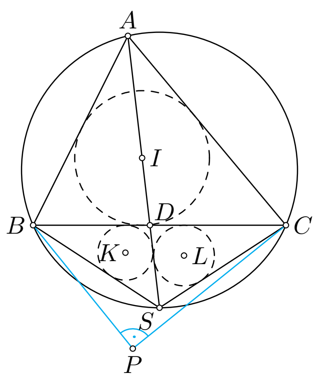
rys. 31

**32.** W trójkącie $ABC$ (rys. 32) punkt $X$ leży na półprostej $BC$, na zewnątrz trójkąta $ABC$. Pokazać, że przy zmieniającym się położeniu punktu $X$, osie potęgowe okręgów wpisanych w trójkąty $ABX$ i $ACX$ przechodzą przez jeden punkt wspólny.



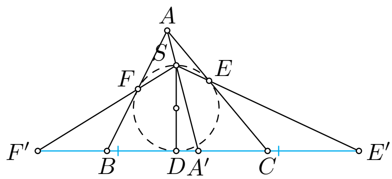
rys. 32

**33.** Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ (rys. 33). Prosta $AI$ przecina prostą $BC$ w punkcie $D$ oraz okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punkcie $S \neq A$. Punkt $K$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $DSB$, a punkt $L$ - w trójkąt $DSC$. Punkt $P$ jest odbiciem symetrycznym punktu $I$ względem prostej $KL$. Wykazać, że $\sphericalangle BPC = 90°$.



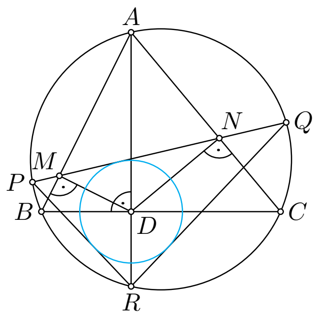
rys. 33

**34.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ (rys. 34) jest styczny do boków $BC$, $CA$, $AB$ odpowiednio w punktach $D$, $E$, $F$. Odcinek $DS$ jest średnicą tego okręgu. Proste $AS$, $ES$, $FS$ przecinają prostą $BC$ odpowiednio w punktach $A'$, $E'$, $F'$. Wykazać, że $A'$ jest środkiem odcinka $E'F'$.



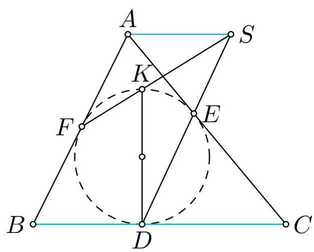
rys. 34

**35.** W trójkącie ostrokątnym $ABC$ (rys. 35) punkt $D$ jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka $A$, a punkty $M$ i $N$ są rzutami prostokątnymi punktu $D$ odpowiednio na boki $AB$ i $AC$. Proste $MN$ oraz $AD$ przecinają okrąg opisany na trójkącie $ABC$ odpowiednio w punktach $P$, $Q$ oraz $A$, $R$. Dowieść, że punkt $D$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $PQR$.



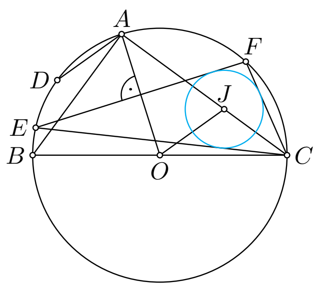
rys. 35

**36.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ (rys. 36) jest styczny do boków $BC$, $CA$, $AB$ odpowiednio w punktach $D$, $E$, $F$. Niech $DK$ będzie średnicą okręgu wpisanego, zaś $S$ punktem przecięcia $DE$ i $FK$. Udowodnić, że $AS$ jest równoległe do $BC$.



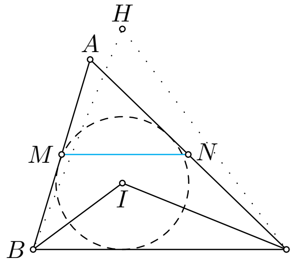
rys. 36

**37.** Niech $BC$ będzie średnicą okręgu $\omega$ o środku $O$ (rys. 37). Punkt $A$ leżący na okręgu $\omega$ spełnia warunek $0^\circ < \sphericalangle AOB < 120^\circ$. Oznaczmy przez $D$ środek tego łuku $AB$, który nie zawiera punktu $C$. Prosta przechodząca przez $O$ i równoległa do $DA$ przecina prostą $AC$ w punkcie $J$. Symetralna odcinka $OA$ przecina okrąg $\omega$ w punktach $E$ i $F$. Dowieść, że $J$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $CEF$.



rys. 37

**38.** Dany jest okrąg $\omega$ (rys. 38) o środku w punkcie $I$ wpisany w trójkąt $ABC$. Niech punkty $M$ i $N$ będą środkami boków odpowiednio $AB$ i $AC$. Pokazać, że biegunem prostej $MN$ względem $\omega$ jest ortocentrum trójkąta $BIC$.

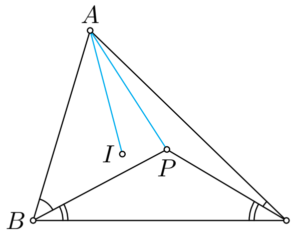


rys. 38

**39.** W trójkącie $ABC$ (rys. 39) punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta oraz:

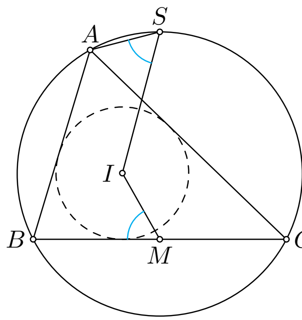
$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Pokazać, że $AP \geqslant AI$.



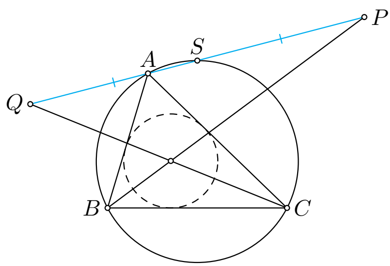
rys. 39

**40.** W trójkącie $ABC$ (rys. 40) punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $BC$, zaś $S$ środkiem łuku $BC$ zawierającym $A$. Udowodnić, że $\sphericalangle IMB = \sphericalangle ISA$.



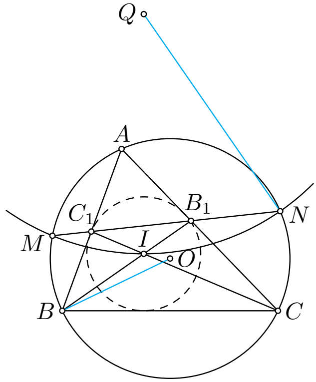
rys. 40

**41.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 41) i punkt $S$ będący środkiem łuku $BC$ zawierającym punkt $A$. Dwusieczne kątów $ABC$ i $ACB$ przecinają prostą $AS$ odpowiednio w $P$ i $Q$. Udowodnić, że $S$ jest środkiem odcinka $PQ$.



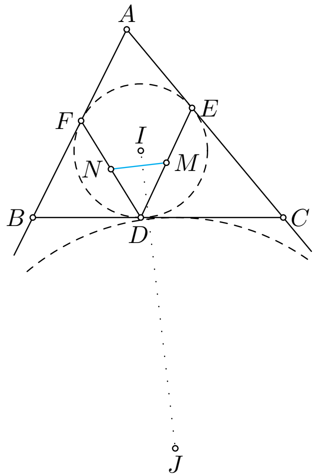
rys. 41

**42.** W trójkącie $ABC$ (rys. 42) dwusieczne kątów $ABC$ i $BCA$ przecinają boki $CA$ i $AB$ odpowiednio w $B_1$ i $C_1$. Niech $I$ będzie środkiem okręgu wpisanego, zaś $M$ i $N$ punktami przecięcia prostej $B_1C_1$ z okręgiem opisanym na trójkącie $ABC$. Pokazać, że promień okręgu opisanego na trójkącie $MIN$ jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu opisanego na trójkącie $ABC$.



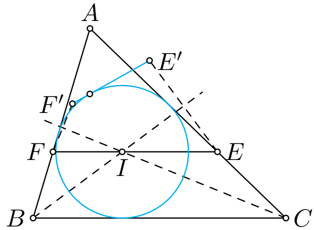
rys. 42

**43.** Okrąg $\omega$ wpisany trójkąt $ABC$ (rys. 43) jest styczny do boków $BC$, $CA$, $AB$ odpowiednio w punktach $D$, $E$, $F$. Niech $J$ będzie środkiem okręgu $A$-dopisanego, zaś $M$ i $N$ środkami odcinków $DE$ oraz $DF$ odpowiednio. Udowodnić, że biegunem prostej $MN$ względem $\omega$ jest punkt $J$.



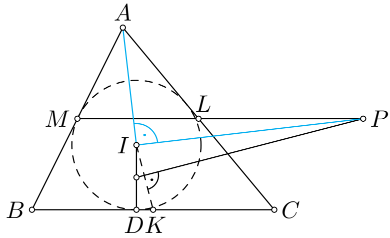
rys. 43

**44.** Niech $\omega$ będzie okręgiem wpisanym w trójkąt $ABC$ (rys. 44) o środku w punkcie $I$. Prosta równoległa do $BC$ zawierająca $I$ przecina boi $AC$ i $AB$ odpowiednio w punktach $E$ oraz $F$. Niech $E'$ będzie punktem symetrycznym do $E$ względem prostej $BI$, zaś $F'$ punktem symetrycznym do $F$ względem prostej $CI$. Udowodnić, że prosta $E'F'$ jest styczna do $\omega$.



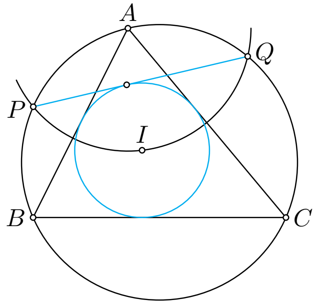
rys. 44

**45.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 45), w którym $AB \neq AC$. Punkty $K$, $L$, $M$ są środkami boków odpowiednio $BC$, $CA$, $AB$. Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ o środku w $I$ jest styczny do $BC$ w punkcie $D$. Prosta przechodząca przez środek $ID$ prostopadła do $IK$ przecina prostą $LM$ w $P$. Udowodnić, że $\sphericalangle PIA = 90°$.



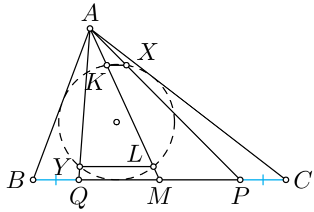

rys. 45

**46.** Niech $\omega$ będzie okręgiem wpisanym w trójkąt $ABC$ (rys. 46) o środku w punkcie $I$. Okrąg o środku w $A$ i promieniu $AI$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punktach $P$ oraz $Q$. Pokazać, że prosta $PQ$ jest styczna do $\omega$.



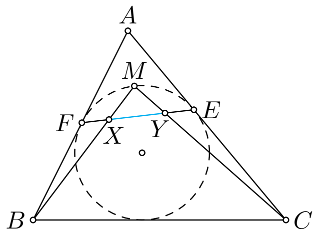

rys. 46

**47.** Niech $ABC$ (rys. 47) będzie trójkątem, zaś $M$ środkiem boku $BC$. $\omega$ jest okręgiem wpisanym w trójkąt $ABC$. Środkowa $AM$ przecina $\omega$ w dwóch punktach $K$ i $L$. Niech proste przechodzące przez $K$ i $L$ równoległe do $BC$ przecinają $\omega$ ponownie w $X$ i $Y$. Niech proste $AX$ i $AY$ przecinają $BC$ w punktach $P$ i $Q$. Udowodnić, że $BQ = CP$.



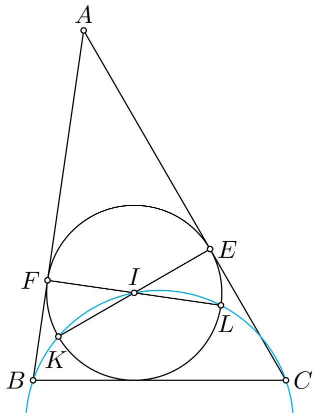

rys. 47

**48.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 48) i okrąg $\omega$ weń wpisany i styczny do boków $AC$ i $AB$ odpowiednio w $E$ i $F$. Punkt $M$ jest środkiem krótszego łuku $EF$ okręgu $\omega$. Proste $BM$ i $CM$ przecinają prostą $EF$ odpowiednio w punktach $X$ i $Y$. Dowieść, że długość odcinka $XY$ jest równa połowie długości odcinka $EF$.



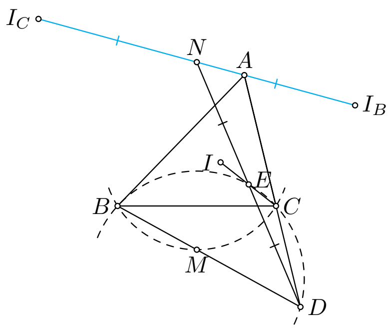

rys. 48

**49.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 49), w którym $AB + AC = 3BC$. $I$ jest środkiem okręgu wpisanego stycznego do boków $AC$ i $AB$ dpowiednio w $E$ i $F$. Niech $K$ i $L$ będą punktami symetrycznymi do $E$ i $F$ względem punktu $I$. Udowodnić, że czworokąt $BKLC$ jest cykliczny.



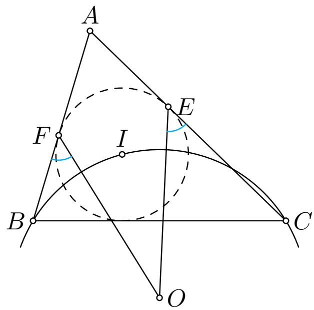

rys. 49

**50.** Niech $ABC$ będzie trójkątem ostrokątnym (rys. 50), w którym $AB > AC$ oraz $\Gamma$ jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Niech $M$ będzie środkiem łuku $BC$ okręgu $\Gamma$ niezawierającym punktu $A$. Punkt $D$ jest przecięciem półprostych $AC$ i $BM$. Punkt $E \neq C$ jest przecięciem dwusiecznej wewnętrznej kąta $ACB$ z okręgiem opisanym na trójkącie $BDC$. Przypuśćmy, że $E$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$, zaś $N$ jest przecięciem $DE$ i okręgu $\Gamma$, przy czym $E$ jest środkiem $DN$. Udowodnić, że $N$ jest środkiem odcinka $I_BI_C$, gdzie $I_B$ oraz $I_C$ to środki odpowiednio okręgu $B$-dopisanego i $C$-dopisanego.




rys. 50

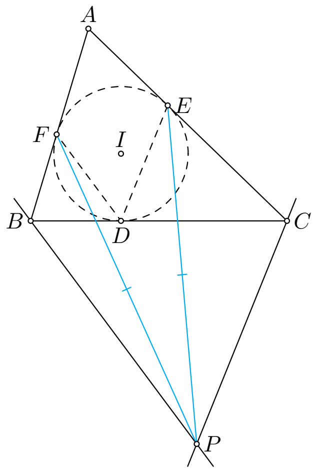
**51.** Niech $I$ będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ (rys. 51), zaś $E$ i $F$ punktami styczności tego okręgu z bokami odpowiednio $AC$ i $AB$. Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $BIC$. Pokazać, że $\sphericalangle BFO = \sphericalangle OEC$.



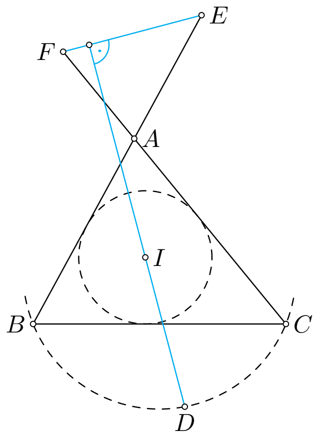

rys. 51

**52.** W trójkącie $ABC$ (rys. 52) okrąg wpisany jest styczny do boków $BC, CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Proste równoległe do $DE$ i $DF$ przechodzące przez $C$ i $B$ odpowiednio przecinają się w punkcie $P$. Pokazać, że $PE = PF$.

**53.** Niech $I$ będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ (rys. 53), zaś $AD$ średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkty $E$ i $F$ leżą na półprostych $BA$ i $CA$ odpowiednio, przy czym długości odcinków $BE$ i $CE$ są równe połowie obwodu trójkąta $ABC$. Pokazać, że $EF \perp DI$



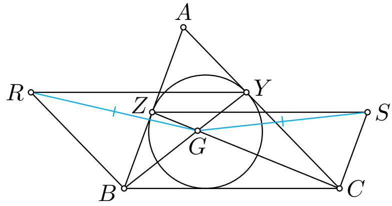
rys. 52



rys. 53

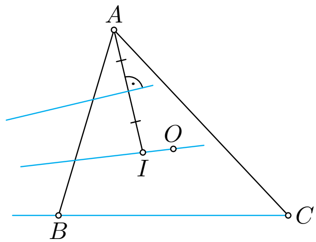
# Potęga punktu

**54.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ (rys. 54) jest styczny do boków $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $Z$ i $Y$. Odcinki $BY$ i $CZ$ przecinają się w punkcie $G$, zaś punkty $R$ i $S$ wybrano tak, że czworokąty $BCYR$ i $BCSZ$ są równoległobokami. Wykazać, że $GR = GS$.



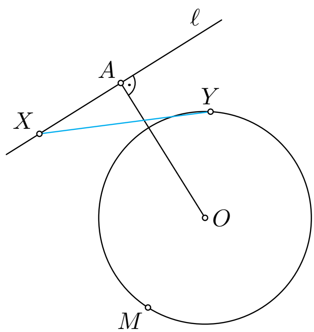
rys. 54

**55.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 55), w którym $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt $I$ — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka $AI$, prosta $OI$ oraz prosta $BC$ przecinają się w jednym punkcie.



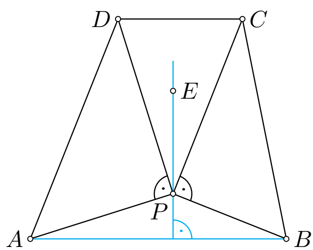
rys. 55

**56.** Dany jest okrąg $\omega$ (rys. 56) o środku w punkcie $O$ oraz prosta $\ell$ leżąca na zewnątrz $\omega$. Niech $A$ będzie rzutem punktu $O$ na prostą $\ell$. Niech $M \in \omega$ a punkty $X$ i $Y$ będą punktami przecięcia okręgu o średnicy $AM$ z prostą $\ell$ oraz $\omega$, odpowiednio. Pokazać, że proste $XY$ odpowiadające różnym położeniom punktu $M$ mają punkt wspólny.



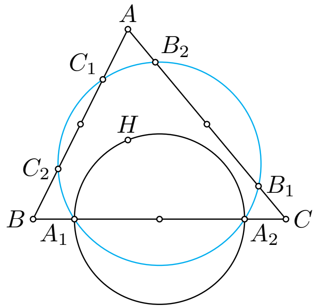
rys. 56

**57.** Przekątne trapezu $ABCD$ (rys. 57) o podstawach $AB$ i $CD$ przecinają się w punkcie $E$. Punkt $P$ leży wewnątrz tego trapezu, przy czym $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC = 90^\circ$. Wykazać, że punkty $P$ i $E$ leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.



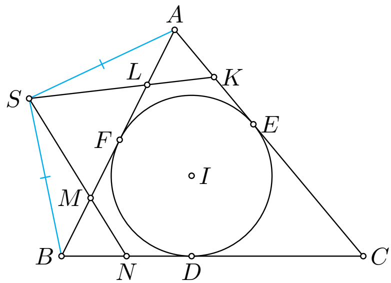
rys. 57

**58.** Punkt $H$ jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego $ABC$ (rys. 58). Okrąg $\Gamma_A$ o środku w środku odcinka $BC$ przechodzi przez punkt $H$ i przecina prostą $BC$ w punktach $A_1$ i $A_2$. Analogicznie definiujemy punkty $B_1$, $B_2$ oraz $C_1$ i $C_2$. Pokazać, że punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$ i $C_2$ leżą na jednym okręgu.



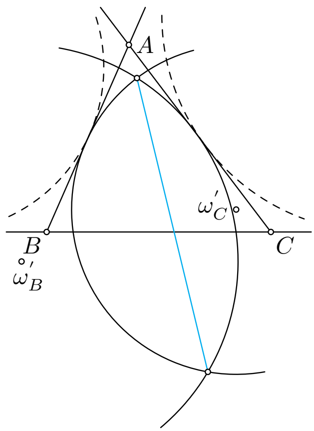
rys. 58

**59.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ (rys. 59) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkty $K$, $L$, $M$ i $N$ są odpowiednio środkami odcinków $AE, AF, BF, BD$. Proste $KL$ i $MN$ przecinają się w punkcie $S$. Pokazać, że $SA = SB$.



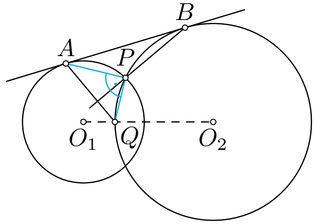
rys. 59

**60.** Niech $\omega_B$ i $\omega_C$ będą okręgami dopisanymi w trójkącie $ABC$ (rys. 60) do boków odpowiednio $AC$ i $AB$. Ponadto, niech $\omega'_B$ i $\omega'_C$ będą okręgami symetrycznymi do $\omega_B$ i $\omega_C$ kolejno względem środków boków $AC$ i $AB$. Pokazać, że oś potęgowa $\omega'_B$ i $\omega'_C$ połowi obwód trójkąta $ABC$.



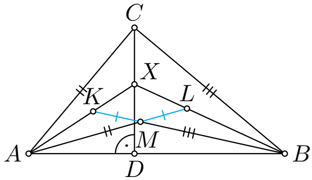
rys. 60

**61.** Okręgi $\omega_1$, $\omega_2$ o środkach $O_1$ i $O_2$ odpowiednio, przecinają się w punkcie $P$ (rys. 61). Styczna zewnętrzna do $\omega_1$ i $\omega_2$ jest styczna do nich w punktach $A$ i $B$ w tej kolejności. Prosta prostopadła do $BP$ przechodząca przez punkt $A$ przecina $O_1O_2$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $\sphericalangle APQ = 90°$.



rys. 61

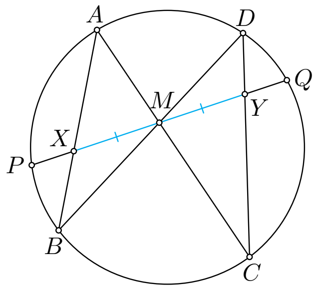
**62.** W trójkącie $ABC$ (rys. 62) mamy $\sphericalangle BCA = 90°$ oraz $D$ jest rzutem puntu C na AB. Niech $X$ będzie punktem leżącym na odcinku $CD$. Niech $K$ będzie punktem odcinka $AX$ takim, że $BK = BC$. Podobnie, niech $L$ będzie punktem odcinka $BX$ takim, że $AL = AC$. Niech $M$ będzie punktem przecięcia prostych $AL$ i $BK$. Pokazać, że $MK = ML$.



rys. 62

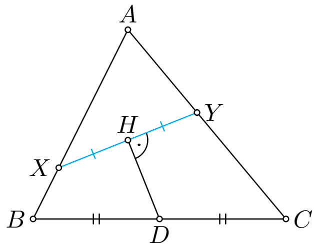
# Twierdzenie o motylku

**63.** Dana jest cięciwa $PQ$ okręgu $\Omega$ (rys. 63). Dane są również dwie inne cięciwy $AC$ i $BD$ przechodzące przez punkt $M$, będący środkiem odcinka $PQ$. Niech $X$ będzie punktem przecięcia $AB$ i $PQ$, zaś $Y$ punktem przecięcia $CD$ i $PQ$. Dowieść, że $XM = MY$.



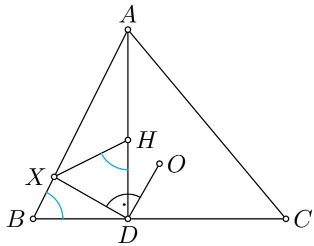
rys. 63

**64.** W trójkącie $ABC$ (rys. 64) punkt $H$ jest ortocentrum, a $D$ środkiem boku $BC$. Prosta prostopadła do $DH$ przechodząca przez $H$ tnie $AB$ i $AC$ w punktach $X$ i $Y$. Dowieść, że $DX = DY$.



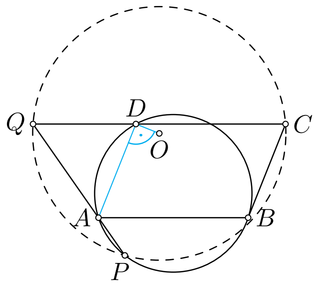
rys. 64

**65.** W trójkącie $ABC$ (rys. 65) punkt $H$ jest ortocentrum, a $D$ jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka $A$. Niech $O$ będzie środkiem okręgu opisanego na $ABC$. Prosta prostopadła do $OD$ przechodząca przez $D$ tnie $AB$ w punkcie $X$. Dowieść, że $\sphericalangle XHD = \sphericalangle CBA$.



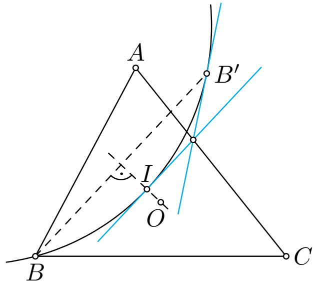
rys. 65

**66.** Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 66), w którym kąt $DAB$ jest ostry. Punkty $A$, $P$, $B$, $D$ leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste $AP$ i $CD$ przecinają się w punkcie $Q$. Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $CPQ$. Wykazać, że jeśli $D \neq O$, to proste $AD$ i $DO$ są prostopadłe.



rys. 66

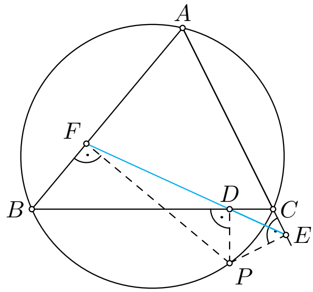
**67.** W nierównoramiennym trójkącie $ABC$ (rys. 67) punkty $O$ i $I$ są odpowiednio środkami okręgu opisanego i wpisanego, odpowiednio. Punkt $B'$, jest obrazem punktu $B$ w symetrii względem prostej $OI$ i leży wewnątrz kąta $ABI$. Pokazać, że styczne w punktach $B'$, $I$ do okręgu opisanego na trójkącie $BB'I$ przecinają się na prostej $AC$.




rys. 67

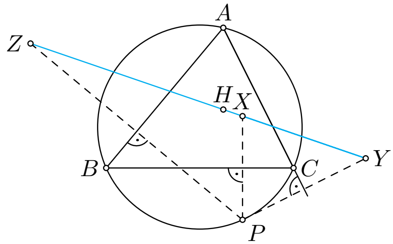
# Prosta Simsona

**68.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 68) wpisany w okrąg $\omega$ oraz punkt $P$ leżący na tym okręgu. Rzuty prostokątne punktu $P$ na proste $BC, CA, AB$ oznaczmy odpowiednio przez $D, E, F$. Dowieść, że punkty $D, E, F$ leżą na jednej prostej.



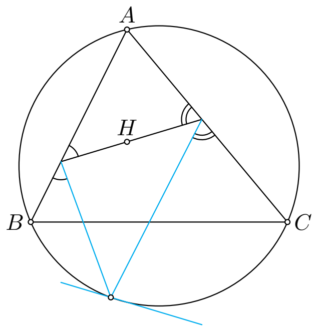
rys. 68

**69.** Punkt $P$ leży na okręgu $\omega$ opisanym na trójkącie $ABC$ (rys. 69). Punkty $X$, $Y$ i $Z$ są obrazami punktu $P$ w symetrii względem boków odpowiednio $BC$, $CA$ i $AB$. Dowieść, że punkty $X$, $Y$ i $Z$ leżą na jednej prostej, która zawiera ortocentrum trójkąta $ABC$.



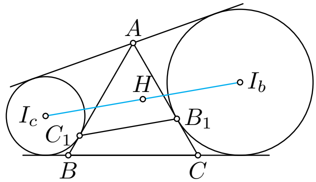
rys. 69

**70.** Punkt $H$ jest ortocentrum trójkąta $ABC$ (rys. 70). Prosta $\ell$ przechodzi przez $H$. Pokazać. że obrazy prostej $\ell$ względem boków trójkąta $ABC$ przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie $ABC$.



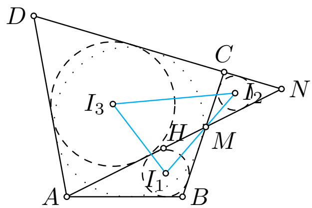
rys. 70

**71.** Prosta $l$ przechodzi przez wierzchołek $A$ trójkąta równobocznego $ABC$ (rys. 71). Okrąg $\omega_b$ o środku w punkcie $I_b$ jest styczny do odcinka $AC$ w punkcie $B_1$ oraz jest styczny do prostych $l$ i $BC$. Okrąg $\omega_c$ o środku w punkcie $I_c$ jest styczny do odcinka $AB$ w punkcie $C_1$ oraz do prostych $l$ i $BC$. Pokazać, że ortocentrum trójkąta $AC_1B_1$ leży na prostej $I_bI_c$.



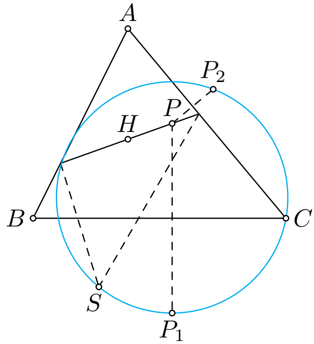
rys. 71

**72.** W czworokącie $ABCD$ (rys. 72) opisanym na okręgu prosta $l$ przechodząca przez wierzchołek $A$ przecina bok $BC$ w punkcie $M$ oraz półprostą $\overrightarrow{DC}$ w punkcie $N$. Punkty $I_1$, $I_2$, $I_3$ są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $ABM$, $MNC$, $NDA$. Dowieść, że ortocentrum trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej $l$.



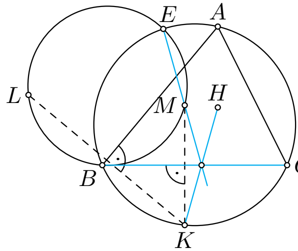

rys. 72

**73.** Punkt $H$ jest ortocentrum trójkąta $ABC$ (rys. 73). Prosta $\ell$ przechodzi przez $H$, natomiast punkt $P$ leży na $\ell$. Punkty $P_1, P_2$ są obrazami punktu $P$ w symetrii względem prostych $BC$ i $AC$, odpowiednio. Punkt $S$ jest przecięciem obrazów prostej $\ell$ w symetrii względem boków trójkąta $ABC$. Pokazać, że punkty $P_1, P_2, C, S$ leżą na jednym okręgu.



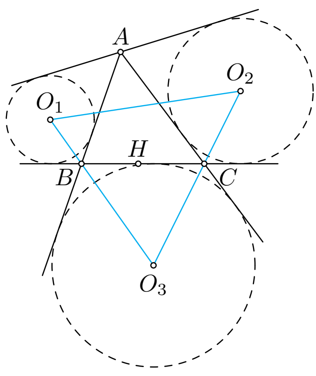

rys. 73

**74.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 74) wpisany w okrąg $\omega$. Punkt $K \in \omega$ i punkt $A$ leżą po przeciwnych stronach prostej $BC$. Punkty $L$, $M$ są odbiciami punktu $K$ względem $AB$, $BC$. Okrąg przechodzący przez punkty $B$, $L$, $M$ przecina $\omega$ po raz drugi w punkcie $E$. Punkt $H$ jest ortocentrum trójkąta $ABC$. Wykazać, że proste $KH$, $EM$, $BC$ mają punkt wspólny.



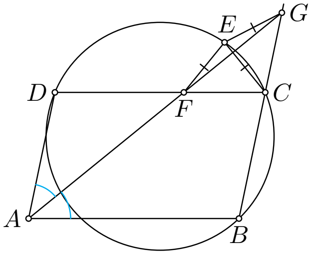

rys. 74

**75.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 75) i prosta $l$ przechodząca przez wierzchołek $A$ i nieprzecinająca odcinka $BC$. Punkt $O_1$ jest środkiem okręgu stycznego do odcinka $AB$, prostej $BC$ i prostej $l$, przy czym okrąg ten jest rozłączny z wnętrzem trójkąta $ABC$. Punkt $O_2$ jest środkiem okręgu stycznego do odcinka $AC$, prostej $BC$ i prostej $l$, przy czym okrąg ten jest rozłączny z wnętrzem trójkąta $ABC$. Zaś punkt $O_3$ jest środkiem okręgu $A$-dopisanego trójkąta $ABC$. Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej $BC$.



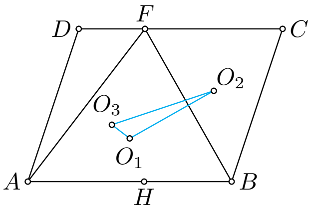

rys. 75

**76.** Dane są punkty $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ takie, że czworokąt $ABCD$ (rys. 76) jest równoległobokiem, a czworokąt $BCED$ jest wpisany w okrąg. Prosta $l$ przechodząca przez $A$ przecina wnętrze odcinka $CD$ w punkcie $F$, a prostą $BC$ w punkcie $G$. Przypuśćmy, że $EF = EG = EC$. Wykazać, że $l$ jest dwusieczną kąta $\sphericalangle DAB$.



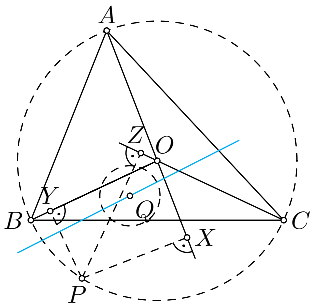

rys. 76

**77.** Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 77) oraz punkt $F$ leżący na odcinku $CD$. Punkty $O_1$, $O_2$ i $O_3$ są środkami okręgów opisanych na trójkątach $ABF$, $BCF$ i $FDA$. Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej $AB$.



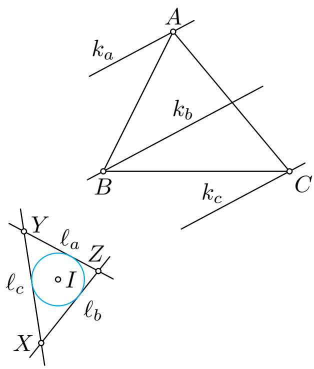

rys. 77

**78.** Punkt $P$ leży na okręgu o środku w punkcie $O$ opisanym na trójkącie $ABC$ (rys. 78). Punkty $X$, $Y$ i $Z$ są rzutami prostokątnymi punktu $P$ na proste $OA$, $OB$ i $OC$, odpowiednio. Pokazać, że środek okręgu wpisanego w trójkąt $XYZ$ leży na prostej Simsona punktu $P$ względem trójkąta $ABC$.



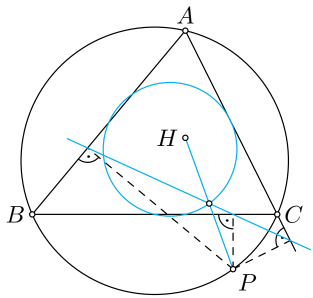

rys. 78

**79.** W trójkącie $ABC$ (rys. 79) dane są równoległe proste $k_a, k_b$ i $k_c$ przechodzące przez punkty odpowiednio $A$, $B$ i $C$. Niech $\ell_a$, $\ell_b$ i $\ell_c$ będą obrazami prostych odpowiednio $k_a$, $k_b$ i $k_c$ względem prostych $BC$, $CA$ i $AB$. Wyznaczyć miejsce geometryczne środka okręgu wpisanego w trójkąt ograniczony prostymi $\ell_a$, $\ell_b$ i $\ell_c$.



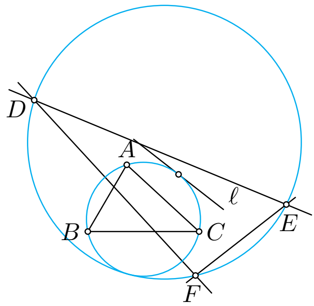

rys. 79

**80.** Punkt $H$ jest ortocentrum trójkąta $ABC$ (rys. 80). Punkt $P$ leży na okręgu opisanym. Pokazać, że prosta Simsona punktu $P$ i prosta $PH$ przecinają się na okręgu 9-punktów trójkąta $ABC$.




rys. 80

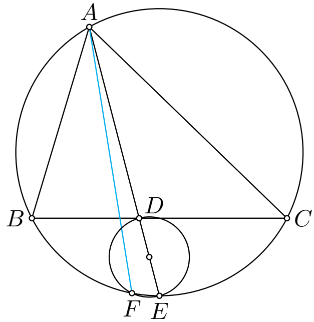
**81.** Niech $ABC$ będzie trójkątem ostrokątnym (rys. 81) a $\Gamma$ jego okręgiem opisanym. Niech $\ell$ będzie prostą styczną do $\Gamma$, i niech $\ell_a, \ell_b$ i $\ell_c$ będą obrazami prostej $\ell$ względem prostych $BC$, $CA$ i $AB$, odpowiednio. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie $DEF$ wyznaczonym przez proste $\ell_a, \ell_b$ i $\ell_c$ jest styczny do $\Gamma$.




rys. 81

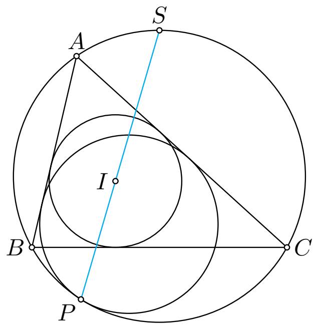
# Inwersja $\sqrt{bc}$

**82.** W trójkącie $ABC$ (rys. 82) dwusieczna kąta $BAC$ przecina bok $BC$ w punkcie $D$ oraz okrąg opisany $\Omega$ na trójkącie $ABC$ w punkcie $E$. Okrąg $\omega$ o średnicy $DE$ przecina $\Omega$ ponownie w punkcie $F$. Pokazać, że $AF$ jest symedianą trójkąta ABC.



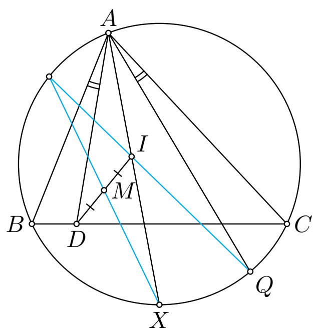

rys. 82

**83.** Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ (rys. 83), zaś $\omega$ jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg styczny do odcinków $AB$, $AC$ jest styczny do okręgu $\omega$ w punkcie $P$, a $S$ jest środkiem tego łuku $BC$ okręgu $\omega$, na którym leży punkt $A$. Wykazać, że punkty $P$, $I$, $S$ są współliniowe.



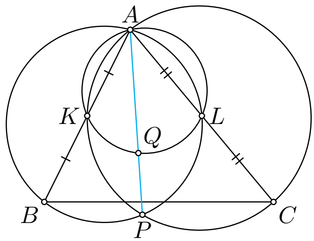

rys. 83

**84.** Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ (rys. 84). Prosta $AI$ przecina okrąg opisany $o$ w punkcie $X$. Punkt $Q$ leży na łuku $BC$ okręgu $o$, który nie zawiera punktu $A$. Punkt $D$ leży na odcinku $BC$ po przeciwnej stronie prostej $AI$ niż punkt $Q$, przy czym $\sphericalangle BAD = \sphericalangle QAC$. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $ID$. Wykazać, że proste $XM$ i $QI$ przecinają się na $o$.



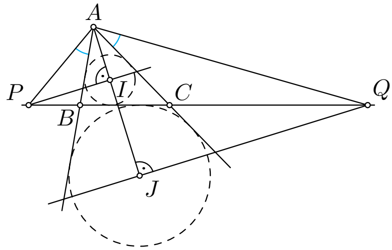

rys. 84

**85.** W trójkącie $ABC$ (rys. 85) punkty $K$ i $L$ są środkami boków odpowiednio $AB$ i $AC$. Punkt $P \neq A$ jest punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach $ABL$ i $ACK$. Niech $Q \neq A$ będzie punktem przecięcia prostej $AP$ i okręgu opisanego na trójkącie $AKL$. Pokazać, że $2AP = 3AQ$.



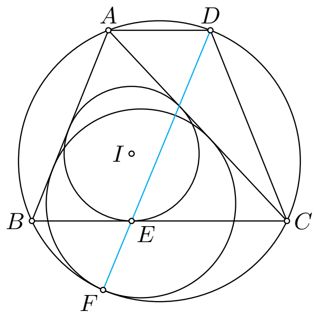
rys. 85

**86.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 86) oraz punkty $I$, $J$ będące środkami okręgów odpowiednio wpisanego w $ABC$ i $A$-dopisanego. Niech $P$ i $Q$ będą punktami przecięcia prostych prostopadłych do $AI$ przechodzących odpowiednio przez $I$ i $J$ z prosta $BC$. Udowodnić, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.



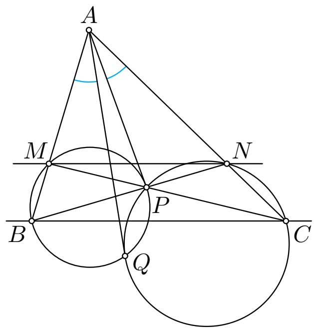
rys. 86

**87.** Trapez $ABCD$ (rys. 87) o podstawach $AD$ i $BC$ jest wpisany w okrąg $o_1$. Okrąg $o_2$ jest styczny do odcinków $AB$ i $AC$ oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu $o_1$ w punkcie $F$. Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ jest styczny do odcinka $BC$ w punkcie $E$. Dowieść, że punkty $D$, $E$, $F$ leżą na jednej prostej.



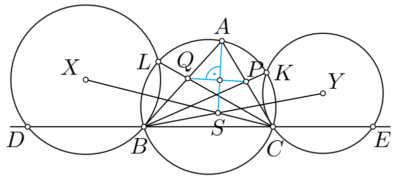
rys. 87

**88.** W trójkącie $ABC$ (rys. 88) punkty $M$ i $N$ leżą na bokach odpowiednio $AB$ i $AC$ tak, że $MN \parallel BC$. Proste $BN$ i $CM$ przecinają się w punkcie $P$. Niech $Q$ będzie drugim punktem przecięcia się okręgów opisanych na trójkątach $BPM$ i $CPN$. Pokazać, że $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle CAP$.



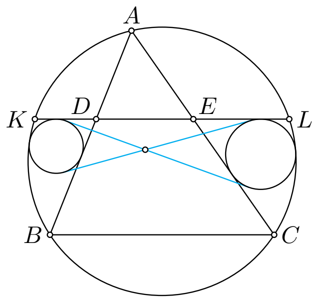
rys. 88

**89.** Niech punkty $D$, $B$, $C$, $E$ leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności (rys. 89) i niech punkt $A$ spełnia równości $AB = DB$ oraz $AC = EC$. Poprowadźmy dwusieczne kątów $ABC$ oraz $ACB$ i ich przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie $ABC$ oznaczmy odpowiednio przez $K$ i $L$, zaś ich przecięcia z przeciwległymi bokami trójkąta $ABC$ odpowiednio przez $P$ i $Q$. Niech $X$ będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $DBL$, zaś $Y$ środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ECK$. Przez $S$ oznaczmy punkt przecięcia $CX$ i $BY$. Udowodnić, że $AS \perp PQ$.



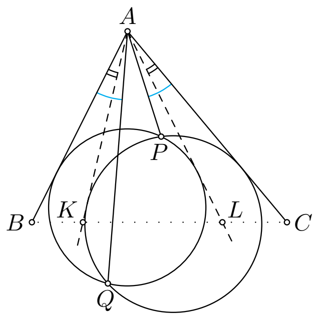
rys. 89

**90.** Trójkąt $ABC$ (rys. 90) jest wpisany w okrąg $\omega$. Prosta $m$ równoległa do $BC$ przecina boki $AB$, $AC$ w punktach $D$, $E$ odpowiednio, oraz przecina $\omega$ w punktach $K$, $L$ (gdzie $D$ leży między $K$ i $E$). Okrąg $\gamma_1$ jest styczny do odcinków $KD$ i $BD$ oraz jest styczny do $\omega$, okrąg $\gamma_2$ jest styczny do odcinków $LE$ i $CE$ oraz styczny do $\omega$. Przy zmieniającej się prostej $m$ wyznaczyć zbiór punktów przecięcia stycznych wewnętrznych okręgów $\gamma_1$ i $\gamma_2$.



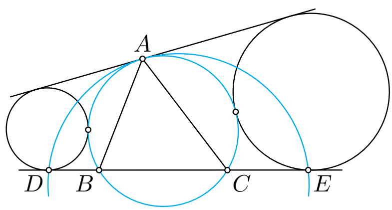
rys. 90

**91.** W trójkącie $ABC$ (rys. 91) punkty $K$ i $L$ leżą na boku $BC$ tak, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CAL < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Okrąg $\omega_1$ jest styczny do boków $AB$ i $AL$. Okrąg $\omega_2$ jest styczny do $AC$ i $AK$. Załóżmy, że $\omega_1$ i $\omega_2$ przecinają się w punktach $P$ i $Q$. Pokazać, że $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB$.



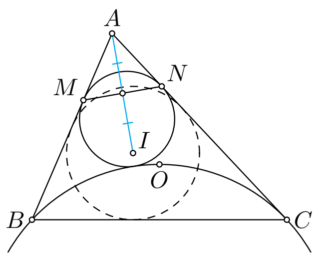
rys. 91

**92.** Niech $\omega$ będzie okręgiem opisanym na trójkącie $ABC$ (rys. 92), natomiast $l$ prostą styczną do $\omega$ w punkcie $A$. Okręgi $\omega_1$ i $\omega_2$ są styczne do $l$, $BC$ oraz zewnętrznie styczne do $\omega$. Oznaczy przez $D, E$ punkty styczności odpowiednio $\omega_1$ i $\omega_2$ z prostą $BC$. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach $ABC$ i $ADE$ są styczne.



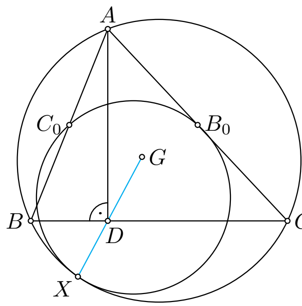
rys. 92

**93.** Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ (rys. 93). Okrąg $\omega$ jest styczny do boków $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $M$ i $N$ oraz do okręgu opisanego na trójkącie $BOC$. Pokazać, że prosta $MN$ połowi odcinek $AI$, gdzie $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$.



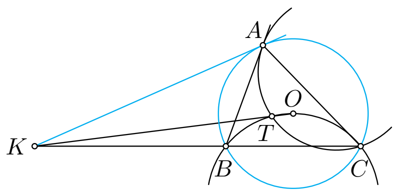
rys. 93

**94.** Niech $ABC$ będzie trójkątem ostrokątnym (rys. 94), a $\Omega$ okręgiem opisanym na tym trójkącie. Punkt $B_0$ jest środkiem $AC$, zaś $C_0$ jest środkiem $AB$. Niech $D$ będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka $A$, a $G$ środkiem ciężkości trójkąta $ABC$. Okrąg $\omega$ przechodzi przez punkty $B_0$ i $C_0$ i jest styczny do $\Omega$ w punkcie $X \neq A$. Dowieść, że punkty $D$, $G$, $X$ są współliniowe.



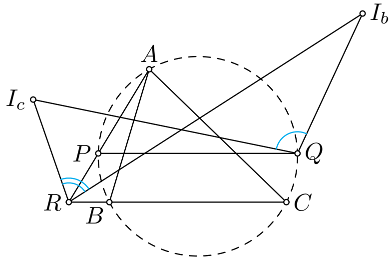
rys. 94

**95.** Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ (rys. 95). Niech $T$ będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie $BOC$ z okręgiem przechodzącym przez punkty $A$ i $C$ i stycznym do $AB$. $K$ jest punktem przecięcia prostych $TO$ i $BC$. Dowieść, że prosta $AK$ jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$



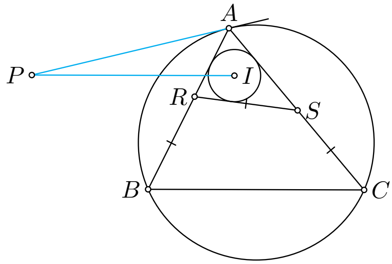
rys. 95

**96.** Niech $I_b$, $I_c$ będą środkami okręgów $B$-dopisanego i $C$-dopisanego w trójkącie $ABC$ (rys. 96). $PQ$ jest cięciwą okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ równoległą do $BC$ i przecinającą odcinki $AB$ i $AC$. Udowodnić, że jeżeli $BC$ przecina $AP$ w punkcie $R$ to $\sphericalangle I_bQI_c + \sphericalangle I_bRI_c = 180°$.



rys. 96

**97.** Trójkąt $ABC$ (rys. 97) jest wpisany w okrąg $\Omega$. Punkty $R$ i $S$ leżą na odcinkach odpowiednio $AB$ i $AC$, przy czym $BR = RS = SC$. Prosta styczna do $\Omega$ w punkcie $A$ przecina prostą $RS$ w punkcie $P$. Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ARS$. Pokazać, że $PA = PI$.

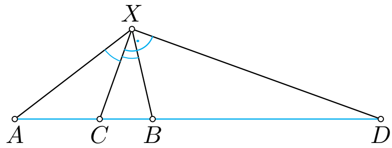



rys. 97

# Dwustosunek i biegunowe

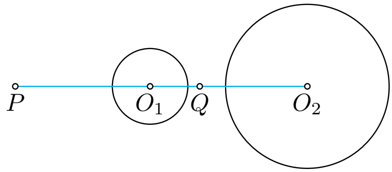
**98.** Jeśli punkty $A$, $C$, $B$ i $D$ leżą w tej kolejności na jednej prostej $k$ (rys. 98), oraz punkt $X$ nie należy do $k$, to dowolne dwa z trzech następujących warunków implikują trzeci

1. $(A, B; C, D) = 1$,
2. Prosta $XC$ jest dwusieczną kąta $AXB$,
3. $XC \perp XD$.



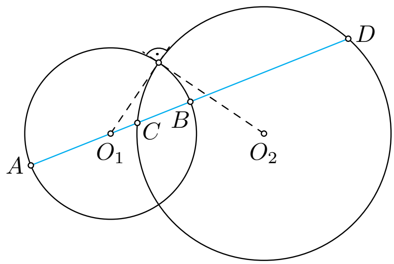

rys. 98

**99.** Dane są dwa różne okręgi $o_1$ i $o_2$ (rys. 99) o środkach odpowiednio $O_1$ i $O_2$. Niech punkty $P$ i $Q$ będą środkami odpowiednio jednokładności zewnętrznej i wewnętrznej okręgów $o_1$ i $o_2$. Wykazać, że $(P, Q; O_1, O_2) = 1$.



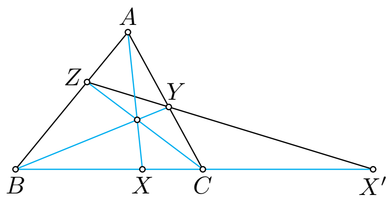

rys. 99

**100.** Dane są dwa ortogonalne (prostopadłe) okręgi $o_1$ i $o_2$ (rys. 100) o środkach odpowiednio $O_1$ i $O_2$. Prosta przechodząca przez $O_1$ przecina okrąg $o_1$ w punktach $A$ i $B$, a okrąg $o_2$ w punktach $C$ i $D$. Wykazać, że $(A, B; C, D) = 1$.



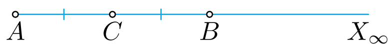

rys. 100

**101.** W trójkącie $ABC$ (rys. 101) punkty $X$, $Y$ i $Z$ leżą odpowiednio na bokach $BC$, $CA$ i $AB$. Prosta $YZ$ przecina prostą $AB$ w punkcie $X'$. Pokaż, że $(B, C; X, X') = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste $AX$, $BY$ i $CZ$ przecinają się w jednym punkcie.



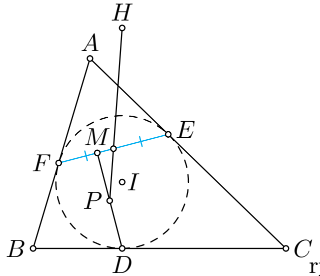

rys. 101

**102.** Dane są trzy punkty współliniowe $A$, $B$ i $C$ (rys. 102) takie, że punkt $C$ jest środkiem odcinka $AB$. Pokaż, że $(A, B; C, X_\infty) = 1$.



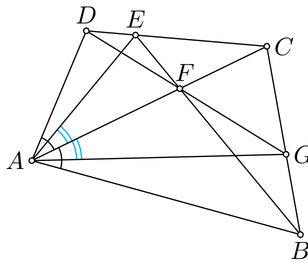

rys. 102

**103.** W trójkącie $ABC$ (rys. 103) okrąg wpisany o środku $I$ jest styczny w punktach $D$, $E$ i $F$ do boków odpowiednio $BC$, $CA$ i $AB$. Punkt $M$ to rzut prostokątny punktu $D$ na prosta $EF$. Niech $P$ będzie środkiem odcinka $DM$ . Pokaż, że jeśli $H$ jest ortocentrum w trójkącie $BIC$ to prosta $PH$ połowi odcinek $EF$.



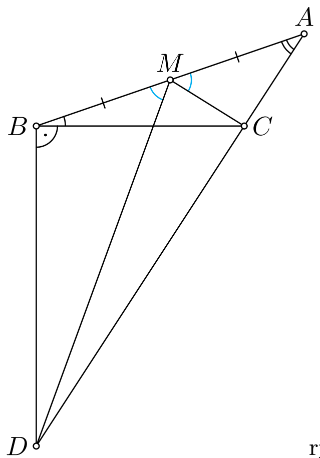
rys. 103

**104.** $ABCD$ jest czworokątem wypukłym (rys. 104), w którym prosta $AC$ jest dwusieczną kąta $BAD$. Punkt $E$ leży na odcinku $CD$, a $F$ jest przecięciem $BE$ i $AC$. Odcinek $DF$ przedłużamy do przecięcia z bokiem $BC$ w punkcie $G$. Wykazać, że $\sphericalangle GAC = \sphericalangle EAC$.



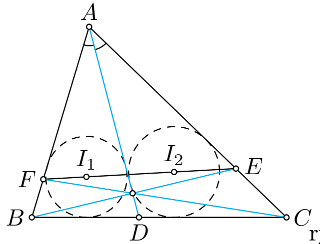
rys. 104

**105.** W trójkącie $ABC$ (rys. 105) kąt $BCA$ jest rozwarty oraz $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt $B$ i prostopadła do $BC$ przecina prostą $AC$ w punkcie $D$. Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$. Dowieść, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMD$.



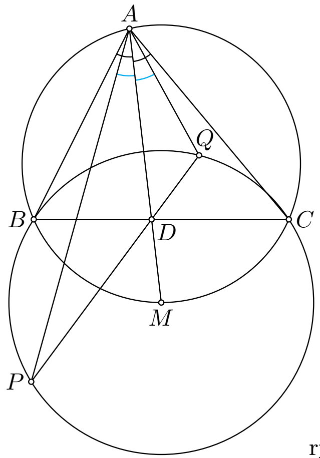
rys. 105

**106.** W trójkącie $ABC$ (rys. 106) punkt $D$ jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku $A$ z bokiem $BC$. Punkty $I_1$ i $I_2$ są środkami okręgów wpisanych w odpowiednio trójkąty $ABD$ i $ADC$. Prosta $I_1I_2$ przecina proste $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $F$ i $E$. Wykazać że proste $AD$, $BE$ i $CF$ przecinają się w jednym punkcie.



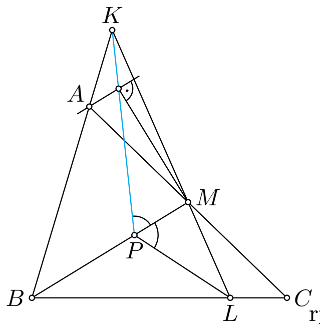
rys. 106

**107.** W trójkącie $ABC$ (rys. 107) dwusieczna kąta przy wierzchołku $A$ przecina prostą $BC$ i okrąg opisany na trójkącie $ABC$ odpowiednio w punktach $D$ i $M$. Niech $\omega$ będzie okręgiem o środku w punkcie $M$ promieniu $MB$. Prosta $l$ przechodząca przez punkt $D$, przecina $\omega$ w punktach $P$ i $Q$. Pokaż, że prosta $AD$ jest dwusieczną kąta $PAQ$.



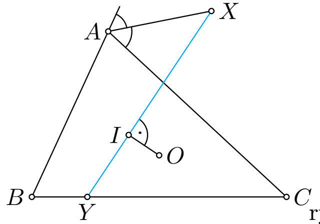
rys. 107

**108.** Niech $M$ będzie środkiem boku $AC$ trójkąta $ABC$ (rys. 108), a $K$ — punktem półprostej $BA$ leżącym poza odcinkiem $BA$. Prosta $KM$ przecina bok $BC$ w punkcie $L$, a $P$ jest takim punktem odcinka $BM$, że półprosta $PM$ jest dwusieczną kąta $LPK$. Prosta $l$ jest równoległa do $BM$ i przechodzi przez punkt $A$. Wykazać, że rzut prostopadły punktu $M$ na prostą $l$ leży na prostej $PK$.



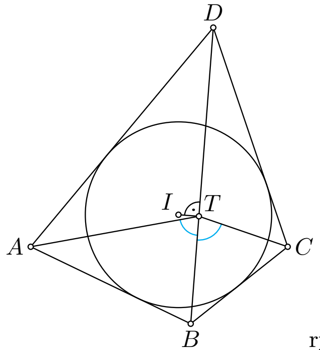
rys. 108

**109.** Niech $O$ oraz $I$ będą odpowiednio środkiem okręgu opisanego i środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ (rys. 109). Prosta prostopadła do $OI$ i przechodząca przez $I$ przecina $BC$ w punkcie $Y$, zaś dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku $A$ w punkcie $X$. W jakim stosunku punkt $I$ dzieli odcinek $XY$?



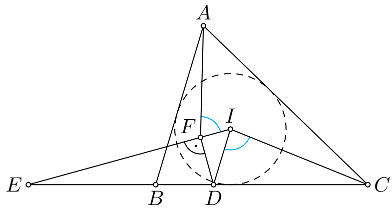

rys. 109

**110.** Dany jest czworokąt $ABCD$ (rys. 110) opisany na okręgu $\omega$ o środku w punkcie $I$. Punkt $T$ jest rzutem punktu $I$ na prostą $BD$. Pokaż, że prosta $BD$ jest dwusieczną kąta $ATC$.



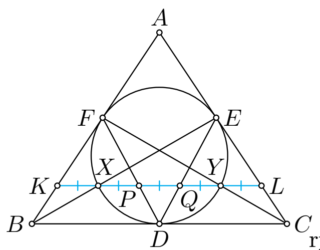

rys. 110

**111.** W trójkącie $ABC$ (rys. 111) punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego. Punkty $D$ i $E$ leżą na prostej $BC$ (w kolejności $E$, $B$, $D$, $C$) tak, że $(E, D; B, C) = 1$. Punkt $F$ jest rzutem punktu $D$ na prostą $IE$. Pokazać, że $\sphericalangle AFI = \sphericalangle IDC$.



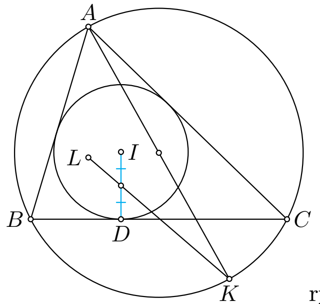

rys. 111

**112.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 112), w którym $AB = AC$. Niech $\omega$ będzie okręgiem wpisanym w trójkąt $ABC$ stycznym do boków $BC$, $CA$, $AB$ odpowiednio w $D$, $E$, $F$. Prosta $BE$ przecina $\omega$ ponownie w punkcie $X$, a prosta $CF$ przecina $\omega$ ponownie w punkcie $Y$. Prosta $XY$ przecina odcinki $AB$, $AC$, $DF$ i $DE$ odpowiednio w punktach $K$, $L$, $P$ oraz $Q$. Pokazać, że $KX = XP = PQ = QY = YL$.



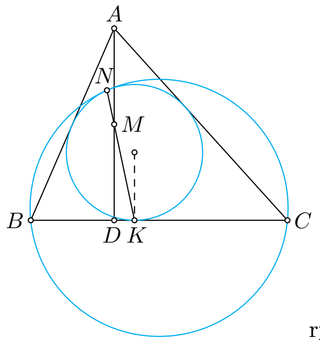

rys. 112

**113.** Okrąg wpisany o środku w punkcie $I$ jest wpisany w trójkąt $ABC$ (rys. 113) i jest styczny do $BC$ w punkcie $D$. Odcinek $AK$ jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkt $L$ jest taki, że $AL \perp BC$ oraz $IL \perp AD$. Pokazać, że $KL$ połowi odcinek $ID$.



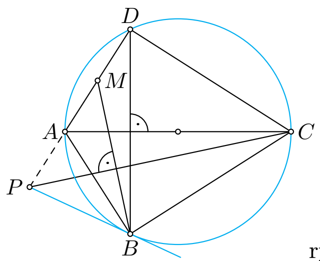

rys. 113

**114.** W trójkącie $ABC$ (rys. 114) okrąg wpisany $\omega$ jest styczny do boku $BC$ w punkcie $K$. Punkt $D$ jest spodkiem wysokości trójkąta $ABC$ opuszczonej z wierzchołka $A$. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $AD$. Prosta $KM$ przecina $\omega$ w punkcie $N$. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie $BNC$ jest styczny do $\omega$.



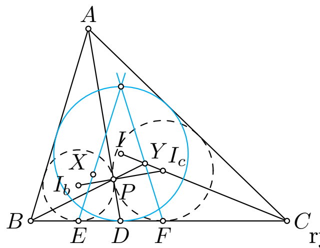

rys. 114

**115.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg $\omega$ (rys. 115). Odcinek $AC$ jest średnicą $\omega$ oraz $AC \perp BD$. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $AD$. Prosta prostopadła do prostej $BM$ przechodząca przez punkt $C$ przecina prostą $AD$ w punkcie $P$. Pokazać, że prosta $BP$ jest styczna do okręgu $\omega$.



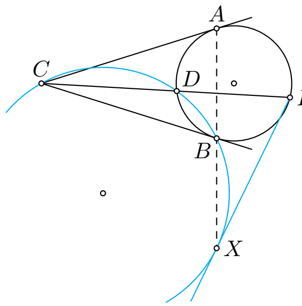

rys. 115

**116.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 116). Punkt $I$ jest środkiem okręgu $\omega$ wpisanego w ten trójkąt, a punkt $D$ jest dowolnym punktem na odcinku $BC$. Okręgi $\omega_B$ i $\omega_C$ o środkach w punktach $I_B$ i $I_C$ to okręgi wpisane odpowiednio w trójkąty $ABD$ i $ACD$. Niech $\omega_B$ będzie styczny do $BC$ w punkcie $E$, a $\omega_C$ w punkcie $F$. Ponadto $P = I_B I_C \cap AD$, $X = BI \cap CP$ oraz $Y = CI \cap BP$. Pokazać, że proste $EX$ i $FY$ przecinają się na okręgu $\omega$ wpisanym w trójkąt $ABC$.



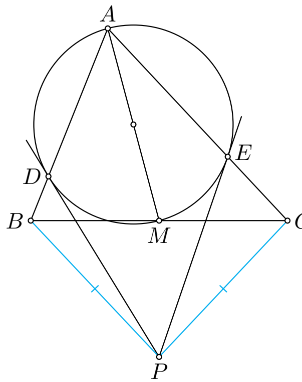
rys. 116

**117.** Proste $CA$ i $CB$ są styczne do okręgu $\omega$ odpowiednio w punktach $A$ i $B$ (rys. 117). Punkt $X$ jest odbiciem punktu $A$ względem punktu $B$. Okrąg $\omega'$ opisany na trójkącie $CBX$ przecina ponownie okrąg $\omega$ w punkcie $D$. Prosta $CD$ przecina $\omega$ ponownie w punkcie $E$. Dowieść, że prosta $EX$ jest styczna do okręgu $\omega'$.



rys. 117

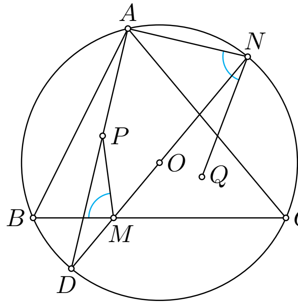
**118.** Punkt $M$ jest środkiem odcinka $BC$ trójkąta $ABC$ (rys. 118). Okrąg $\omega$ o średnicy $AM$ przecina proste $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Styczne w punktach $D$ i $E$ do okręgu $\omega$ przecinają się w punkcie $P$. Udowodnić, że $PB = PC$.



rys. 118

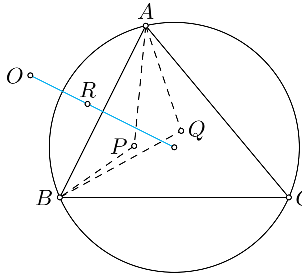
# Sprzężenie izogonalne

**119.** Dany jest trójkąt $ABC$ (rys. 119) i opisany na nim okrąg $\omega$ o środku w $O$. Punkty $P$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone w trójkącie $ABC$. Niech $D \neq A$ będzie punktem przecięcia prostej $AP$ z okręgiem $\omega$, zaś $M$ i $N \neq D$ punktami przecięć prostej $OD$ odpowiednio z odcinkiem $BC$ i okręgiem $\omega$. Udowodnić, że $\sphericalangle PMB = \sphericalangle QNA$.



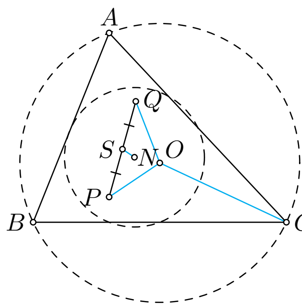

rys. 119

**120.** Punkty $P$ i $Q$ są punktami izogonalnie sprzężonymi w trójkącie $ABC$ (rys. 120). Pokazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach $APB$ i $AQB$ są inwersyjne względem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$.



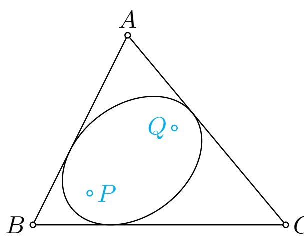

rys. 120

**121.** Punkty $P$ i $Q$ są punktami izogonalnie sprzężonymi w trójkącie $ABC$ (rys. 121). Niech $N$ i $O$ będą środkami okręgów: 9-ciu punktów i opisanego. Pokazać, że jeśli $S$ jest środkiem odcinka $PQ$, to $OP \cdot OQ = 2R \cdot NS$.



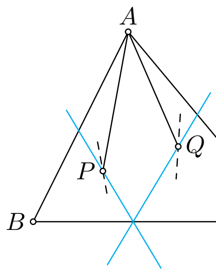

rys. 121

**122.** Niech $\mathcal{E}$ będzie elipsą o ogniskach $P$ i $Q$ wpisaną w trójkąt $ABC$ (rys. 122). Pokazać że punkty $P$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone.




rys. 122

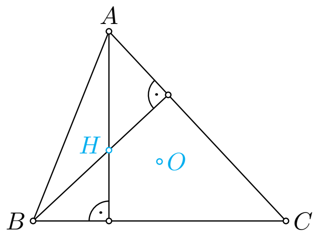
**123.** Punkty $P$ i $Q$ są punktami izogonalnie sprzężonymi w trójkącie $ABC$ (rys. 123). Pokazać, że obraz prostej $AP$ względem dwusiecznej kąta wewnętrznego $BPC$ oraz obraz prostej $AQ$ względem dwusiecznej kąta wewnętrznego $BQC$ są symetryczne względem prostej $BC$.



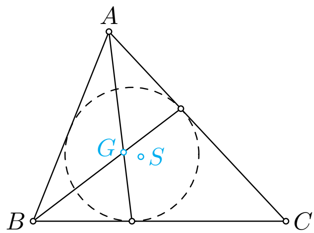

rys. 123

**124.** Pokazać, że następujące pary punktów są izogonalnie sprzężone:

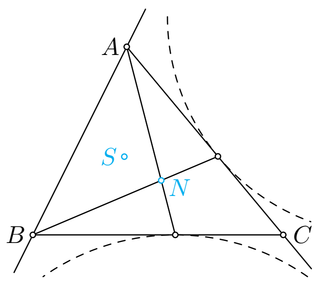
- Ortocentrum i środek okręgu opisanego (rys. 124a).
- Środek jednokładności wewnętrznej okręgów wpisanego i opisanego i punkt Gergin- na (rys. 124b).
- Środek jednokładności zewnętrznej okręgów wpisanego i opisanego i punkt Nagela (rys. 124c).




rys. 124a

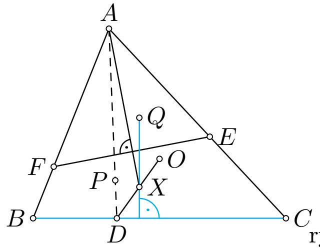



rys. 124b



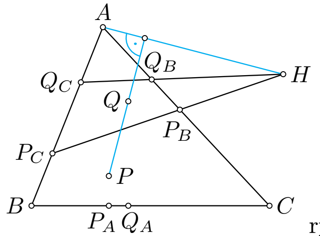

rys. 124c

**125.** W trójkącie $ABC$ (rys. 125) punkty $P$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone. Proste $AP$, $BP$, $CP$ przecinają boki $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta przechodząca przez punkt $A$ i prostopadła do $EF$ przecina $OD$ w punkcie $X$. Pokazać, że $QX \perp BC$.



rys. 125

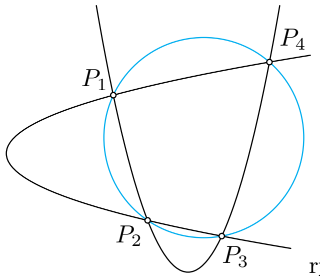
**126.** Punkty $P$ i $Q$ są punktami izogonalnie sprzężonymi w trójkącie $ABC$ (rys. 126). Trójkąt $P_AP_BP_C$ jest trójkątem spodkowym punktu $P$, zaś trójkąt $Q_AQ_BQ_C$ jest trójkątem spodkowym punktu $Q$. Niech $H = P_BP_C \cap Q_BQ_C$. Udowodnić, że $AH \perp PQ$.



rys. 126

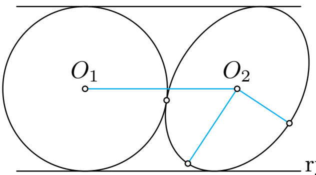
# Krzywe stożkowe

**127.** Pokazać, że cztery punkty przecięcia dwóch parabol, których kierownice są prostopadłe, leżą na okręgu (rys. 127).



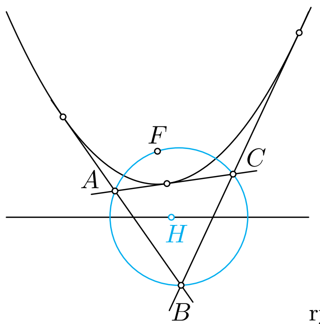

rys. 127

**128.** Okrąg o środku w punkcie $O_1$ i elipsa o środku w punkcie $O_2$ są styczne zewnętrznie oraz dwie wspólne styczne zewnętrzne są równoległe (rys. 128). Pokazać, że długość odcinka $O_1O_2$ jest sumą pół osi małej i pół osi wielkiej elipsy.




rys. 128

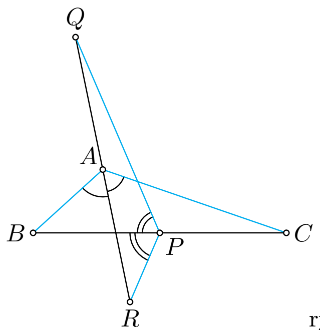
**129.** Pokazać, że trzy styczne do paraboli tworzą trójkąt, którego okrąg opisany zawiera ognisko a ortocentrum leży na kierownicy paraboli (rys. 129).




rys. 129

**130.** Niech $ABC$ i $PQR$ będą trójkątami (rys. 130) takimi, że $A$ i $P$ są środkami boków $QR$ i $BC$, odpowiednio oraz $QR$ i $BC$ są dwusiecznymi odpowiednio kątów $BAC$ i $QPR$. Pokazać, że

$$AB + AC = PQ + PR.$$

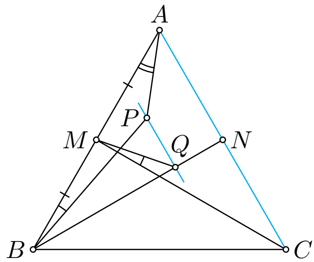



rys. 130

**131.** Niech $ABC$ będzie trójkątem równobocznym (rys. 131) a punkty $M$ i $N$ środkami $AB$ i $AC$, odpowiednio. Niech $P$ będzie punktem leżącym po tej samej stronie prostej $AB$ co punkt $C$, zaś punkt $Q$ leży na prostej $BN$ oraz

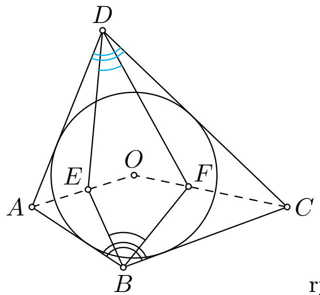
$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle QMC = \frac{\sphericalangle PAB}{2}.$$

Pokazać, że $PQ \parallel AC$.




rys. 131

**132.** Niech $ABCD$ będzie czworokątem opisanym na okręgu o środku w punkcie $O$ (rys. 132). Punkty $E$ i $F$ leżą na odcinkach $OA$ i $OC$, odpowiednio. Pokazać, że jeśli $2\sphericalangle EBF = \sphericalangle ABC$, to $2\sphericalangle EDF = \sphericalangle ADC$




rys. 132