

OBÓZ PRZYGOTOWAWCZY DO OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Rabka Zdrój 2019

ISBN: 978-83-949001-8-2

31 grudnia 2019

Wydawca: Akademia Matematyki Jacek Dymel NIP: 6781767075

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Rabka Zdrój 2019

DW Karabela
Rabka Zdrój

Wstęp

W dniach 2 - 6 grudnia 2019 w DW Karabela w Rabce odbyły się Warsztaty Matematyczne V LO w Krakowie. To już czternaste Warsztaty, których jestem organizatorem. Jednak Warsztaty nie mogłyby się odbywać, gdyby nie pomoc wielu ludzi.

W tym roku w roli opiekunów i prowadzących zajęcia wystąpili nauczyciele matematyki w V LO: Jacek Dymel, Wioletta Kaszuba, Tomasz Kielar, Michał Niedźwiedz.

W organizacji Warsztatów kluczową rolę pełnią studenci, doktoranci oraz pracownicy naukowcy, którzy bardzo chętnie jeżdżą na Warsztaty, na których prowadzą wykłady, układają zadania konkursowe i meczowe, a potem je oceniają.

Na tych Warsztatach kadrę stanowili absolwenci III LO w Tarnowie: Dominik Burek (doktorant w IM UJ) i Jakub Węgrecki, absolwenci Liceum Sióstr Prezentelek w Rzeszowie: Radomił Baran i Jan Fornal, absolwent II LO w Końskich Maciej Dziuba, absolwent I LO w Piotrkowie Trybunalskim Kamil Galewski oraz absolwent V LO w Krakowie Artur Zubilewicz. Chciałbym im bardzo podziękować za to, że mimo wielu swoich zajęć znajdują czas, aby w sposób niezwykle profesjonalny i zaangażowany pomóc zorganizować i poprowadzić Warsztaty. Moi Drodzy, bez Was te Warsztaty nie mogłyby się odbyć! Dziękuję bardzo!

Chciałbym bardzo podziękować wszystkim uczestnikom za znakomite przygotowanie referatów, zaangażowane rozwiązywanie zadań i problemów matematycznych, fajną atmosferę.

Istnieje niezerowe prawdopodobieństwo, że w broszurze pojawiły się błędy merytoryczne czy redakcyjne. Bardzo proszę o informacje o wszystkich dostrzeżonych błędach na adres: jacek.dymel@gmail.com, co pozwoli udoskonalić tę książkę.

Jacek Dymel

Uczestnicy

W Warsztatach wzięli udział uczniowie V LO w Krakowie:

Klasa 1e

Piotr Borodako
Szymon Gaczol
Maja Kokot
Gabriela Pietras
Jan Radomiński-Lasek
Krzysztof Salata
Maksymilian Wdowiarz-Bilski

Klasa 1eg

Kacper Paciorek
Mikołaj Rams

Klasa 1g

Maciej Ziobro

Klasa 1gg

Witek Sikora

Klasa 2d

Jakub Migdał
Katarzyna Żuchowska

Klasa 2e

Kacper Cienkosz
Michał Horodecki
Rafał Krajewski-Siuda
Kacper Kuca
Michał Pajda
Antoni Skoczypiec
Stanisław Sieniawski
Krzysztof Wójcik
Radosław Żak

Klasa 3c

Dominik Bałaban

Klasa 3g

Jakub Adamek
Krystyna Gasińska
Michał Jarząbczyk
Piotr Kamiński
Piotr Kubaty

Andrzej Morawa
Marcin Pawłowski
Zofia Salata
Bartek Ślupik
Beniamin Śniegowski
Tomasz Ślusarczyk
Mateusz Wejman
Maria Wysogład
Grzegorz Żmija

oraz zaproszeni uczniowie z innych szkół:

Aleksandra Pasieka - II LO w Krakowie
Patryk Marszałek - LO SS Prezentek w Rzeszowie
Bartosz Zięzio - LO SS Prezentek w Rzeszowie
Maciej Rut - LO SS Prezentek w Rzeszowie
Jakub Gładysz - LO SS Prezentek w Rzeszowie
Rafał Pyzik - III LO w Tarnowie
Filip Konieczny - III LO w Tarnowie
Stanisław Majchrzak - III LO w Tarnowie
Alicja Pietrzak - Prywatne Liceum im. Królowej w Lublinie
Bartosz Głowacki - I LO w Piotrkowie Trybunalskim
Michał Kwiatkowski - I LO w Piotrkowie Trybunalskim
Mateusz Wójcicki - I LO w Piotrkowie Trybunalskim
Mateusz Pałucki - I LO w Piotrkowie Trybunalskim
Andrzej Starzyk - Liceum Ogólnokształcące im. Św. Jadwigi Królowej w Kielcach
Piotr Kuc - I Ogólnokształcące Liceum Akademickie w Kielcach
Paweł Gadziński - V LO w Bielsku Białej
Kosma Kasprzyk - XXXVIII Dwujęzyczne LO w Poznaniu
Juliusz Banecki - Gdańskie Liceum Autonomiczne
Kacper Topolski - I LO w Olkuszu
Roman Gicala - I LO w Krośnie
Adam Socha - I LO w Krośnie
Dawid Kociuba - I LO w Krośnie
Karol Jurasz - I LO w Krośnie





Kadra (od lewej): Dominik Burek, Artur Zubilewicz, Kamil Galewski, Maciej Dziuba, Radomił Baran, Jan Fornal, Jakub Węgrecki.

Wszyscy uczniowie zostali podzieleni na trzy grupy:

1. Grupa Średnia:

Piotr Borodako
Szymon Gaczol
Roman Gicala
Jakub Gładysz
Karol Jurasz
Dawid Kociuba
Maja Kokot
Piotr Kuc
Michał Kwiatkowski
Stanisław Majchrzak
Jakub Migdał
Andrzej Morawa
Mateusz Pałucki
Aleksandra Pasieka
Gabriela Pietras
Jan Radomiński-Lasek
Krzysztof Salata
Adam Socha
Andrzej Starzyk
Maksymilian Wdowiarz-Bilski
Mateusz Wejman
Mateusz Wójcicki
Maciej Ziobro
Grzegorz Żmija
Katarzyna Żuchowska

2. Grupa Starsza:

Jakub Adamek
Dominik Bałaban
Kacper Cienkosz
Michał Horodecki
Krystyna Gasińska
Bartosz Głowacki
Michał Jarząbczyk
Piotr Kamiński
Rafał Krajewski-Siuda
Kacper Kuca
Patryk Marszałek
Kacper Paciorek
Michał Pajda
Marcin Pawłowski

Alicja Pietrzak
Mikołaj Rams
Maciej Rut
Zofia Salata
Stanisław Sieniawski
Witek Sikora
Antoni Skoczypiec
Bartłomiej Słupik
Beniamin Śniegowski
Kacper Topolski
Maria Wysogład
Krzysztof Wójcik
Bartosz Zięzio

3. Elita:

Juliusz Banecki
Paweł Gadziński
Kosma Kasprzyk
Filip Konieczny
Rafał Pyzik
Tomasz Ślusarczyk
Radosław Żak

Referaty

W Grupie Średniej ogłoszono referaty:

Jakub Węgrecki, *Równania diofantyczne*
Jakub Węgrecki, *Przegląd zadań z geometrii I*
Jakub Węgrecki, *Przegląd zadań z geometrii II*
Artur Zubilewicz, *Równania funkcyjne*
Artur Zubilewicz, *Twierdzenie Bezoute'a*
Artur Zubilewicz, *Trick $(a - b)|(f(a) - f(b))$*
Artur Zubilewicz, *Potęga punktu względem okręgu*
Artur Zubilewicz, *Wokół obrotów*
Jakub Adamek, *Biegunowe - wprowadzenie*

W Grupie Starszej ogłoszono referaty:

Kamil Galewski, Maciej Dziuba, *Podwójne zliczanie*
Kamil Galewski, Maciej Dziuba, *Wielomiany*
Kamil Galewski, Maciej Dziuba, *Podobieństwo spiralne*
Piotr Kubaty, *Z ortocentrami*

W grupie Elita ogłoszono referaty:

Dominik Burek, *Dziewięć okręgów*
Radomił Baran, *Inwersja*
Radomił Baran, *Metoda poruszania punktów I*
Radomił Baran, *Metoda poruszania punktów II*
Radomił Baran, *Równania funkcyjne*
Jan Fornal, *Wielomiany o szczególnych własnościach*
Jan Fornal, *Algorytmy w zadaniach olimpijskich*
Jan Fornal, *Metoda probabilistyczna*

Zawody

Przez cztery dni uczniowie pisali zawody, w czasie których rozwiązywali po 3 lub 4 zadania dziennie. Treści zadań z konkursów oraz meczów, jakie odbyły się w ostatni dzień Warsztatów, wraz z rozwiązaniami zaproponowanymi przez uczniów i kadre, znajdują się w dalszej części książki.

Najlepsze wyniki w Grupie Średniej uzyskali:

Mateusz Wójcicki
Piotr Kuc
Karol Jurasz
Maksymilian Wdowiarz-Bilski
Krzysztof Salata

Najlepsze wyniki w Grupie Starszej uzyskali:

Bartosz Głowacki
Jakub Adamek
Michał Jarząbczyk
Witold Sikora
Dominik Bałaban

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. W turnieju szachowym spotkało się 6 osób. Każdy grał z każdym, nie było remisów, ale każdy wygrał co najmniej raz. Udowodnić, że da się tych graczy rozsadzić przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy gracz wygrał z co najmniej jednym ze swoich sąsiadów lub z co najmniej jednym sąsiadem swoich sąsiadów.

2. Niech $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Niech S będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $a_i^2 + a_j^2$ dla $1 \leq i < j \leq 7$. Udowodnić, że istnieją dwie liczby $x, y \in S$ takie, że liczba $x - y$ jest podzielna przez 36.

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y)$$

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym I to środek okręgu wpisanego oraz D to punkt przecięcia prostej AI z okręgiem opisanym na ABC . Punkt E leży na okręgu opisanym na ABC , punkt F leży na odcinku BC oraz są takie, że zachodzi

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC$$

Punkt M jest środkiem odcinka FI . Wykazać, że proste DM oraz EI przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg ω o środku w punkcie O jest opisany na trójkącie ABC . Proste AD oraz CD przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M oraz N . Wykazać, że proste BO oraz MN są prostopadłe.

6. Kwadrat o boku długości 1 pokryto m^2 prostokątami. Dowieść, że obwód pewnego z tych prostokątów jest większy lub równy $\frac{4}{m}$.

7. Rozwiązać równanie

$$p^3 + 5n - 1 = n(p^2 + 2p + 6n)$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, a n liczbą całkowitą dodatnią.

8. Niech $n > 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, które spełniają równania

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, \quad \text{oraz} \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1.$$

Udowodnić, że

$$a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \dots + a_{n-1}(b_{n-1} + a_n) + a_n(b_n + a_1) < 1.$$

9. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste (x, y) , $x \neq y$ takie, że

$$\begin{aligned} x^{100} - y^{100} &= 2^{99}(x - y) \\ x^{200} - y^{200} &= 2^{199}(x - y) \end{aligned}$$

10. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\angle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Udowodnić, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF .

11. Dany jest zbiór S , w którym jest 6 różnych liczb rzeczywistych dodatnich. Ponadto jeśli $a, b \in S$ oraz $a > b$, to $a + b \in S$ lub $a - b \in S$. Wykazać, że elementy S tworzą ciąg arytmetyczny.

12. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej c , niech $p(c)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym c . Ciąg $\{a_n\}$ dodatnich liczb całkowitych spełnia $a_1 > 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + p(a_n)$ dla wszystkich $n \geq 1$. Udowodnić, że w ciągu $\{a_n\}$ istnieje przynajmniej jeden kwadrat liczby całkowitej dodatniej.

13. Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych nieparzystych

$$y^4 - 144 = x^{57} + 25$$

14. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x tożsamość

$$(x - 1) \cdot W(x + 1) = (x + 3) \cdot W(x - 1)$$

15. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F , przy czym $FA = FE$ oraz $FB = FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E .

16. Układ liczb całkowitych dodatnich $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach $c_1, c_2, \dots, c_n$ można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny. Uwaga: Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ które spełniają

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y .

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty H, O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego. Symetralna odcinka AH przecina boki AB, AC w punktach odpowiednio P, Q . Wykazać, że $\sphericalangle POA = \sphericalangle AOQ$.

3. Znajdź liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 2000\}$, których suma elementów jest podzielna przez 5.

4. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3. Liczba całkowita dodatnia n jest dobra, jeśli istnieją takie wielomiany f, g , że

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x).$$

Wykazać, że istnieje liczba dobra mniejsza od $p^p - 1$.

5. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisujemy liczbę całkowitą, przy czym każda liczba jest wpisana co najwyżej raz. Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa pola tej szachownicy mające wspólny bok, że moduł różnicy liczb wpisanych w te pola jest większa od a .

6. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

7. Liczba pierwsza p spełnia warunek $7 \mid p - 1$. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita n , że $p \mid n^3 + n^2 - 2n - 1$.

8. Przekątne czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu przecinają się w punkcie P . Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABP, BCP, CDP, DAP leżą na jednym okręgu.

9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

10. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest nierówność

$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} > \frac{3}{2}$$

(gdzie symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x)

11. Ciąg $a_0, a_1, \dots$ jest zdefiniowany w taki sposób, że a_0 jest dowolną liczbą rzeczywistą oraz $a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \{a_i\}$. Wykazać, że istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ zachodzi równość $a_{i+2} = a_i$.

12. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Znajdź liczbę wielomianów $P(x)$ o współczynnikach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ spełniających $P(2) = n$.

13. Zdefiniujmy ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ następująco: $a_0 = 3$ oraz $a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$ dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n . Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie m , dla których $\text{NWD}(m, a_n) = 1$ dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n .

14. Na tablicy napisane są liczby całkowite $1000, 1001, \dots, 2999$. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb a, b znajdujących się w danym momencie na tablicy, zmazaniu ich oraz napisaniu na tablicy liczby $\frac{1}{2} \min(a, b)$. Wykazać, że w wyniku wykonania dowolnych 1999 ruchów na tablicy pozostanie liczba mniejsza niż 1.

15. Symetralna odcinka BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q , przy czym A i P leżą po tej samej stronie prostej BC . Niech S będzie środkiem odcinka AQ oraz niech R będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC . Wykaż, że punkty B, S, R, A leżą na jednym okręgu.

16. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej a zachodzi nierówność

$$a^{a^2} + a^{2a} > 1$$

Zawody indywidualne elity

1. Okręgi Ω_1 i Ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 są styczne zewnętrznie w punkcie T oraz są styczne do ich wspólnej stycznej zewnętrznej ℓ w punktach A i B , odpowiednio. Okrąg Ω_3 o środku w punkcie O_3 jest styczny do Ω_1 , Ω_2 oraz do prostej ℓ w punkcie D tak, że Ω_3 znajduje się wewnątrz trójkąta ATB . Prosta TD przecina Ω_1 w punkcie C . Udowodnić, że $O_1C \parallel AB$.

2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$, wielomian

$$2 \left(1 + X^{\frac{p+1}{2}} + (1 - X)^{\frac{p+1}{2}} \right)$$

przystaje modulo p do kwadratu pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

3. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że w dowolnym grafie mającym $2n + 1$ wierzchołków i co najmniej k krawędzi, istnieje cykl (zamknięta ścieżka bez samoprzecięć) mający parzystą liczbę krawędzi.

4. Dany jest ciąg liczb całkowitych $(a_n)_{n \geq 1}$ zdefiniowany następująco:

$$a_1 = 1 \text{ oraz } a_{n+1} = 2^n(2^{a_n} - 1) \text{ dla } n \geq 1.$$

Udowodnić, że $n! \mid a_n$ dla wszystkich $n \geq 1$.

5. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Punkty M i N leżą na odcinku BC , przy czym N leży na odcinku BM . Odcinki AM i DN przecinają się w punkcie X . Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty NMX , ADX , ABM i CDN leżą na jednym okręgu.

6. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k dla których istnieje funkcja $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ taka, że

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + k$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n .

7. Niech f będzie niestałym wielomianem o współczynnikach całkowitych i niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że

$$f(n) = d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_{k+1},$$

gdzie $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k < n$ są liczbami całkowitymi.

8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy $n \geq p$ liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$. Definiujemy: $f_0 = 1$ oraz f_k oznacza liczbę k -elementowych podzbiorów $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$, że $p \mid \sum_{i \in B} a_i$. Udowodnić, że

$$p \mid f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^n f_n.$$

9. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ABC . Niech P będzie dowolnym punktem. Prosta AP przecina Ω w punkcie $D \neq A$. Oznaczmy przez E i F punkty przecięcia BP i CP z CA i AB , odpowiednio. Załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie AEF przecina Ω w punkcie $M \neq A$. Styczne do Ω w punktach B i C przecinają się w punkcie T . Niech $U \neq D$ będzie drugim punktem przecięcia TD z Ω . Udowodnić, że obraz U w symetrii względem prostej BC leży na okręgu opisanym na trójkącie DMP .

10. Dane są liczby rzeczywiste $a, b, c, d \in [\frac{1}{2}, 2]$ takie, że $abcd = 1$. Znaleźć maksymalną wartość wyrażenia

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right).$$

11. Niech $\mathcal{S}$ będzie skończonym zbiorem punktów mający parzystą liczbę elementów i żadne trzy punkty w nim nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że $\mathcal{S}$ może być podzielone na dwa zbiory $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ takie, że ich otoczki wypukłe mają równą liczbę wierzchołków.

12. Niech f będzie wielomianem o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Rozpatrzmy liczbę całkowitą dodatnią a i rozważmy ciąg

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Założmy, że zbiór dzielników pierwszych, które dzielą co najmniej jeden wyraz ciągu $(a_n)_{n \geq 1}$ jest skończony. Udowodnić, że $f(X) = C \cdot X^k$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych C i k .

Mecz matematyczny grupy młodszej

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y , dla których zachodzi

$$x^2 + 615 = 2^y.$$

2. Na płaszczyźnie znajduje się 2018^{2018} punktów, przy czym żadne trzy nie są współliniowe. Każdy z tych punktów jest w jednym z trzech kolorów: czerwonym, zielonym lub niebieskim. Wiadomo jest, że każdy kolor występuje co najmniej raz. Pokazać, że istnieje trójkąt mający wierzchołki wśród tych punktów, gdzie każdy wierzchołek jest w innym kolorze i wewnątrz tego trójkąta nie ma innych punktów.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\angle ACB = 45^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L . Pokazać, że obwód trójkąta KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC .

4. Liczby całkowite dodatnie a , b i c spełniają warunek

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których obie liczby $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.

6. Dana jest kwadratowa plansza o rozmiarze 2018×2018 . Dwóch graczy wykonuje na przemian ruchy w postaci wyboru koloru czarnego lub białego i postawieniu pionka w tym kolorze na jakimś pustym polu. Grę wygrywa ten, po którego ruchu na planszy znajdzie się ciąg pięciu pionków w jednym kolorze (poziomo, pionowo lub na skos). Stwierdzić, czy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

7. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i niech $c < d$ będą takimi kolejnymi liczbami całkowitymi, że zachodzi równość $a - b = a^2c - b^2d$. Udowodnić, że $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Dany jest trójkąt ABC . Niech O oznacza środek okręgu opisanego na tym trójkącie, a H oznacza punkt przecięcia się wysokości tego trójkąta. Punkt A leży po przeciwnej stronie prostej OH niż punkty B i C . Niech d_A , d_B , d_C oznaczają odległości odpowiednich wierzchołków trójkąta ABC od prostej OH . Pokazać, że $d_A = d_B + d_C$.

9. Dana jest plansza o rozmiarze 100×100 . Ile maksymalnie $(3, 1)$ -skoczków można postawić na planszy tak, aby żadne dwa skoczki siebie nie atakowały? $(3, 1)$ -skoczki atakują siebie jeżeli stoją na przeciwnych wierzchołkach prostokąta o rozmiarze 2×4 .

10. Udowodnij, że równanie

$$(2 + \sqrt{5})^m + (3 + \sqrt{5})^n = (4 + \sqrt{5})^k$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k .

11. Dany jest kąt ostry XOY . Wewnątrz tego kąta znajdują się punkty A i B , przy czym zachodzi $\angle AOX = \angle BOY$. Niech X_A, X_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OX . Analogicznie, niech Y_A, Y_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OY . Udowodnić, że proste $AB, X_A Y_B, X_B Y_A$ przecinają się w jednym punkcie.

12. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y spełniające równanie

$$2x^6 + y^7 = 11$$

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{Q}_+$ mamy $f(x) = f(\frac{1}{x})$ oraz dla dowolnej liczby wymiernej $x > 1$ zachodzi równość

$$(x+1)f(x-1) = xf(x).$$

2. Niech n będzie liczbą dodatnią całkowitą, a x, y takimi liczbami dodatnimi, że $x^n + y^n = 1$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

3. Niech $k \geq 2$ będzie liczbą całkowitą, ponadto m, n względnie pierwszymi liczbami całkowitymi większymi niż 1. Udowodnić, że równanie:

$$x_1^m + x_2^m + \dots + x_k^m = x_{k+1}^n$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{Z}^{k+1}$.

4. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, takie, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c , takich, że $a^2 + b^2 \neq c^2$ jest spełniona podzielność $a^2 + b^2 - c^2 | P(a) + P(b) - P(c)$.

5. Dany jest niezerowy wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że istnieje N całkowite, takie, że dla każdego $n > N$ liczby $P(n)$ i $2^{2^n} + 1$ są względnie pierwsze.

6. Dany jest ciąg zawierający 1000 różnych liczb rzeczywistych. Wykazać, że istnieje w nim podciąg rosnący długości 28 lub podciąg malejący długości 38.

7. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których elementy zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mogą być pomalowane na dwa kolory, w taki sposób, że spełniony jest warunek: istnieje dokładnie 1558 uporządkowanych trójek a, b, c ze zbioru S (a, b, c nie muszą być parami różne), w których liczby a, b, c są tego samego koloru, a ich suma dzieli się przez n .

8. Liczby całkowite dodatnie k, l, m, n są takie, że prostokąt $k \times l$ można całkowicie pokryć używając nienachodzących na siebie pionowych pasków $1 \times n$ oraz poziomych $m \times 1$. Wykazać, że prostokąt ten można pokryć używając tylko jednego rodzaju z tych pasków.

9. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Punkty O_1, O_2 są środkami okręgów opisanych na trójkątach APD, BPC . Niech M, N, O będą środkami odcinków odpowiednio AC, BD, O_1O_2 . Udowodnić, że O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie MNP .

10. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P , który leży wewnątrz niego. Z punktu P prowadzimy prostą k prostopadłą do AP , która przecina prostą BC w punkcie X . W analogiczny sposób definiujemy proste l, m oraz punkty Y, Z . Udowodnić, że punkty X, Y i Z leżą na jednej prostej.

11. Dany jest trójkąt ABC , którego okrąg opisany to Ω . Punkt M jest środkiem łuku BC w okręgu Ω , który zawiera punkt A , natomiast punkt L jest spodkiem dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka A . Prosta MI przecina okrąg Ω w punkcie K , gdzie I to środek okręgu wpisanego w ABC . Okrąg opisany na AKL przecina BC w punkcie T . Wiedząc, że X jest przecięciem MI oraz BC , a Y jest przecięciem TI i AK , udowodnić, że $XY \parallel AI$.

Rozwiązania

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. W turnieju szachowym spotkało się 6 osób. Każdy grał z każdym, nie było remisów, ale każdy wygrał co najmniej raz. Udowodnić, że da się tych graczy rozsadzić przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy gracz wygrał z co najmniej jednym ze swoich sąsiadów lub z co najmniej jednym sąsiadem swoich sąsiadów.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy nie wprost, że nie jest to możliwe. Wynika z tego, że pewien gracz wygrał z dokładnie jednym graczem. Oznaczmy graczy przy okrągłym stole kolejno liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jeśli 1 wygrał z dokładnie jednym graczem, to musiał wygrać z 4. Wtedy jeden z układów powstałych przez zamienienie 4 z 5 lub 4 z 6 spełnia warunki zadania.

2. Niech $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Niech S będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $a_i^2 + a_j^2$ dla $1 \leq i < j \leq 7$. Udowodnić, że istnieją dwie liczby $x, y \in S$ takie, że liczba $x - y$ jest podzielna przez 36.

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że $\#S = 21$. Przypuśćmy, że teza nie jest spełniona. Ponadto rozpatrując reszty modulo 9 widzimy, że liczby postaci $a^2 + b^2$ mogą przyjmować wszystkie reszty poza 3 oraz 6. Zatem z Zasady Szufladkowej Dirichleta przynajmniej 3 liczby z S mają tę samą resztę modulo 9. Liczby postaci $a^2 + b^2$ mogą dawać jedynie reszty 0, 1, 2 modulo 3, zatem jeśli pewne 4 liczby dają tę samą resztę modulo 9, to wśród nich istnieją dwie o tej samej reszcie modulo 4, więc teza zadania jest spełniona. Zatem wśród liczb, które dają i z dzielenia przez 9 są dokładnie 3 liczby dla każdego i różnego od 3 oraz 6. W szczególności każda z liczb w obrębie jednej grupy daje inną resztę modulo 4. Zatem jest dokładnie 7 liczb nieparzystych (w obrębie każdej grupy jedna). Jeśli wśród liczb postaci a_i jest n nieparzystych oraz p parzystych, to w S jest np liczb nieparzystych, czyli $np = 7$. Jednakże $n + p = 7$, co daje sprzeczność.

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y)$$

Rozwiązanie:

Podstawiając $x = y = 0$ dostajemy, że $f(0) = 0$ lub $f(0) = 2$. Jeśli $f(0) = 2$, to dla $x = 0$ otrzymamy $f(y) = 2 - y$ i ta funkcja spełnia warunki zadania. Przypuśćmy

więc, że $f(0) = 0$. Wtedy dla $y = 0$ mamy $f(x^2) = xf(x)$, więc w szczególności $-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x)$, zatem $-f(x) = f(-x)$. Podstawiając $y = -x$ dostaniemy, że $0 = f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x)$, czyli $f(x)[f(-x) - x] = 0$ dla każdego x . Wystarczy więc sprawdzić, że te funkcje się nie mieszają. W tym celu niech $f(a) = -a$ oraz $f(b) = 0$. Podstawienia $x = a, y = b$ oraz $x = b, y = a$ prowadzą do sprzeczności. Zatem mamy dwie trzy funkcje spełniające warunki zadania: $f(x) = -x$, $f(x) = 2 - x$ oraz $f(x) = 0$. Łatwo sprawdzić, że wszystkie te funkcje faktycznie spełniają wyjściowe równanie.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym I to środek okręgu wpisanego oraz D to punkt przecięcia prostej AI z okręgiem opisanym na ABC . Punkt E leży na okręgu opisanym na ABC , punkt F leży na odcinku BC oraz są takie, że zachodzi

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC$$

Punkt M jest środkiem odcinka FI . Wykazać, że proste DM oraz EI przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Rozwiązanie:

Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle MDI = \sphericalangle IEA$. Zachodzi $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAC$, więc $\sphericalangle FAI = \sphericalangle IAE$. Niech J będzie środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC . Wtedy na mocy Lematu o CZwórliściu mamy, że D jest środkiem odcinka IJ , więc $\sphericalangle MDA = \sphericalangle FJD$. Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle FJA = \sphericalangle IEA$, czyli że FAJ jest podobny do IEA . Łatwo widać, że $AF \cdot AE = AB \cdot AC = AI \cdot AJ$, co kończy dowód.

5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Okrąg ω o środku w punkcie O jest opisany na

trójkącie ABC . Proste AD oraz CD przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M oraz N . Wykazać, że proste BO oraz MN są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Wystarczy wykazać, że B leży na symetralnej BO . Zauważmy, że $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle BMC = \sphericalangle NMA$. Analogicznie $\sphericalangle MNC = \sphericalangle AMB$, Zatem $\sphericalangle BNM = \sphericalangle BMN$, co kończy dowód.

6. Kwadrat o boku długości 1 pokryto m^2 prostokątami. Dowieść, że obwód pewnego z tych prostokątów jest większy lub równy $\frac{4}{m}$.

Rozwiązanie:

Pole $P = ab$ i obwód $p = 2(a + b)$ prostokąta o bokach długości a, b związane są nierównościami

$$p^2 = 4(a + b)^2 = 4((a - b)^2 + 4ab) \geq 16P$$

Gdyby więc każdy z rozważanych m^2 prostokątów miał obwód mniejszy od $\frac{4}{m}$, to pole każdego z nich byłoby mniejsze od $\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{4}{m}\right)^2$ (czyli od $\frac{1}{m^2}$), a więc suma ich pól byłaby mniejsza od 1 - wbrew założeniu, że pokrywają one kwadrat jednostkowy.

7. Rozwiązać równanie

$$p^3 + 5n - 1 = n(p^2 + 2p + 6n)$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, a n liczbą całkowitą dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozpatrując równanie modulo p dostajemy, że $p \mid (2n-1)(3n-1)$. Zatem $p \mid 2n-1$ lub $p \mid 3n-1$. W pierwszym przypadku $2n-1 = pk$, czyli wstawiając $n = \frac{pk-1}{2}$ dostajemy równanie kwadratowe

$$(2-k)p^2 - p(3k^2 + 2k + 1) - 2 - k = 0$$

To równanie ma mieć rozwiązania w liczbach całkowitych, więc Δ musi być kwadratem liczby całkowitej. Łatwo zauważyć, że dla $k > 2$ zachodzi

$$(3k^2 + 2k)^2 < \Delta < (3k^2 + 2k + 1)^2$$

Zatem wystarczy sprawdzić $k = 1, 2$. Jeśli $3n-1 = pk$, to postępujemy analogicznie. Wtedy

$$(3-k)p^2 - p(2k^2 + 2k + 1) + k - 2 = 0$$

Analogicznie po przeliczeniach zachodzi

$$(2k^2 + 2k + 1)^2 < \Delta < (2k^2 + 2k + 2)^2$$

dla $k > 3$. Sprawdzamy wszystkie przypadki i dostajemy, że jedyne rozwiązanie to $p = 13, n = 9$.

8. Niech $n > 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, które spełniają równania

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, \quad \text{oraz} \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1.$$

Udowodnić, że

$$a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \dots + a_{n-1}(b_{n-1} + a_n) + a_n(b_n + a_1) < 1.$$

Rozwiązanie:

Chcemy udowodnić, że $S = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + a_n a_1$ jest mniejsze od 1.

Zauważmy, że $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + a_n a_1 < \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2}$. Zatem $S < \sum_{i=1}^n a_i b_i + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2}$. Dalej mamy: $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 > 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i > 0$. $\sum_{i=1}^n a_i b_i < \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2}$. Podstawiając otrzymujemy $S < \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2} + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2} \rightarrow S < 1$ **9.** Znaleźć wszystkie

liczby rzeczywiste (x, y) , $x \neq y$ takie, że

$$x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$$

$$x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedynymi możliwymi rozwiązaniami są pary $(2, 0)$ i $(0, 2)$. Oczywiście jest, że spełniają one warunki zadania. Bez straty ogólności przypuśćmy, że $x > y$. Jeśli jedna z x, y jest równa 0, to druga jest równa 2. Zatem bez straty ogólności x, y są niezerowe. Jeśli $x > 0 > y$, to wtedy $\frac{x^{100}-y^{100}}{x-y} < x^{99}$, więc $x^{99} > 2^{99} \Rightarrow x > 2$. Wtedy $x^{100} + y^{100} = \frac{x^{200}-y^{200}}{x^{100}-y^{100}} = 2^{100}$ jest sprzeczne, więc $x > y > 0$ lub $0 > x > y$.

Zauważmy, że $(x^{99} + y^{99})^{100} > (x^{100} + y^{100})^{99}$. Wynika to z tego, że $|x^{99}| > x^{100}, |y^{99}| > y^{100}$ implikuje $|x^{99} + y^{99}| > |x^{100} + y^{100}| = 1$.

Zatem $(x^{99} + y^{99})^{100} > (2^{100})^{99} \Rightarrow |x^{99} + y^{99}| > 2^{99}$. Jest to sprzeczność, gdyż $x^{99} + x^{98}y + \dots + xy^{98} + y^{99} = 2^{99}$, co kończy dowód.

10. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Udowodnić, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF .

Rozwiązanie:

Przypuśćmy bez straty ogólności, że $AB \geq AD$. Oznaczmy przez P punkt symetryczny do B względem prostej AE , a przez Q punkt symetryczny do D względem prostej AF . Ponieważ $\sphericalangle PAE + \sphericalangle QAF = \sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = 90 - \sphericalangle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle EAF$, więc punkty A, P, Q leżą na jednej prostej. Ponadto $AQ = AD \leq AB = AP$, a więc punkt Q leży na odcinku AP .

Ponieważ $\sphericalangle APE = \sphericalangle ABE = 90^\circ = \sphericalangle ADF = \sphericalangle AQF$, więc odcinki PE oraz QF są równoległe. Wiemy także, że $PE = BE = DF = QF$, wobec czego czworokąt $EPFQ$ jest równoległobokiem. W szczególności wynika z tego, że pola trójkątów QEF oraz QEP są równe. Oznaczając przez $[F]$ pole figury F , uzyskujemy

$$[AEF] = [AQE] + [QEF] + [AQF] = [AQE] + [QEP] + [AQF] = [APE] + [AQF]$$

Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że

$$[APE] = [ABE]$$

$$[AQF] = [ADF]$$

gdyż są to pary trójkątów przystających. W związku z tym

$$[AEF] = [ABE] + [ADF]$$

co należało wykazać.

11. Dany jest zbiór S , w którym jest 6 różnych liczb rzeczywistych dodatnich. Ponadto jeśli $a, b \in S$ oraz $a > b$, to $a + b \in S$ lub $a - b \in S$. Wykazać, że elementy S tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz $a > b > c > d > e > f > 0$. Zauważmy, że $a + i > a$ dla każdego i należącego do S . Zatem $a - i \in S$

dla każdego i . Ponadto $a > a - f > a - e > a - d > a - c > a - b$, więc $a - f = b$, $a - e = c$, $a - d = d$, $a - c = e$, $a - b = f$. Mając $a = 2d$ i postępując analogicznie dostajemy, że a, b, c, d, e, f tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy f .

12. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej c , niech $p(c)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym c . Ciąg $\{a_n\}$ dodatnich liczb całkowitych spełnia $a_1 > 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + p(a_n)$ dla wszystkich $n \geq 1$. Udowodnić, że w ciągu $\{a_n\}$ istnieje przynajmniej jeden kwadrat liczby całkowitej dodatniej.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $p(a_n) \mid a_{n+1}$. Zatem $p(a_{n+1}) \geq p(a_n)$. Zauważmy, że $p(a_n)$ może być dowolnie duże gdy n rośnie.

Niech $a_n = b(a_n)p(a_n)$. Oczywiście jest, że $p(a_{n+1}) > p(a_n)$, zatem $b(a_n) + 1 \geq \frac{(b(a_n)+1)p(a_n)}{p(a_{n+1})} = b(a_{n+1})$. Oraz Jeśli $p(a_{n+1}) = p(a_n)$, to $b(a_{n+1}) = b(a_n) + 1$.

Zatem ciąg $\{b(a_n)\}$ nie może "przeskoczyć" nad jakąkolwiek liczbą całkowitą. Ponadto jest on nieograniczony: Przypuśćmy, że $\{b(a_n)\}$ jest ograniczony. Wtedy dla dostatecznie dużego N mamy: $p(a_N) > \max\{b(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Co jest sprzeczne, gdyż $b(a_{N+1}) = b(a_N) + 1 > \max\{b(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zatem $\{b(a_n)\}$ jest nieograniczony i osiąga każdą dostatecznie dużą liczbę całkowitą. Zatem dla pewnego N będziemy mieć b_N pierwsze. Wynika z tego, że albo $b(a_N)^2$ albo $p(a_N)^2$ wystąpi w ciągu, co kończy dowód. **13.** Rozwiązać równanie w

liczbach całkowitych nieparzystych

$$y^4 - 144 = x^{57} + 25$$

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że istnieją takie liczby x, y . Wówczas lewa strona równania jest parzysta oraz lewa jest nieparzysta. Otrzymana sprzeczność świadczy o tym, że to równanie nie ma rozwiązań.

14. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x tożsamość

$$(x-1) \cdot W(x+1) = (x+3) \cdot W(x-1)$$

Rozwiązanie:

Dla $x := 1$ otrzymujemy $0 \cdot W(2) = 4 \cdot W(0)$, a więc $W(0) = 0$. Z kolei dla $x := -3$ otrzymujemy $-4 \cdot W(-2) = 0 \cdot W(-4)$, a więc $W(-2) = 0$.

Zatem z twierdzenia Bezouta wiemy, że istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że $W(x) = x(x+2)Q(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Podstawiając teraz do wyjściowego równania dostajemy

$$(x-1)(x+1)(x+3)Q(x+1) = (x+3)(x-1)(x+1)Q(x-1),$$

a więc dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od $-3, -1, 1$ otrzymujemy równość $Q(x+1) = Q(x-1)$.

Podstawiając kolejno $x := 0, 2, 4, 6, \dots$ otrzymujemy równość $Q(-1) = Q(1) = Q(3) = Q(5) = \dots$ i analogicznie dla $x := 0, -2, -4, -6, \dots$ mamy $Q(1) = Q(-1) = Q(-3) = Q(-5) \dots$. Wielomian, który w nieskończenie wielu miejscach przyjmuje tę samą wartość jest wielomianem stałym. Zatem $Q(x) \equiv a$ dla pewnej liczby rzeczywistej a .

Stąd więc $W(x) = ax(x+2)$. Sprawdzenie, że jest to rozwiązanie wyjściowego równania jest natychmiastowe. $\square$

15. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F , przy czym $FA = FE$ oraz $FB = FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E .

Rozwiązanie:

Niech K i L będą spodkami wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B oraz niech H będzie punktem przecięcia tych wysokości. Odbijmy symetrycznie punkt A względem punktu L oraz punkt B względem punktu K , otrzymując odpowiednio punkty M oraz N . Wówczas proste AK i BL są symetralnymi odpowiednio odcinków BN i AM . Punkt B leży na symetralnej odcinka AM , więc trójkąt ABM jest równoramienny. Ponadto trójkąty równoramienne AFE i ABM mają wspólny kąt między ramieniem a podstawą przy wierzchołku A . W rezultacie są one jednokładne względem tego wierzchołka. Analogicznie trójkąty BFD i BAN są jednokładne względem punktu B . Stąd uzyskujemy równości stosunków

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FB} = \frac{ND}{DB}$$

Z drugiej strony, punkt H leży na symetralnych odcinków AM i BN . Zatem trójkąty AHM i NHB są równoramienne. Co więcej, miary ich kątów między ramieniem a podstawą są równe, gdyż

$$\sphericalangle HAM = \sphericalangle KAC = 90^\circ - \sphericalangle BCA = \sphericalangle LBC = \sphericalangle HBN$$

W efekcie trójkąty te są podobne. Podobieństwo, które przeprowadza wierzchołki A, H, M odpowiednio na wierzchołki N, H, B , przekształca punkt E na punkt D . Wobec tego $\sphericalangle HEM = \sphericalangle HDB$, czyli $\sphericalangle HEC = 180^\circ - \sphericalangle HDC$. Na czworokącie $HDCE$ można więc opisać okrąg, co kończy rozwiązanie.

16. Układ liczb całkowitych dodatnich $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach $c_1, c_2, \dots, c_n$ można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny. Uwaga: Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.

Rozwiązanie:

Niech $p_1, p_2, \dots, p_n$ oraz $q_1, q_2, \dots, q_n$ będą dwoma zestawami odważników o ciężarach odpowiednio $c_1, c_2, \dots, c_n$. Wykażemy najpierw, że za pomocą tych dwóch zestawów możemy zważyć co najwyżej $\frac{1}{2}(5^n - 1)$ przedmiotów, niezależnie od tego, czy liczby $c_1, c_2, \dots, c_n$ tworzą układ dopuszczalny, czy nie. Ustawienie odważników na szalkach wagi nazwiemy optymalnym, jeśli dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ciężarki p_k i q_k nie znajdują się na dwóch różnych szalkach wagi. Aby otrzymać ustawienie optymalne, dwa odważniki p_k i q_k możemy ustawić na szalkach wagi na 5 sposobów. Zatem liczba wszystkich optymalnych ustawień odważników jest równa 5^n . W tej liczbie mieści się jedno ustawienie „puste”, w którym na żadną szalkę nie kładziemy odważników. Pozostałe ustawienia można połączyć w pary symetryczne, w których jedno ustawienie powstaje z drugiego przez zamianę zawartości obydwu szalek wagi. Tak więc liczba niepustych, istotnie różnych optymalnych ustawień odważników wynosi $\frac{1}{2}(5^n - 1)$, co oznacza, że możemy zważyć co najwyżej $\frac{1}{2}(5^n - 1)$ przedmiotów o różnych ciężarach. Załóżmy, że liczby $c_1, c_2, \dots, c_n$ tworzą układ dopuszczalny. Wówczas masa najcięższego przedmiotu, jaki można zważyć, wynosi $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Ponieważ nie da się zważyć więcej niż $\frac{1}{2}(5^n - 1)$ przedmiotów,

$$2(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \leq \frac{1}{2}(5^n - 1)$$

Wykażemy teraz, że liczby $c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 5^2, \dots, c_n = 5^{n-1}$ tworzą układ dopuszczalny. Dla tych wartości c_i zachodzi równość

$$2(c_1 + c_2 + \dots + c_n) = \frac{1}{2}(5^n - 1)$$

Należy więc udowodnić, że za pomocą dwóch kompletów odważników o ciężarach $1, 5, 5^2, \dots, 5^{n-1}$ można zważyć każdy przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $\frac{1}{2}(5^n - 1)$.

Niech c będzie dowolną liczbą naturalną nie przekraczającą $\frac{1}{2}(5^n - 1)$. Wówczas liczba $c + \frac{1}{2}(5^n - 1)$ jest mniejsza od 5^n . Liczbę tę można zatem zapisać w systemie piętkowym przy użyciu co najwyżej n cyfr. Innymi słowy

$$c + \frac{1}{2}(5^n - 1) = \sum a_i \cdot 5^i$$

gdzie $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ponieważ

$$\frac{1}{2}(5^n - 1) = 2(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1})$$

więc

$$c = \sum e_i \cdot 5^i$$

gdzie $e_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Powyższa równość oznacza, że przedmiot o ciężarze c można zważyć za pomocą dwóch kompletów odważników o ciężarach $1, 5, 5^2, \dots, 5^{n-1}$, co kończy dowód. Zatem maksymalna suma zbioru n liczb dopuszczalnych wynosi $\frac{1}{4}(5^n - 1)$.

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ które spełniają

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y .

Rozwiązanie:

Podstawiając $x = 0$ dostajemy $f(f(y)) = y + c^2$, gdzie $c = f(0)$ jest stałe. Na mocy tej równości, jeżeli dla pewnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi $f(a) = f(b)$, to $a + c^2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + c^2$, skąd $a = b$ i f jest iniekcją. Ponadto $y + c^2$ może przyjąć dowolną rzeczywistą wartość, a ponieważ $f(f(y)) = y + c^2$, to f jest suriekcją. Wiemy zatem, że istnieje liczba rzeczywista b taka, że $f(b) = 0$. Podstawiając $x := b$ i $y := f(y)$ w początkowej równości dostajemy $f(b^2 + f(f(y))) = f(b^2 + y + c^2) = f(y)$, skąd, jako że f to iniekcja, zachodzi $b^2 + y + c^2 = y$, skąd $b^2 + c^2 = 0$ i $b = c = 0$. Podstawiając w początkowym równaniu $x = 0$ dostajemy $f(f(y)) = y$. Podstawiając teraz $y := f(y)$ w początkowym równaniu dostajemy $f(x^2 + y) = f(y) + f(x)^2$. Ponieważ x^2 może przyjąć dowolną rzeczywistą nieujemną wartość, to równanie to implikuje, że f jest ściśle rosnąca. Wiemy jednak, że $f(f(y)) = y$. Załóżmy, że dla pewnego rzeczywistego y zachodzi $f(y) > y$. Wtedy, ponieważ f jest ściśle rosnąca, zachodzi $f(f(y)) > f(y) > y$, co rodzi sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że nie może zajść $f(y) < y$. Stąd $f(y) = y$ dla dowolnego rzeczywistego y , co, jak nietrudno sprawdzić, spełnia podane w zadaniu równanie.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty H, O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego. Symetralna odcinka AH przecina boki AB, AC w punktach odpowiednio P, Q . Wykazać, że $\sphericalangle POA = \sphericalangle AOQ$.

Rozwiązanie:

Znanym faktem jest, że $\sphericalangle BAH = \sphericalangle OAC$. to oznacza, że trójkąty równoramienne PAH i OAC są podobne. Stosując znany lemat o podobieństwie spiralnym (proste ćwiczenie) dostajemy, że trójkąty PAO oraz HAC są podobne, a co za tym idzie, $\sphericalangle POA = \sphericalangle HCA = 90^\circ - \sphericalangle BAC$. Analogicznie $\sphericalangle QOA = 90^\circ - \sphericalangle BAC$, co daje tezę.

3. Znajdź liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 2000\}$, których suma elementów jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że odpowiedzią jest $\frac{1}{5}(2^{2000} + 2^{402})$. Rozważmy wielomian $f(x) = (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2000})$. Istnieje bijekcja pomiędzy podzbiórmi $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ zbioru $\{1, 2, \dots, 2000\}$ a wyrażeniami $x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_m}$. Zatem liczbą, której szukamy, jest suma współczynników tego wielomianu przy x^{5k} gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Niech S będzie szukaną przez nas sumą.

Rozważmy liczbę $z = e^{2\pi i/5}$ będącą pierwiastkiem piątego stopnia z jedynki. Wtedy $z^5 = 1$ oraz $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. Stąd

$$S = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 f(z^j)$$

Liczby z, z^2, z^3, z^4 i z^5 są pierwiastkami wielomianu $g(x) = x^5 - 1$, czyli

$$g(x) = (x - z)(x - z^2)(x - z^3)(x - z^4)(x - z^5)$$

Stąd otrzymujemy

$$g(-1) = -2 = (-1 - z)(-1 - z^2)(-1 - z^3)(-1 - z^4)(-1 - z^5)$$

więc

$$(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^3)(1 + z^4)(1 + z^5) = 2$$

co implikuje $f(z) = 2^{400}$. Podobnie $f(z^k) = 2^{400}$ dla $k = 2, 3, 4$. Ponieważ $f(z^5) = f(1) = 2^{2000}$, to

$$S = \frac{1}{5}(4 \cdot 2^{400} + 2^{2000}) = \frac{1}{5}(2^{402} + 2^{2000})$$

4. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3. Liczba całkowita dodatnia n jest dobra, jeśli istnieją takie wielomiany f, g , że

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x).$$

Wykazać, że istnieje liczba dobra mniejsza od $p^p - 1$.

Rozwiązanie:

Wszystkie równości będą pisane modulo wielomian $x^p - x + 1$ w $\mathbb{Z}_p[x]$. Z faktu, że dla $0 < i < p$ mamy $p \mid \binom{p}{i}$ wynika, że $x^p = x - 1, x^{p^2} = (x^p)^p = (x - 1)^p = x^p - 1 = x - 2, x^{p^3} = (x^{p^2})^p = (x - 2)^p = x^p - 2^p = x - 3$ i w wersji ogólnej $x^{p^i} = x - i$, co dowodzimy indukcyjnie, tak jak zostało to pokazane na podanym przykładzie. Widzimy teraz, że $x^{1+p+p^2+\dots+p^{p-1}} = x \cdot x^p \cdot \dots \cdot x^{p^{p-1}} = x(x - 1) \dots (x - (p - 1)) = x^p - x = -1$, gdzie przedostatnia równość wynika z faktu, że po obu stronach są wielomiany stopnia p , które się zerują dla każdej reszty modulo p . Po podniesieniu do kwadratu widzimy, że liczba $2 \cdot \frac{p^p - 1}{p - 1}$ jest dobra, a to w połączeniu z warunkiem $p > 3$ kończy dowód.

5. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisujemy liczbę całkowitą, przy czym każda liczba jest wpisana co najwyżej raz. Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa pola tej szachownicy mające wspólny bok, że moduł różnicy liczb wpisanych w te pola jest większa od a .

Rozwiązanie:

Rozważmy dowolną szachownicę $n \times n$ na naszej szachownicy, Różnica pomiędzy największą a najmniejszą liczbą z tej szachownicy wynosi co najmniej $n^2 - 1$. Z drugiej strony, zarówno kolumny jak i wiersze, w których są te dwa pola są oddalone o co najwyżej $n - 1$, zatem istnieje ścieżka sąsiednich pól prowadząca z jednego z naszych pól do drugiego, która ma co najwyżej $2n - 1$ pól. Różnica skrajnych pól jest równa sumie różnic kolejnych pól ścieżki, więc pewna różnica wynosi przynajmniej $\frac{n^2-1}{2n-2}$, co może być dowolnie duże.

6. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Rozwiązanie:

Daną do udowodnienia nierówność przekształcamy równoważnie do postaci

$$\begin{aligned} \frac{1+abc}{a(1+b)} + \frac{1+abc}{b(1+c)} + \frac{1+abc}{c(1+a)} &\geq 3 \\ \frac{1+abc+a(1+b)}{a(1+b)} + \frac{1+abc+b(1+c)}{b(1+c)} + \frac{1+abc+c(1+a)}{c(1+a)} &\geq 6 \\ \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a} &\geq 6 \end{aligned}$$

ale lewa strona powyższej nierówności jest sumą 6 składników, których iloczyn wynosi 1, zatem wystarczy zastosować nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną.

7. Liczba pierwsza p spełnia warunek $7 \mid p - 1$. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita n , że $p \mid n^3 + n^2 - 2n - 1$.

Rozwiązanie:

Znajdziemy takie t , że $n = t + \frac{1}{t}$ spełnia żądany warunek (oczywiście rozumiane modulo p). Nasz warunek przyjmuje postać $p \mid t^3 + t^2 + \dots + \frac{1}{t^3} = \frac{t^7-1}{t^3(t-1)}$ o ile $p \nmid t - 1$. Wystarczy więc znaleźć takie t , że $t^7 - 1$ dzieli się przez p , ale $t - 1$ nie. Oznaczając przez g generator modulo p taką liczbą jest na przykład $g^{\frac{p-1}{7}}$.

8. Przekątne czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu przecinają się w punkcie P . Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABP, BCP, CDP, DAP leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Przypadek, gdy $ABCD$ jest deltoidem, jest oczywisty. Załóżmy więc, że tak nie jest. Niech $I_1, I_2, I_3, I_4, X, Y, Z, T$ będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $PAB, PBC, PCD, PDA, ABD, ABC, BCD, CDA$. Oznaczmy przez O

środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Ponieważ proste I_1X, I_2Z, OY przecinają się w punkcie B , więc trójkąty I_1YI_2 oraz XOZ mają środek perspektywiczny. Z twierdzenia Desarguesa wynika, że mają też oś perspektywiczną. To oznacza, że punkty przecięcia par prostych $(I_1Y, OX), (I_2Y, OZ), (I_1I_2, ZX)$ leżą na jednej prostej. Wobec tego proste I_1I_2, XZ i AC przecinają się w jednym punkcie. Analogicznie dowodzimy, że proste I_3I_4, AC i XZ są współpękowe. Ostatecznie, proste I_1I_2, I_3I_4 przecinają się w punkcie Q leżącym na prostej AC . Prosty rachunek odcinków pokazuje, że okręgi wpisane w trójkąty ABC, ADC są styczne do boku BC w tym samym punkcie. Nazwijmy go R . Korzystając z zadania 6 z Mszany 2006 dostajemy, że czwórki punktów I_1, I_2, R, P oraz I_3, I_4, R, P leżą na jednym okręgu. Z potęgi punktu dostajemy teraz $QI_1 \cdot QI_2 = QP \cdot QR = QI_3 \cdot QI_4$, co daje tezę.

9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia punktów przecięcia głównych przekątnych sześciokąta: $K = CF \cap AD, L = BE \cap CF, M = AD \cap BE$. Zauważmy, że trójkąt KLM (który może degenerować się do punktu) jest zawarty wewnątrz trójkątów ACE i BDF - punkty K, L, M leżą bowiem po tej samej stronie prostych AC, CE, EA , co trójkąt ACE , gdyż są punktami przecięcia odcinków, z których co najmniej jeden leży po odpowiedniej stronie.

Dla dowolnego trapezu $XYZT$ ($XY \parallel ZT$), którego przekątne przecinają się w punkcie U , prawdziwa jest równość pól trójkątów $[XYT] = [XYZ]$, a więc i równość pól $[XUT] = [YUZ]$. Stosując to spostrzeżenie do trapezów $ABDE, BCEF$ i $CDF A$ dostajemy

$$[AEM] = [BDM], \quad [CEL] = [BFL], \quad [ACK] = [FDK]$$

Dodając trzy powyższe równości stronami, a następnie dodając do obu stron wielkość $[KLM]$, otrzymujemy zależność $[ACE] = [BDF]$.

10. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest nierówność

$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} > \frac{3}{2}$$

(gdzie symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x)

Rozwiązanie:

Niech k będzie częścią całkowitą liczby $n\sqrt{7}$. Z niewymierności liczby $\sqrt{7}$ wynika, że $n\sqrt{7} > k$. Zatem liczba

$$n\sqrt{7} - k = \frac{7n^2 - k^2}{n\sqrt{7} + k}$$

jest dodatnia. Wobec tego $7n^2 - k^2 > 0$. Ponadto kwadraty liczb całkowitych mogą dawać reszty 0, 1, 2, 4 z dzielenia przez 7, więc liczba $7n^2 - k^2$ jest różna od 1 i 2.

Stąd otrzymujemy

$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} = n\sqrt{7}(n\sqrt{7} - k) = n\sqrt{7} \cdot \frac{7n^2 - k^2}{n\sqrt{7} + k} \geq \frac{3n\sqrt{7}}{n\sqrt{7} + k} > \frac{3n\sqrt{7}}{n\sqrt{7} + n\sqrt{7}} = \frac{3}{2}$$

11. Ciąg $a_0, a_1, \dots$ jest zdefiniowany w taki sposób, że a_0 jest dowolną liczbą rzeczywistą oraz $a_{i+1} = [a_i] \cdot \{a_i\}$. Wykazać, że istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ zachodzi równość $a_{i+2} = a_i$. *Rozwiązanie:*

Rozważmy najpierw przypadek $a_0 \geq 0$. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu są nieujemne. Jeśli dla pewnego i mamy $[a_i] \geq 1$, to $[a_{i+1}] \leq a_{i+1} = [a_i]\{a_i\} < [a_i]$. To oznacza, że wartości $[a_i]$ ściśle maleją do momentu, gdy ta wartość będzie równa 0. Wówczas wszystkie wyrazy od następnego są równe 0. Przejdźmy teraz do przypadku $a_0 < 0$. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu są niedodatnie. Widzimy, że $1 + [a_{i+1}] > a_{i+1} = [a_i]\{a_i\} > a_i$. To oznacza, że ciąg $[a_i]$ jest niemalejący. Jest on też ograniczony z góry przez -1 , i składa się z liczb całkowitych, więc od pewnego momentu jest stały. Niech więc N będzie takie, że dla dowolnego $n \geq N$ mamy $[a_i] = k$ dla pewnej stałej całkowitej k . Wówczas też dla $n > N$ mamy $a_{n+1} = [a_n]\{a_n\} = k(a_n - k) = ka_n - k^2$. Nietrudno sprawdzić, że wówczas ciąg $b_n = a_n - \frac{k^2}{k-1}$ spełnia zależność $b_{i+1} = kb_i$, czyli indukcyjnie można pokazać, że dla $m > n$ mamy $b_m = k^{m-N}b_N$. Zgodnie z naszym założeniem, ciąg a_i był od pewnego momentu zawarty w przedziale $[k, k+1)$, czyli z definicji ciągu b wnioskujemy, że on też jest ograniczony z obu stron. Z równości $b_m = k^{m-N}b_N$ widzimy, że $b_N = 0$ lub $k = -1$. W pierwszym przypadku ciąg b jest stale równy 0, więc ciąg a jest stały, co implikuje tezę zadania. W drugim przypadku widzimy, że $b_{m+2} = b_m$, czyli też $a_{m+2} = a_m$, co kończy dowód.

12. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Znajdź liczbę wielomianów $P(x)$ o współczynnikach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ spełniających $P(2) = n$.

Rozwiązanie:

Rozwiążemy to zadanie w ogólniejszym przypadku: Niech m i n będą dodatnimi liczbami całkowitymi, gdzie $m \geq 2$. Znajdziemy liczbę wielomianów $P(x)$ o współczynnikach z $\{0, 1, \dots, m^2 - 1\}$, dla których $P(m) = n$. Wielomiany takie będziemy nazywać *dobrymi*.

Niech $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, gdzie $a_k \in \{0, 1, \dots, m^2 - 1\}$ dla k całkowitych nieujemnych. Zauważmy, że każda z liczb a_k może być jednoznacznie zapisana w formie $b_k m + c_k$ dla $b_k, c_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Jeżeli P jest dobrym wielomianem, to zachodzi

$$n = P(m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k = mt + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k$$

gdzie $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$. Dla każdego t , $0 \leq t \leq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ istnieje dokładnie jeden sposób na zapisanie t w postaci $\sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$, jako że jest to zapis liczby t w systemie liczbowym

o podstawie m . Dla każdego tak wybranego t , istnieje dokładnie jeden sposób na zapisanie liczby $n - mt$ w postaci $\sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k$ (zapis $n - mt$ w systemie o podstawie m). W związku z tym istnieje bijekcja pomiędzy dobrymi wielomianami a liczbami t z przedziału $\{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor\}$, skąd istnieje dokładnie $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ dobrych wielomianów. W przypadku naszego zadania wystarczy wziąć $m = 2$, skąd $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ jest odpowiedzią.

13. Zdefiniujmy ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ następująco: $a_0 = 3$ oraz $a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1)$ dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n . Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie m , dla których $\text{NWD}(m, a_n) = 1$ dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n . *Rozwiązanie:*

Wykażemy indukcyjnie, że $a_n = 2 \cdot n! + 1$. Dla $n = 0$ $a_0 = 2 \cdot 0! + 1 = 3$. Gdy $a_n = 2 \cdot n! + 1$, to $a_{n+1} = a_n + n(a_n - 1) = 2n! + 1 + n(2n!) = 2n!(1 + n) + 1 = 2 \cdot (n+1)! + 1$, co kończy dowód indukcyjny. Zauważmy, że wszystkie liczby a_i są nieparzyste, w związku z tym $m = 2^t$ dla t całkowitego nieujemnego spełnia $\text{NWD}(m, a_i) = 1$ dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych i . Rozpatrzmy teraz liczby m , które nie są tej postaci; wtedy istnieje nieparzysta liczba pierwsza p dzieląca m . Na mocy tw. Wilsona $p|(p-1)! + 1$, więc liczba $a_{p-3} = 2 \cdot (p-3)! + 1 = (-1)(-2)(p-3)! + 1 \equiv (p-1)(p-2)(p-3)! + 1 = (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, więc $p|a_{p-3}$ i $\text{NWD}(m, a_{p-3}) \neq 1$. W związku z tym jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są $m = 2^t$ dla t całkowitego nieujemnego.

14. Na tablicy napisane są liczby całkowite 1000, 1001, $\dots$, 2999. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb a, b znajdujących się w danym momencie na tablicy, zmazaniu ich oraz napisaniu na tablicy liczby $\frac{1}{2} \min(a, b)$. Wykazać, że w wyniku wykonania dowolnych 1999 ruchów na tablicy pozostanie liczba mniejsza niż 1.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że z oczywistej dla $x, y > 0$ nierówności $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{\min(x, y)}$ wynika, że suma odwrotności liczb napisanych na tablicy nie maleje w wyniku wykonania ruchu. Wystarczy więc wykazać, że suma odwrotności początkowego układu liczb jest większa niż 1. Zauważmy jednak, że dla $1 \leq k \leq 1000$

$$\frac{1}{2000 - k} + \frac{1}{2000 + k} = \frac{4000}{2000^2 - k^2} > \frac{4000}{2000^2} = \frac{1}{1000}.$$

Zatem po dodaniu liczby $\frac{1}{2000}$ i odjęciu liczby $\frac{1}{3000}$ dostajemy, że suma odwrotności początkowego układu wynosi co najmniej $1 + \frac{1}{2000} - \frac{1}{3000} > 1$ i dowód jest zakończony.

15. Symetralna odcinka BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q , przy czym A i P leżą po tej samej stronie prostej BC . Niech S będzie środkiem odcinka AQ oraz niech R będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC . Wykaż, że punkty B, S, R, A leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności załóżmy, że $AB < AC$. Jeżeli $AB = AC$, to $A = P = R$ i $S = O$. Ponieważ w tej sytuacji $\angle ACB < 90^\circ$, to punkty A, B, O nie są współliniowe,

więc muszą leżeć na jednym okręgu i teza zadania jest prawdziwa. W przypadku $AB > AC$ dowód przebiega analogicznie.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Wtedy odcinek PQ zawiera punkt O i $OS \perp AQ$. Ponieważ $\sphericalangle PCR = \sphericalangle OQS$, to trójkąty prostokątne PRC i OSQ są podobne. Ponadto $PB = PC$, $OB = OQ$ oraz

$$\sphericalangle BOQ = 2\sphericalangle BCQ = 2\sphericalangle QPC = \sphericalangle BPC$$

więc trójkąty OBQ i PBC są również podobne.

Na mocy powyższych podobieństw możemy wywnioskować, że czworokąty $OSBQ$ i $PRBC$ są podobne. W szczególności $\sphericalangle BSQ = \sphericalangle BRC$, więc

$$\sphericalangle ARB = 180^\circ - \sphericalangle BRC = 180^\circ - \sphericalangle BSQ = \sphericalangle ASB$$

skąd $ABSR$ jest czworokątem cyklicznym.

16. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej a zachodzi nierówność

$$a^{a^2} + a^{2a} > 1$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność Bernoulliego, która mówi, że dla liczby rzeczywistej $x \geq -1$ zachodzi

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \text{ dla } 0 < \alpha \leq 1$$

oraz

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \text{ dla } \alpha \geq 1$$

przy czym dla $\alpha = 1$ w powyższych nierównościach zachodzą równości, natomiast dla $\alpha \neq 1$ równości w powyższych nierównościach zachodzą jedynie dla $x = 0$.

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$a^b + b^a > 1$$

Nierówność ta natychmiast pociąga za sobą tezę zadania: wystarczy przyjąć $b = a^2$.

Jeżeli $a \geq 1$ lub $b \geq 1$, to nierówność zachodzi w sposób oczywisty. Przypuśćmy zatem, że $a, b \in (0, 1)$. Udowodnimy, że

$$a^b > \frac{a}{a+b}, \quad b^a > \frac{b}{a+b}.$$

Ze względu na symetrię wystarczy udowodnić tylko pierwszą z tych nierówności. Na mocy nierówności Bernoulliego,

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{b}} > 1 + \frac{1}{a} > \frac{1}{a}.$$

Wystarczy już tylko obie strony podnieść do potęgi b .

Zawody indywidualne elity

1. Okręgi Ω_1 i Ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 są styczne zewnętrznie w punkcie T oraz są styczne do ich wspólnej stycznej zewnętrznej ℓ w punktach A i B , odpowiednio. Okrąg Ω_3 o środku w punkcie O_3 jest styczny do Ω_1 , Ω_2 oraz do prostej ℓ w punkcie D tak, że Ω_3 znajduje się wewnątrz trójkąta ATB . Prosta TD przecina Ω_1 w punkcie C . Udowodnić, że $O_1C \parallel AB$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez r_1 , r_2 , r_3 promienie okręgów Ω_1 , Ω_2 i Ω_3 odpowiednio. Niech X będzie punktem przecięcia O_1O_2 z AB . Wystarczy pokazać, że $XT = XD$, gdyż wtedy z równości $O_1T = O_1C$ dostajemy równoległość z tezy.

Niech XA przecina Ω_1 w punkcie $Z \neq T$. Ponadto niech $XA = t$ i $\frac{r_2}{r_1} := k$. Wtedy $XT \cdot XZ = t^2$ oraz $\frac{XZ}{XT} = \frac{1}{k}$, czyli $XT = t\sqrt{k}$. Ponadto $XB = k \cdot XA = kt$ i $AB = XB - XA = (k - 1)t$. Łatwo zauważyć, że $AD = 2\sqrt{r_1 r_3}$ oraz $BD = 2\sqrt{r_2 r_3}$. Zatem $\frac{BD}{AD} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{k}$, czyli

$$XD = XA + AD = XA + AB \cdot \frac{AD}{AD + BD} = t + t(k - 1) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{k}} = t\sqrt{k},$$

więc $XT = XD = t\sqrt{k}$. □

2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$, wielomian

$$2 \left(1 + X^{\frac{p+1}{2}} + (1 - X)^{\frac{p+1}{2}} \right)$$

przystaje modulo p do kwadratu pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Niech

$$g(X) := \frac{2}{X} \left(1 + X^{\frac{p+1}{2}} - (1 - X)^{\frac{p+1}{2}} \right).$$

łatwo zauważyć, że g jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wtedy w $\mathbb{F}_p[X]$ mamy

$$f(X)g(X) = \frac{4}{X} \left(\left(1 + X^{\frac{p+1}{2}} \right)^2 - (1 - X^{p+1})^2 \right) = \frac{4}{X} \left(1 + 2X^{\frac{p+1}{2}} + X^{p+1} - (1 - X)(1 - X^p) \right)$$

Wystarczy teraz pokazać, że f i g są względnie pierwsze w $\mathbb{F}_p[X]$. Gdyby miały wspólny pierwiastek x_0 , to

$$f(x_0) \equiv g(x_0) \equiv 0 \pmod{p},$$

więc

$$f(x_0) - x_0 g(x_0) = 4(1 - x_0)^{\frac{p+1}{2}}$$

jest podzielne przez p , skąd $x_0 \equiv 1 \pmod{p}$, czyli $f(x_0) \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{p}$. $\square$

3. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że w dowolnym grafie mającym $2n + 1$ wierzchołków i co najmniej k krawędzi, istnieje cykl (zamknięta ścieżka bez samoprzecięć) mający parzystą liczbę krawędzi.

Rozwiązanie:

Pokażemy że jeśli graf ma $2n + 1$ wierzchołków i co najmniej $3n + 1$ krawędzi to posiada cykl mający parzystą liczbę krawędzi.

Pokażemy indukcyjnie, że jeśli graf ma n wierzchołków i $f(n) = \left\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \right\rfloor + 1$ krawędzi, to istnieje nieparzysty cykl. Dla $n = 1$ jest to prawda.

Przypuśćmy, że pokazaliśmy to dla $n - 1$ wierzchołków, gdzie $n \geq 2$. Jeśli nasz graf ma n wierzchołków i $f(n)$ krawędzi oraz wierzchołek stopnia ≤ 1 , to usuwając go możemy wykorzystać założenie indukcyjne.

Założmy że istnieją połączone wierzchołki u i v stopnia 2. Niech u jest połączony z u_1 i v oraz v jest połączony z u i v_1 . Jeśli istnieje krawędź $u_1 v_1$ to mamy 4-cykl. W przeciwnym wypadku usuwamy wierzchołki u i v i dokładamy krawędź $u_1 v_1$. Z założenia indukcyjnego znajdujemy w nowym grafie parzysty cykl. Jeśli ten cykl używa krawędzi $u_1 v_1$ to staje się on cyklem z dodatkowymi dwoma wierzchołkami w G , ale nadal parzystej długości.

Niech $P = v_1 v_2 \dots v_m$ będzie najdłuższą ścieżką w G . Istnieją $v_1 v'_1$ i $v_n v'_n$ że v'_1 i $v'_n \in P$ gdyż $\deg(v_1), \deg(v_n) \geq 2$ i P jest maksymalną ścieżką. Mamy dwa przypadki:

- Jeśli $\deg(v_1) \geq 3$, to istnieje inna krawędź $v_1 x$, gdzie $x \in P$ i $x \neq v'_1$. Wtedy krawędzie $v_1 x$, $v_1 v'_1$ i ścieżki z v_1 do v'_1 i z v_1 do x . Tworzą one cykl z cięciwą, więc mamy parzysty cykl.
- Jeśli $\deg(v_1) = 2$, wtedy $\deg(v_2) \geq 3$, czyli istnieje krawędź $v_2 y$. Jeśli $y \in P$, to znajdujemy znów cykl z cięciwą jak wyżej. Jeśli $y \notin P$, to jego stopień nie może być równy 1, jednak gdyby y był połączony z $z \notin P$, to mielibyśmy sprzeczność z maksymalnością P . Zatem $z \in P$. Wtedy krawędzie $v_1 v'_1$, $v_2 y$, yz i ścieżki z v_1 do któregośkolwiek najdalszego od wierzchołka między z i v'_1 tworzy cykl z cięciwą, skąd teza.

$\square$

4. Dany jest ciąg liczb całkowitych $(a_n)_{n \geq 1}$ zdefiniowany następująco:

$$a_1 = 1 \text{ oraz } a_{n+1} = 2^n(2^{a_n} - 1) \text{ dla } n \geq 1.$$

Udowodnić, że $n! \mid a_n$ dla wszystkich $n \geq 1$.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że dla wszystkich liczb pierwszych $p \leq n+1$, mamy $v_p(a_n) \geq n-p+1$. Oczywiście implikuje to tezę zadania gdyż

$$v_p(n!) \leq \frac{n-1}{p-1} \leq n-p+1 \leq v_p(a_n).$$

Dla $n=1$ jest to prawdą. Załóżmy że jest to prawdziwe dla n i pokażemy dla $n+1$. Niech $p \leq n+2$ będzie liczbą pierwszą. Pokażemy, że $v_p(a_{n+1}) \geq n-p+2$. Jeśli $p = n+2$, to mamy tezę, więc $p \leq n+1$. Dla $p=2$ jest to jasne, więc niech $p > 2$.

Wiemy, że $n! \mid a_n$, w szczególności $p-1 \mid a_n$. Na podstawie LTE oraz MTF mamy

$$v_p(a_{n+1}) = v_p(2^{a_n} - 1) = v_p((2^{p-1})^{\frac{a_n}{p-1}} - 1) \geq v_p(2^{p-1} - 1) + v_p\left(\frac{a_n}{p-1}\right) \leq 1 + v_p(a_n) \geq 1 + n - p + 1$$

□

5. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Punkty M i N leżą na odcinku BC , przy czym N leży na odcinku BM . Odcinki AM i DN przecinają się w punkcie X . Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty NMX , ADX , ABM i CDN leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech J_1 , J_2 , J_3 i J_4 oznaczają środki okręgów wpisanych w trójkąty NMX , ADX , ABM i CDN , odpowiednio. Wystarczy pokazać, że

$$\sphericalangle J_3 J_1 J_4 + \sphericalangle J_3 J_2 J_4 = 180^\circ.$$

Ponieważ MJ_1 i NJ_1 są dwusiecznymi kątów w trójkącie MXN , to $J_1 J_3$ i $J_1 J_4$ są dwusiecznymi kątów przy M i N , więc

$$\sphericalangle J_3 J_1 J_4 = \sphericalangle M J_1 N = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle MXN = \sphericalangle J_3 J_1 J_4.$$

Zatem wystarczy pokazać, że $\sphericalangle A J_2 D + \sphericalangle J_3 J_2 J_4 = 180^\circ$ lub inaczej: J_2 posiada punkt izogonalnie sprzężony w czworokącie $A J_3 J_4 D$.

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Wtedy $\sphericalangle AIB + \sphericalangle CID = 180^\circ$, czyli $\sphericalangle M I J_3 + \sphericalangle J_4 I D = 180^\circ$. Ostatnia równość oznacza, że I posiada punkt izogonalnie sprzężony w czworokącie $A J_3 J_4 D$. Ponadto,

$$\sphericalangle J_2 A D = \frac{1}{2} \sphericalangle M A D = \frac{1}{2} \sphericalangle B A D - \frac{1}{2} \sphericalangle B A M = \sphericalangle B A I - \sphericalangle B A J_3 = \sphericalangle I A J_3.$$

Podobnie pokazujemy równość $\sphericalangle J_2 D A = \sphericalangle I D J_4$. Dlatego, punktem izogonalnie sprzężonym punktem do punktu I w czworokącie $A J_3 J_4 D$ to punkt J_2 , i odwrotnie.

□

6. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k dla których istnieje funkcja $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ taka, że

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + k$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n .

Rozwiązanie:

7. Niech f będzie niestałym wielomianem o współczynnikach całkowitych i niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że

$$f(n) = d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_{k+1},$$

gdzie $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k < n$ są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Bez szkody załóżmy, że f ma dodatni współczynnik przy najwyższej potędze. Zauważmy, że $f(x + f(x)) = f(x)g(x)$ dla pewnego wielomianu g o współczynnikach całkowitych. Niech $h(x) := x + f(x)$. Wtedy

$$f\left(h^{(m)}(x)\right) = f(x)g(x)g(h(x)) \cdot \dots \cdot g(h^{(m-1)}(x)).$$

Jeśli $\deg f = s$, to stopnie powyższych wielomianów to odpowiednio $s, s^2 - s, s^3 - s^2, \dots, s^m - s^{m-1}$. Zatem jeśli $s \geq 2$, to dla odpowiednio dużego t mamy

$$g(t) < g(h(t)) < \dots < g(h^{(m-1)}(t)).$$

Niech teraz $m = k + 1, n = h^{(k+1)}(t), d_1 = g(t), d_2 = g(h(t)), \dots, d_k = g(h^{(k)}(t))$ i $d_{k+1} = g(h^{(k)}(t)) \cdot f(t)$. Łatwo zauważamy, że spełniają one warunki zadania.

Jeśli $s = 1$, to $f(x) = ax + b$. Biorąc parami względnie pierwsze d_i takie że $\text{nwd}(d_i, a)$ i korzystając z Chińskiego Twierdzenia o Resztach widzimy, że układ $am + 1 \equiv 0 \pmod{d_i}$ ma rozwiązanie. Biorąc $n = mb$ mamy że $f(n) = b(1 + am)$ jest wielokrotnością $d_1 d_2 \cdot d_k$.

8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy $n \geq p$ liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$. Definiujemy: $f_0 = 1$ oraz f_k oznacza liczbę k -elementowych podzbiorów $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$, że $p \mid \sum_{i \in B} a_i$. Udowodnić, że

$$p \mid f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^n f_n.$$

Rozwiązanie:

Dodając do wszystkich a_i odpowiednią dużą wielokrotność p , możemy założyć, że $a_i > 0$. Rozpatrzmy resztę z dzielenia

$$f(X) := (1 - X^{a_1})(1 - X^{a_2}) \dots (1 - X^{a_n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{B \subset A, \#B=k} X^{m(B)} \in \mathbb{F}_p[X]$$

przez $X^p - 1$, gdzie $m(B)$ oznacza sumę elementów w B .

Założenie $n \geq p$ i fakt że $1 - X \mid 1 - X^{a_i}$ implikuje, że $1 - X^p = (1 - X)^p$ dzieli $f(X)$. Z drugiej strony $X^N \equiv X^M \pmod{X^p - 1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N \equiv M \pmod{p}$, więc

$$0 \equiv f(X) \equiv \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\#B=k, m(B) \equiv j \pmod{p}} 1 \right) X^j \pmod{X^p - 1}.$$

Wobec tego wyraz wolny $f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^n f_n$ powyższego wielomianu jest równy 0 w $\mathbb{F}_p$. $\square$

9. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ABC . Niech P będzie dowolnym punktem. Prosta AP przecina Ω w punkcie $D \neq A$. Oznaczmy przez E i F punkty przecięcia BP i CP z CA i AB , odpowiednio. Załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie AEF przecina Ω w punkcie $M \neq A$. Styczne do Ω w punktach B i C przecinają się w punkcie T . Niech $U \neq D$ będzie drugim punktem przecięcia TD z Ω . Udowodnić, że obraz U w symetrii względem prostej BC leży na okręgu opisanym na trójkącie DMP .

Rozwiązanie:

Niech: $\odot(\mathcal{C})$ oznacza okrąg opisany na wielokącie $\mathcal{C}$, V oznacza obraz punktu U w symetrii względem BC , X to przecięcie BC z EF , i niech Y, Z będą drugimi punktami przecięcia BE, CF z $\odot(CEM)$ $\odot(BFM)$, odpowiednio. Ponieważ M jest punktem Miquela $BCEF$, to X leży na $\odot(BFM), \odot(CEM)$. Zauważmy, że $BDCU$ jest harmoniczny, więc $A(B, C; D, U) = -1 = A(B, C; P, X)$, skąd $X \in AU$.

Ponadto

$$\sphericalangle BYX = \sphericalangle ACB = \sphericalangle XUB = \sphericalangle BVX,$$

więc $X \in \odot(BVY)$. Podobnie X leży na $\odot(CVZ)$, więc

$$\sphericalangle YVZ = \sphericalangle YVX + \sphericalangle XVZ = \sphericalangle YBX + \sphericalangle XCZ = \sphericalangle YPZ,$$

zatem punkty P, V, Y, Z leżą na okręgu. Z drugiej strony z równości $\sphericalangle MYP = \sphericalangle MCA = \sphericalangle MDP$ wynika, że $Y \in \odot(DMP)$. Podobnie, Z leży na $\odot(DMP)$, zatem punkty D, M, P, V, Y, Z leżą na jednym okręgu. **10.** Dane są liczby rzeczywiste

$a, b, c, d \in [\frac{1}{2}, 2]$ takie, że $abcd = 1$. Znaleźć maksymalną wartość wyrażenia

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że przy założeniu $abcd = 1$ mamy

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{d}{b}} + \sqrt{\frac{b}{d}}\right)^2.$$

A ponieważ $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in [\frac{1}{4}, 4]$, to

$$\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{\frac{d}{b}} + \sqrt{\frac{b}{d}} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Zatem

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right) \leq 25,$$

przy czym równość zachodzi na przykład dla $a = 2, c = \frac{1}{2}, b = 2, d = \frac{1}{2}$.

11. Niech $\mathcal{S}$ będzie skończonym zbiorem punktów mający parzystą liczbę elementów i żadne trzy punkty w nim nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że $\mathcal{S}$ może być podzielone na dwa zbiory $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ takie, że ich otoczki wypukłe mają równą liczbę wierzchołków.

Rozwiązanie:

Niech $k(X)$ będzie liczbą wierzchołków otoczki wypukłej $\text{conv}(X)$ zbioru X . Niech $A = A_1 A_2 \dots A_n = \text{conv}(\mathcal{S})$, i niech T będzie zbiorem punktów w $\mathcal{S}$, które leżą wewnątrz A . Niech $X_1 = \{A_1, \dots, A_i\} \cup T, Y_i = \{A_{i+1}, \dots, A_n\}$.

Niech i będzie minimalnym indeksem że $k(X_i) \geq Y_i$. Oczywiście $i < n$. Jeśli $i = 0$, to możemy znaleźć $T' \subseteq T$ że $k(T') = n$ (usuwając punkty T jeden po jednym). Wtedy $T' \cup (\mathcal{S} \setminus T')$ jest szukanym rozkładem.

Założmy więc, że $1 \leq i \leq n-1$. Z minimalności i mamy, że

$$k(X_i) - 1 \leq k(X_{i-1}) \leq k(Y_{i-1}) - 1 \leq k(Y_i).$$

Więc albo $k(X_i) = k(Y_i)$ (i tworzą one rozkład) lub

$$k(X_i) - 1 = k(X_{i-1}) = k(Y_{i-1}) - 1 = k(Y_i).$$

W tym przypadku niech $X = X_i, Y = Y_i$. Ponieważ $k(X) + k(Y)$ jest nieparzyste, to istnieje co najmniej jeden extra punkt $M \in X$ nie leżący na brzegi $\text{conv}(X)$ i $\text{conv}(Y)$. Jeśli M leży na zewnątrz $\text{conv}(Y)$, przenosimy go z X do Y i dostajemy rozkład. W przeciwnym wypadku wszystkie ekstra punkty leżą w $\text{conv}(X) \cap \text{conv}(Y)$. W szczególności to przecięcie jest niepuste.

Niech teraz $X' = X \setminus \text{conv}(Y)$. Wtedy wszystkie punkty X' leżą na brzegu $\text{conv}(X)$ (wszystkie wewnętrzne punkty $\text{conv}(X)$ leży również wewnątrz Y), zatem $k(X') < k(X)$ i $k(X') \leq k(Y)$. Jeśli $k(X') = k(Y)$ wtedy X i $\mathcal{S} \setminus X'$ daje rozkład. W przeciwnym wypadku dodajemy do X' punkty z $X \cap \text{conv}(Y)$ by otrzymać X'' z $k(X'') = k(Y)$. Wtedy X'' i $\mathcal{S} \setminus X''$ daje szukany rozkład. $\square$

12. Niech f będzie wielomianem o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Rozpatrzmy liczbę całkowitą dodatnią a i rozważmy ciąg

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Założmy, że zbiór dzielników pierwszych, które dzielą co najmniej jeden wyraz ciągu $(a_n)_{n \geq 1}$ jest skończony. Udowodnić, że $f(X) = C \cdot X^k$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych C i k .

Rozwiązanie:

Założmy, że $f(0) \neq 0$ i rozważmy liczbę całkowitą m taką, że dla $n \geq m$, mamy $a_n > c$ gdzie c jest stałą którą później podamy. Przypuśćmy, że zbiór dzielników pierwszych jakiegokolwiek wyrazu naszego ciągu to $\{p_1, \dots, p_k\}$ dla pewnego $k \geq 1$. Zapiszmy każdy a_l jako iloczyn $\prod p_i^{v_{p_i}(a_l)}$. Dla każdego l rozważmy indeks j taki, że największa potęga w a_l to $p_j^{v_{p_j}(a_l)}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta spośród wyrazów $\{a_n, \dots, a_{n+k}\}$ pewne dwa mają ten sam indeks. Zatem mamy liczbę pierwszą p_i i wykładnik e_i taki, że $p_i^{e_i} \mid a_s$ i $p_i^{e_i} \mid a_{r+s}$ dla pewnego $m < n \leq s$ i $r \leq k$.

Zauważmy teraz, że

$$a_{r+s} = f^{r+s}(a) = f^r(f^s(a)) = f^r(a_s) \equiv f^r(0) \pmod{a_s}$$

więc $p_i^{e_i} \mid f^r(0)$ i ponieważ $r \leq k$, to $p_i^{e_i}$ jest ograniczone przez pewną liczbę całkowitą dodatnią M która jest największą liczbą spośród liczb $\{f^t(0)\}_{1 \leq t \leq k}$. Jednakże $p_i^{e_i} \geq \min(\sqrt[k]{a_s}, \sqrt[k]{a_{r+s}})$, zatem biorąc $c := M^k$ daje to sprzeczność z tym, że wyrazy ciągu a_n są nieograniczone.

Jeśli $f(0) = 0$, to $f(X) = X^b g(X)$ dla pewnego $b \geq 1$ więc

$$f^{j+1}(X) = (f^j(X))^b \cdot g(f^j(X)).$$

Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych dzielących co najmniej jeden wyraz ciągu $(a_n)_{n \geq 1}$. Weźmy $p \in \mathcal{P}$. Zauważmy, że

$$f^{j+1}(X) = f(f^j(X)) \equiv f(0) = 0 \pmod{f^j(X)}$$

dla wszystkich $j \geq 0$. Weźmy N odpowiednio duże takie, że $a_{N+1} = f^N(a)$ dzieli się przez wszystkie liczby ze zbioru $\mathcal{P}$.

Rozpatrzmy $j > N$ i zauważmy, że jeśli $p \nmid g(0)$ to $v_p(g(f^j(0))) = 0$ a jeśli $p \mid g(0)$ to $v_p(f^{j+1}(0)) > v_p(f^j(0))$ itd. dla j odpowiednio dużych $v_p(f^j(0)) > v_p(g(0))$. Zatem $v_p(g(f^j(0))) = v_p(g(0))$ jest ograniczony z góry. Ponieważ wszystkie dzielniki g pochodzą ze zbioru $\mathcal{P}$ to $g(f^j(0))$ jest ograniczone. Jest to niemożliwe dla $j \rightarrow \infty$ chyba, że g jest wielomianem stałym. $\square$

Mecz matematyczny grupy młodszej

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y , dla których zachodzi

$$x^2 + 615 = 2^y.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że nie ma rozwiązań, dla których $y \leq 0$, gdyż prawa strona równości jest wówczas nie większa niż 1, a lewa strona jest większa niż 615. Załóżmy, że $y \geq 1$.

Rozważmy to równanie modulo 3. Zauważmy, że x^2 może przystawać tylko do 0 i 1 oraz $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$, zatem lewa strona równości może przystawać tylko do 0 i 1. Natomiast prawa strona równości przystaje do 1 lub 2. Stąd więc obie strony równości muszą przystawać do 1, a jest tak tylko, jeżeli y jest liczbą parzystą. Niech $y = 2y'$.

Podstawiając do równości w zadaniu otrzymujemy:

$$3 \cdot 5 \cdot 41 = 615 = 2^y - x^2 = (2^{y'})^2 - x^2 = (2^{y'} - x)(2^{y'} + x).$$

Ponadto $(2^{y'} - x) + (2^{y'} + x) = 2^{y'+1}$. Szybkie sprawdzenie pokazuje, że jest tak tylko jeżeli zapiszemy $615 = 5 \cdot 123$. Stąd więc:

$$\begin{cases} 2^{y'} - x = 5 \\ 2^{y'} + x = 123 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2^{y'} - x = 123 \\ 2^{y'} + x = 5 \end{cases}$$

W obu przypadkach sumując obustronnie dostajemy $2^{y'+1} = 128 = 2^7$, czyli $2^{y'} = 2^6$ oraz $y = 12$. Podstawiając te wartości do równań dostajemy dwa możliwe rozwiązania, $x = -59$ lub $x = 59$. Bezpośrednio sprawdzając dostajemy, że spełniają one pierwotne równanie. Zatem jedynie pary $(12, -59)$ i $(12, 59)$ spełniają pierwotne równanie.

2. Na płaszczyźnie znajduje się 2018^{2018} punktów, przy czym żadne trzy nie są współliniowe. Każdy z tych punktów jest w jednym z trzech kolorów: czerwonym, zielonym lub niebieskim. Wiadomo jest, że każdy kolor występuje co najmniej raz. Pokazać, że istnieje trójkąt mający wierzchołki wśród tych punktów, gdzie każdy wierzchołek jest w innym kolorze i wewnątrz tego trójkąta nie ma innych punktów.

Rozwiązanie:

Wybermy trójkąt, który ma wszystkie wierzchołki w różnych kolorach oraz jego pole jest możliwie najmniejsze. Oczywiście taki trójkąt istnieje, ponieważ liczba trójkątów o wierzchołkach w różnych kolorach jest skończona. Gdyby wewnątrz tego

trójkąta znajdował się jakiś inny punkt, to moglibyśmy zamienić jeden z wierzchołków trójkąta na ten punkt, dzięki czemu otrzymalibyśmy mniejszy trójkąt spełniający warunki zadania. Zatem ten trójkąt jest szukany trójkątem.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\angle ACB = 45^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L . Pokazać, że obwód trójkąta KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Rozwiązanie:

Niech H_A , H_B , H_C oznaczają spodki wysokości opuszczone z odpowiednich wierzchołków trójkąta. Niech ponadto K' i L' oznaczają odbicie punktu H względem prostych AC i BC . Zauważmy, że leżą one na okręgu opisanym na trójkącie ABC . W istocie, zachodzą równości:

$$\angle K'CA = \angle HCA = \angle H_CCA = \angle H_BBA = \angle K'BA.$$

Analogicznie dla punktu L' .

Ponadto $\angle H_BCB = 45^\circ$, $\angle BH_BC = 90^\circ$, zatem $\angle K'BC = \angle H_BBC = 45^\circ$, a więc $\angle KOC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Zatem punkt K' leży na prostej prostopadłej do CO w punkcie O , czyli na prostej KL . Otrzymujemy więc, że odcinek $K'L'$ to średnica okręgu. Ponieważ K' i L' to odbicia punktu H względem boków trójkąta, to zachodzą równości $|KH| = |KK'|$ i $|LH| = |LL'|$, a więc

$$|KH| + |KL| + |LH| = |KK'| + |KL| + |LL'| = |K'L'|,$$

co należało udowodnić.

4. Liczby całkowite dodatnie a , b i c spełniają warunek

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze znanej tożsamości (Girarda-Newtona):

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 3abc. \quad (1)$$

Przekształcając równość z treści dostajemy:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3abc,$$

Podstawiając to do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 3abc(a + b + c + 1). \end{aligned}$$

Zatem $a + b + c + 1 \nmid a^3 + b^3 + c^3 + 1$, co należało pokazać.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których obie liczby $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie:

Dla $n = 1$ obie liczby są pierwsze. Załóżmy, że $n \geq 2$.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to pierwsza z liczb jest liczbą parzystą większą niż 2, zatem jest liczbą złożoną. Załóżmy więc, że $n = 2^k m$, gdzie $k > 1$ i m jest liczbą nieparzystą. Jeżeli $m > 1$, to stosując wzory skróconego mnożenia dostajemy

$$n^n + 1 = \left((2^k m)^{2^k} \right)^m + 1^m = \left((2^k m)^{2^k} + 1 \right) (\dots),$$

a więc liczbę można zapisać jako iloczyn dwóch liczb większych od 1.

Zachodzi więc $n = 2^k$. Jeżeli $2 \mid k$, to $2 \nmid (k+1)$ i

$$(2n)^{2n} + 1 = (2^{k+1})^{2^k} + 1 = \left(2^{2^k} \right)^{k+1} + 1^{k+1} = \left(2^{2^k} + 1 \right) (\dots),$$

a więc ponownie otrzymujemy liczbę złożoną.

Jeżeli $2 \nmid k$, to

$$n^n + 1 = (2^k)^{2^k} + 1 = \left(2^{2^k} \right)^k + 1^k = \left(2^{2^k} + 1 \right) (\dots),$$

a więc jest to liczba złożona.

Ostatecznie, jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 1$.

6. Dana jest kwadratowa plansza o rozmiarze 2018×2018 . Dwóch graczy wykonuje na przemian ruchy w postaci wyboru koloru czarnego lub białego i postawieniu pionka w tym kolorze na jakimś pustym polu. Grę wygrywa ten, po którego ruchu na planszy znajdzie się ciąg pięciu pionków w jednym kolorze (poziomo, pionowo lub na skos). Stwierdzić, czy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że gracz drugi ma strategię wygrywającą. Jego strategia wygląda następująco: jeżeli może dostawić piąty pionek do pewnego ciągu, robi to i wygrywa; w przeciwnym razie wybiera kolor przeciwny do koloru, który wybrał jego przeciwnik w poprzednim ruchu i stawia pionek na polu symetrycznie odbitym względem środka planszy. Oczywiście jest, że jeżeli nie mógł dostawić piątego pionka, to po jego ruchu również nie będzie to możliwe, ze względu na symetrię ustawienia pionków. Zatem strategia ta zapewnia zwycięstwo graczowi drugiemu.

7. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i niech $c < d$ będą takimi kolejnymi liczbami całkowitymi, że zachodzi równość $a - b = a^2 c - b^2 d$. Udowodnić, że $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Zapiszmy $d = c + 1$ i podstawmy:

$$a - b = a^2c - b^2(c + 1) = a^2c - b^2c + b^2 = (a - b)(a + b)c - b^2,$$

a stąd

$$b^2 = (a - b)(c(a + b) - 1).$$

Oczywiście jeżeli p jest liczbą pierwszą i $p \mid (a - b)$, to $p \mid b^2$, czyli $p \mid b$, a więc $p \mid (a - b) + 2b = (a + b)$. Stąd więc $NWD(a - b, c(a + b) - 1) = 1$. Jednak każda liczba pierwsza występuje parzystą liczbę razy w wyrażeniu b^2 , a więc występuje też parzystą liczbę razy w każdym z wyrażeń $a - b$ i $c(a + b) - 1$. Stąd więc $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Dany jest trójkąt ABC . Niech O oznacza środek okręgu opisanego na tym trójkącie, a H oznacza punkt przecięcia się wysokości tego trójkąta. Punkt A leży po przeciwnej stronie prostej OH niż punkty B i C . Niech d_A, d_B, d_C oznaczają odległości odpowiednich wierzchołków trójkąta ABC od prostej OH . Pokazać, że $d_A = d_B + d_C$.

Rozwiązanie:

Lemat (Euler). Niech M_A oznacza środek odcinka BC . Wówczas $|AH| = 2|M_AO|$.

Dowód lematu. Niech M_B oznacza środek odcinka CA oraz niech H_A i H_B oznaczają środki odcinków AH i BH . Oczywiście $H_AH_B \parallel AB \parallel M_AM_B$, a więc zachodzi równość

$$|H_AH_B| = \frac{1}{2}|AB| = |M_AM_B|.$$

Ponadto $M_AO \parallel AH$ i $M_B \parallel BH$. Zatem trójkąty HH_AH_B i OM_AM_B są przystające. Stąd dostajemy równość $|AH| = 2|H_AH| = 2|M_AO|$, co należało dowieść.

Niech teraz X_A, X_B, X_C i X_M oznaczają rzuty kolejno punktów A, B, C i M_A na prostą OH . Oczywiście trójkąty AHX_A i M_AOX_M są podobne i zachodzi $|AX_A| = 2|M_AX_M|$. Ponadto, czworokąt $BX_BX_CX_C$ to trapez prostokątny i zachodzi $|M_AX_M| = \frac{1}{2}(|BX_B| + |CX_C|)$. Stąd więc otrzymujemy:

$$d_A = |AX_A| = 2|M_AX_M| = |BX_B| + |CX_C| = d_B + d_C,$$

co należało udowodnić.

9. Dana jest plansza o rozmiarze 100×100 . Ile maksymalnie $(3, 1)$ -skoczków można postawić na planszy tak, aby żadne dwa skoczki siebie nie atakowały? $(3, 1)$ -skoczki atakują siebie jeżeli stoją na przeciwnych wierzchołkach prostokąta o rozmiarze 2×4 .

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że jak ustawimy skoczki w co drugiej kolumnie, to dostaniemy poprawne ustawienie skoczków, które pokrywa połowę pól.

Pokażemy teraz, że nie da się tego zrobić lepiej.

W tym celu ponumerujemy pola prostokąta 2×6 w następujący sposób:

1	3	5	2	4	6
2	4	6	1	3	5

Oczywistym jest, że skoczek ustawiony w pewnym polu atakuje drugie pole z taką samą cyfrą. Oznacza to, że nie można wypełnić takiego prostokąta więcej niż sześcioma skoczkami.

Następnie ponumerujemy pola prostokąta 4×8 w następujący sposób:

1	9	4	10	7	13	8	16
10	3	13	6	11	4	14	7
2	11	5	14	3	12	6	15
9	1	12	2	15	5	16	8

Podobnie jak poprzednio, każda liczba występuje dwukrotnie i skoczek postawiony w pewnym polu atakuje drugie pole o tym samym numerze. Wynika stąd, że prostokąta o rozmiarze 4×8 również nie da się wypełnić większą liczbą skoczków niż połowa liczby pól.

Zauważmy przy tym, że z prostokątów 2×6 można utworzyć prostokąt 4×6 , a z dwóch takich prostokątów i jednego o rozmiarze 4×8 można utworzyć prostokąt o rozmiarze 4×20 . Natomiast ze 125 takich prostokątów można utworzyć prostokąt o rozmiarze 100×100 , co oznacza, że nie można pokryć go skoczkami w liczbie większej niż połowa liczby jego pól.

Zatem można postawić na tej planszy maksymalnie 5000 (3, 1)-skoczków.

10. Udowodnij, że równanie

$$\left(2 + \sqrt{5}\right)^m + \left(3 + \sqrt{5}\right)^n = \left(4 + \sqrt{5}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k .

Rozwiązanie:

Założmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie tego równania. Korzystając z rozwinięcia dwumianowego otrzymujemy

$$\left(2 + \sqrt{5}\right)^m + \left(3 + \sqrt{5}\right)^n - \left(4 + \sqrt{5}\right)^k = A + B\sqrt{5},$$

gdzie A i B to pewne liczby całkowite. Oczywiście zakładając, że liczby m, n, k spełniają równość z zadania, otrzymujemy $A = B = 0$.

Gdy zamienimy dodawanie na odejmowanie liczb w nawiasach, to otrzymamy:

$$\left(2 - \sqrt{5}\right)^m + \left(3 - \sqrt{5}\right)^n - \left(4 - \sqrt{5}\right)^k = A - B\sqrt{5} = 0.$$

Okazuje się jednak, że $|2 - \sqrt{5}| < \frac{1}{2}$, $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$ oraz $4 - \sqrt{5} > \frac{3}{2}$, zatem $(2 - \sqrt{5})^m < \frac{1}{2}$, $0 < (3 - \sqrt{5})^n < 1$ oraz $(4 - \sqrt{5})^k > \frac{3}{2}$, a stąd:

$$\left(2 - \sqrt{5}\right)^m + \left(3 - \sqrt{5}\right)^n < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} < \left(4 - \sqrt{5}\right)^k,$$

a więc sprzeczność z założeniem, że liczby m, n, k spełniają równość z zadania.

11. Dany jest kąt ostry XOY . Wewnątrz tego kąta znajdują się punkty A i B , przy czym zachodzi $\angle AOX = \angle BOY$. Niech X_A, X_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OX . Analogicznie, niech Y_A, Y_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OY . Udowodnić, że proste AB, X_AY_B, X_BY_A przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Zadanie można rozwiązać analitycznie. Bez straty ogólności można założyć, że oś współrzędnych x jest dwusieczną kąta XOY . Wówczas prosta OX jest postaci $y = px + q$ i ze względu na symetrię względem osi współrzędnych x , prosta OY ma równanie $y = -px - q$. Ponieważ proste OA i OB odpowiednio tworzą równe kąty z prostymi OX i OY , to oznacza, że są odbite symetrycznie względem dwusiecznej kąta XOY . Możemy je zatem zapisać kolejno jako $y = rx + s$ i $y = -rx - s$.

Dalej można wybrać dowolne punkty leżące na prostych OA i OB , wyznaczyć ich rzuty na proste OX i OY i następnie wyznaczyć punkt przecięcia prostych z tezy zadania. Tę część pozostawiamy Czytelnikowi.

Sposób 2. Niech C oznacza rzut punktu O na prostą AB . Oczywiście punkty O, A, X_A, Y_A, C leżą na jednym okręgu, którego średnicą jest odcinek OA . Analogicznie dla piątki punktów O, B, X_B, Y_B, C . Oznaczmy te okręgi kolejno przez ω_A i ω_B .

Zauważmy również, że punkty X_A, X_B, Y_A, Y_B leżą na jednym okręgu. Istotnie, zachodzą równości $\angle X_AY_AO = \angle X_AAO = \angle Y_BBO = \angle Y_BX_BO$ i analogicznie $\angle Y_AX_AO = \angle X_BY_BO$. Zatem trójkąty X_AY_AO i Y_BY_AO są podobne i na punktach X_A, X_B, Y_A, Y_B można opisać okrąg. Oznaczmy go przez ω .

Dalej, środek okręgu ω leży na prostej AB .

Jest tak, ponieważ czworokąty ABX_BX_A oraz ABY_BY_A to trapezy prostokątne, a więc odległość środka odcinka AB od każdego z punktów X_A, X_B, Y_A, Y_B jest taka sama. Niech środek tego okręgu będzie oznaczony przez M .

Niech teraz Z oznacza punkt przecięcia prostych X_AX_B oraz Y_AY_B . Zauważmy, że jest on środkiem potęgowym okręgów $\omega, \omega_A, \omega_B$, zatem w szczególności leży na prostej OC .

Niech D oznacza punkt przecięcia prostych X_AY_B i X_BY_A . Jako, że punkt Z leży na przecięciu przekątnych czworokąta $X_AX_BY_BY_A$, to punkt D jest biegunem prostej OZ względem okręgu ω , zatem prosta MD jest prostopadła do prostej OZ . Wiemy jednak, że prosta OZ jest również prostopadła do prostej AB i na prostej AB leży punkt M . Zatem proste AB i MD pokrywają się. Stąd więc proste X_AY_B, X_BY_A i AB przecinają się w jednym punkcie, co należało dowieść.

12. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y spełniające równanie

$$2x^6 + y^7 = 11$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $6 \cdot 7 + 1 = 43$ jest liczbą pierwszą. Możliwe reszty modulo 43 to:

$$2x^6 \bmod 43 \in \{0, 2, 8, 22, 27, 32, 39, 42\},$$

$$11 - y^7 \bmod 43 \in \{4, 5, 10, 11, 12, 17, 18\}.$$

Zatem nie istnieją rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych.

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{Q}_+$ mamy $f(x) = f(\frac{1}{x})$ oraz dla dowolnej liczby wymiernej $x > 1$ zachodzi równość

$$(x+1)f(x-1) = xf(x).$$

Rozwiązanie:

Z równości $3f(1) = 2f(2)$ wynika, że $f(1)$ jest liczbą parzystą. Oznaczmy $a = \frac{f(1)}{2}$. Udowodnimy indukcyjnie, że dla liczby wymiernej r zapisanej w postaci nieskracalnej jako $\frac{p}{q}$ mamy $f(r) = a(p+q)$. Indukcja będzie ze względu na sumę $p+q$. Start indukcji działa. Załóżmy, że dla wszystkich liczb wymiernych, w których suma licznika i mianownika jest mniejsza od $p+q$ nasza równość zachodzi. Wykażemy, że $f(r) = a(p+q)$. Jako, że $f(r) = f(\frac{1}{r})$, to wystarczy pokazać tą równość dla $r > 1$. Wówczas liczba $r-1$ zapisana w postaci $\frac{p-q}{q}$ również ma postać nieskracalną oraz $(p-q)+q = p < p+q$. To oznacza, że

$$f(r) = \frac{(r+1)f(r-1)}{r} = \frac{\frac{p+q}{q} \cdot ap}{\frac{p}{q}} = a(p+q)$$

co kończy dowód indukcyjny. To oznacza, że $f(\frac{p}{q}) = 1$ dla liczb względnie pierwszych p, q oraz pewnej całkowitej stałej a .

2. Niech n będzie liczbą dodatnią całkowitą, a x, y takimi liczbami dodatnimi, że $x^n + y^n = 1$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

Rozwiązanie:

Nierówność $\frac{1+a^2}{1+a^4} < \frac{1}{a}$ dla liczby dodatniej $a < 1$ jest równoważna nierówności $(1-a)(1-a^3) > 0$, czyli jest zawsze prawdziwa. Mamy więc

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x^k}\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{y^k}\right) = \frac{1-x^n}{x^n(1-x)} \cdot \frac{1-y^n}{y^n(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

co należało pokazać.

3. Niech $k \geq 2$ będzie liczbą całkowitą, ponadto m, n względnie pierwszymi liczbami całkowitymi większymi niż 1. Udowodnić, że równanie:

$$x_1^m + x_2^m + \dots + x_k^m = x_{k+1}^n$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{Z}^{k+1}$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, zauważmy najpierw, że jak $(x_1, \dots, x_{k+1})$ spełnia warunki zadania, to dla dowolnego s mamy, że $(s^n x_1, \dots, s^n x_k, s^m x_{k+1})$ też spełnia warunki zadania, zatem naszym celem jest znalezienie jednego rozwiązania. Weźmy $x_1 = x_2 = \dots = x^k = x$, przy czym x ma daną liczbę pierwszą p w rozkładzie u razy, że jak dodamy do $um \cdot v_p(k)$, to dostaniemy wielokrotność n (jest to możliwe na mocy Chińskiego Twierdzenia o resztach). Wówczas suma ich m -tych potęg da nam n tą potęgę, ponieważ te wszystkie liczby są dodatnie, to dostajemy tezę zadania.

4. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, takie, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c , takich, że $a^2 + b^2 \neq c^2$ jest spełniona podzielność $a^2 + b^2 - c^2 | P(a) + P(b) - P(c)$.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw, że jeśli wielomian trzech zmiennych $P(x, y, z)$ i współczynnikach całkowitych spełnia zależność: $a^2 + b^2 - c^2 | P(a, b, c)$ dla dowolnych całkowitych a, b, c , takich, że $a^2 + b^2 \neq c^2$, to wielomian $P(x, y, z)$ jest podzielny przez $x^2 + y^2 - z^2$. Podzielmy wielomian $P(x, y, z)$ przez wielomian $x^2 + y^2 - z^2$ tak była reszta miała stopień po zmiennej x co najwyżej 1. Oznaczmy tę resztę przez $R(x, y, z)$. Zauważmy, że $P(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2)W(x, y, z) + R(x, y, z)$ oraz wielomiany W i R mają współczynniki całkowite. Podstawmy za y, z jakieś liczby b, c oraz za x liczbę a , gdzie $a \gg y, z$. Wówczas $a^2 + b^2 - c^2 | R(a, b, c)$. Oczywiście $R(a, b, c)$ jest mniejsze niż $a^2 + b^2 - c^2$, zatem $R(a, b, c) = 0$, dla nieskończenie wielu a to zachodzi, czyli dla dowolnego a mamy $R(a, b, c)$. Ponieważ b i c też są dowolnie dobrane, to możemy stwierdzić, że wielomian R jest zerowy. Podstawiając $b = c$, dostajemy, że zachodzi podzielność $a^2 | P(a)$ dla dowolnego a całkowitego dodatniego. Zatem możemy stwierdzić, że wielomian P jest podzielny przez x^2 , innymi słowy istnieje wielomian $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ taki, że $P(x) = x^2 Q(x)$. Oczywiście z tego, co wcześniej powiedzieliśmy wielomian $x^2 Q(x) + y^2 Q(y) - z^2 Q(z)$ jest podzielny przez $x^2 + y^2 - z^2$. Ponieważ dla $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ i $z = u^2 + v^2$ wyrażenie $x^2 + y^2 - z^2$ się zeruje, więc $(u^2 - v^2)^2 P(u^2 - v^2) + (2uv)^2 P(2uv) = (u^2 + v^2)^2 P(u^2 + v^2)$. Jeśli stopień wielomianu P jest dodatni, to dla dużych u, v mamy, że $(u^2 - v^2)^2 P(u^2 - v^2) + (2uv)^2 P(2uv) < (u^2 - v^2)^2 P(u^2 + v^2) + (2uv)^2 P(u^2 + v^2) = (u^2 + v^2)^2 P(u^2 + v^2)$, co jest niemożliwe. Zatem $Q(x)$ jest stałą, widzimy, że wielomian $Q(x) = k \in \mathbb{Z}$ spełnia warunki zadania, czyli $P(x)$ jest równe kx^2 .

5. Dany jest niezerowy wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że istnieje N całkowite, takie, że dla każdego $n > N$ liczby $P(n)$ i $2^{2^n} + 1$ są względnie pierwsze.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^n} + 1$ przystaje do 1 modulo 2^{n+1} . Zauważmy, że podzielność $p | 2^{2^n} + 1$ implikuje nam $p | 2^{2^{n+1}} - 1$, czyli zarówno $p - 1$ jak i 2^{n+1} muszą być podzielne przez rząd 2 modulo p . W związku z tym rząd 2 musi być potęgą dwójki, jeśli to będzie 2^k , gdzie $k \leq n$, to $p | 2^{2^k} - 1$,

więc $p|2^{2^n} - 1$, co pozwala nam stwierdzić, że $p|2$, co jest niemożliwe. Zatem rząd 2 modulo p równa się 2^{n+1} . W związku z tym dowolny dzielnik różny od 1 liczby $2^{2^n} + 1$ jest co najmniej równy $2^{n+1} + 1$. Zauważmy, że dla dużych n liczba $P(n)$ jest mniejsza niż $2^{n+1} + 1$, gdyż prawa strona rośnie wykładniczo, natomiast liniowo wielomianowo, zatem dla dużych n jedynym dzielnikiem liczb $P(n)$ i $2^{2^n} + 1$ jest jedynka, co chcieliśmy udowodnić.

6. Dany jest ciąg zawierający 1000 różnych liczb rzeczywistych. Wykazać, że istnieje w nim podciąg rosnący długości 28 lub podciąg malejący długości 38.

Rozwiązanie:

Oznaczmy liczby w ciągu przez $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$. Oznaczmy przez r_i, m_i długości odpowiednio najdłuższych podciągów rosnących i malejących, które zaczynają się od a_i . Jasne jest, że dla $i < j$ jeśli $a_i < a_j$, to $r_i > r_j$ oraz gdy $a_i > a_j$, to $m_i > m_j$. To oznacza, że pary (r_i, m_i) są parami różne. Jako, że $1000 > 27 \cdot 37$, to na pierwszej współrzędnej mamy przynajmniej 28 różnych możliwości lub na drugiej mamy przynajmniej 38 różnych możliwości. W obu przypadkach dostajemy tezę zadania.

7. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których elementy zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mogą być pomalowane na dwa kolory, w taki sposób, że spełniony jest warunek: istnieje dokładnie 1558 uporządkowanych trójek a, b, c ze zbioru S (a, b, c nie muszą być parami różne), w których liczby a, b, c są tego samego koloru, a ich suma dzieli się przez n .

Rozwiązanie:

Powiedzmy, że mamy kolorowanie na białą i czarną, przy czym jest dokładnie x liczb białych i y czarnych. Policzmy liczbę trójek, które mają sumę elementów podzielną przez n oraz nie są jednokolorowe. W takiej trójce (x, y, z) dokładnie jedna z par $(x, y), (y, z), (z, x)$ jest taka, że pierwsza liczba jest biała, a druga czarna. Z drugiej strony, mając taką parę, chcąc dobrać do niej trzecią liczbę, jest ona wybrana na dokładnie jeden sposób oraz może być na każdej z trzech pozycji. To oznacza, że liczba szukanych trójek dwukolorowych to $3xy$. Łączna liczba trójek o sumie podzielnej przez n to n^2 , gdyż wybierając pierwsze dwie z nich trzecia może być dobrana na dokładnie jeden sposób. Mamy zatem, że liczba trójek jednokolorowych to $n^2 - 3xy = (x + y)^2 - 3xy = x^2 - xy + y^2$. Z drugiej strony jest to dokładnie 1558. Wynika stąd, że liczby x, y są parzyste, jednak wtedy $4 | x^2 - xy + y^2$, ale $4 \nmid 1558$. To oznacza, że taka liczba n nie istnieje.

8. Liczby całkowite dodatnie k, l, m, n są takie, że prostokąt $k \times l$ można całkowicie pokryć używając nienachodzących na siebie pionowych pasków $1 \times n$ oraz poziomych $m \times 1$. Wykazać, że prostokąt ten można pokryć używając tylko jednego rodzaju z tych pasków.

Rozwiązanie:

Niech ω, γ będą pierwiastkami pierwotnymi odpowiednio n -tego i m -tego stopnia z jedynki. W polu znajdującym się w i -tej kolumnie i w j -tym wierszu wpisujemy liczbę $\omega^i \gamma^j$. Z faktu $\omega + \omega^2 + \dots + \omega^n = \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^m = 0$ wynika, że każdy pasek zajmuje pola, których suma jest równa 0. To oznacza, że suma liczb wpisanych wszystkie pola szachownicy to 0. Z drugiej strony jest ona równa $\omega \gamma \left(\frac{\omega^k - 1}{\omega - 1} \right) \left(\frac{\gamma^l - 1}{\gamma - 1} \right)$. Widzimy więc, że przynajmniej jeden z nawiasów musi być równy 0, zatem $n \mid k$ lub $m \mid l$. W obu przypadkach teza jest oczywista.

9. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Punkty O_1, O_2 są środkami okręgów opisanych na trójkątach APD, BPC . Niech M, N, O będą środkami odcinków odpowiednio AC, BD, O_1O_2 . Udowodnić, że O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie MNP .

Rozwiązanie:

Niech S będzie drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach APD, BPC . Wówczas $\sphericalangle SAD = \sphericalangle SPB = \sphericalangle SCB$ i podobnie $\sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC$. To oznacza, że S jest środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego odcinek AD na odcinek CB . Podobieństwo to przekształca punkt O_1 na punkt O_2 . To oznacza, że istnieje podobieństwo spiralne o środku w punkcie S przekształcające punkt O_1 na punkt D oraz O_2 na B , czyli odcinek O_1O_2 na odcinek DB . Widzimy więc, że przekształca też punkt O na punkt N . Jako, że trójkąty SOO_2, SNB są podobne spiralnie, to trójkąty SON oraz SO_2B również są podobne spiralnie. Oczywiście $O_2S = O_2B$, czyli też $OS = ON$. Analogicznie $OS = OM$. Ponadto prosta O_1O_2 jest symetralną odcinka PS , czyli $OS = OP$, co w połączeniu z wcześniejszymi równościami daje tezę zadania.

10. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P , który leży wewnątrz niego. Z punktu P prowadzimy prostą k prostopadłą do AP , która przecina prostą BC w punkcie X . W analogiczny sposób definiujemy proste l, m oraz punkty Y, Z . Udowodnić, że punkty X, Y i Z leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech ω będzie dowolnym okręgiem o środku w punkcie P . Niech prosta a będzie biegunową punktu A , natomiast punkt (BC) biegunem prostej BC . Analogicznie definiujemy $b, c, (CA), (AB)$. Wówczas trójkąt $(BC)(CA)(AB)$ ma boki zawierające się w prostych a, b, c . Oznaczmy przez x biegunową punktu X . Wówczas x przechodzi przez punkt (BC) . Ponadto $x \perp PX \perp PA \perp a$, co oznacza, że x jest prostą zawierającą wysokość trójkąta $(BC)(CA)(AB)$. Rozumując analogicznie dla y, z dostajemy, że proste x, y, z przecinają się w jednym punkcie, a co za tym idzie, ich bieguny są współliniowe, co należało pokazać.

11. Dany jest trójkąt ABC , którego okrąg opisany to Ω . Punkt M jest środkiem łuku BC w okręgu Ω , który zawiera punkt A , natomiast punkt L jest spodkiem dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka A . Prosta MI przecina okrąg Ω w punkcie K , gdzie I to środek okręgu wpisanego w ABC . Okrąg opisany na AKL przecina

BC w punkcie T . Wiedząc, że X jest przecięciem MI oraz BC , a Y jest przecięciem TI i AK , udowodnić, że $XY \parallel AI$.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw, że punkt T jest punktem styczności okręgu A -mixtilinear z okręgiem Ω . Rozważmy inwersję o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{ABAC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC . W takim przekształceniu mamy $B \mapsto C$ oraz $C \mapsto B$. Również $\Omega \mapsto BC$ i odwrotnie oraz $AB \mapsto AC$ i odwrotnie. Obraz okręgu A -mixtilinear musi być styczny do prostych AB i AC i BC , przy czym musi się znajdować po przeciwnej stronie BC co A , czyli ten obraz to okrąg dopisany do boku BC . W związku z tym punkt T przejdzie w tym przekształceniu na punkt styczności okręgu dopisanego, który oznaczmy przez W . Punkt I przejdzie na punkt, który leży na dwusiecznej kąta BAC . Łatwo zauważyć, że $AB \cdot AC = AI \cdot AJ$, czyli $I \mapsto J$. Obraz punktu M będzie leżał na prostej BC oraz będzie leżał na dwusiecznej kąta zewnętrznego BAC . Oznaczmy to przecięcie jako U , zatem $M \mapsto U$. Jeżeli chcemy pokazać, że M, I i K są współliniowe, to wystarczy pokazać, że obrazy tych punktów w przekształceniu będą leżały na jednym okręgu wraz z A . Tymczasem $\sphericalangle UAJ = 90^\circ = \sphericalangle UWJ$, więc rzeczywiście punkty U, A, J i W są współokręgowe. Niech N będzie takim punktem na okręgu Ω , że MN jest jego średnicą, jeśli weźmiemy inwersję w N , która przekształca Ω na prostą BC , to okrąg opisany na trójkącie AKL przejdzie na samego siebie, czyli $K \mapsto T$. Pokażemy jeszcze, że $\sphericalangle AIT = 90^\circ$. Niech B' i C' to środki łuków odpowiednio AC i BC okręgu Ω . Stosując twierdzenie Pascala dla sześciokąta $BCC'KNA$ dostajemy, że punkt styczności AB z A -mixtilinearem, punkt I oraz T leżą na jednej prostej, czyli dokładnie to, co chcieliśmy uzyskać. Zauważmy jeszcze, że $\sphericalangle YKX = \sphericalangle AKM = \frac{|\sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB|}{2} = \sphericalangle ITK$, czyli czworokąt $YTXK$ jest cykliczny, a zatem $\sphericalangle TYX = \sphericalangle TKX = \sphericalangle TKM = 90^\circ$. Zatem zarówno XY jak AI są prostopadłe do IT , czyli $XY \parallel AI$.

Referaty

Podwójne zliczanie

Maciej Dziuba, Kamil Galewski

1. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

Rozwiązanie:

Niech L oznacza liczbę trójek osób składających się z damy oraz dwóch kawalerów, którzy z nią tańczyli. Ponumerujmy damy liczbami od 1 do 20 i oznaczmy przez a_i liczbę tańców damy o numerze i . Wówczas dama o numerze i jest w dokładnie $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$ takich trójkach. To oznacza, że łączna liczba takich trójek to $\frac{a_1(a_1-1)}{2} + \frac{a_2(a_2-1)}{2} + \dots + \frac{a_{20}(a_{20}-1)}{2} = \frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_{20}^2}{2} - \frac{a_1+a_2+\dots+a_{20}}{2} = \frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_{20}^2}{2}$. Łącznie było 99 tańców, więc $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 99$. Z nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną dostajemy, że $L > \binom{20}{2}$. Skoro L jest większe od liczby par kawalerów, to pewna para kawalerów należy do dwóch trójek, co daje tezę zadania.

2. Niech S będzie zbiorem n punktów na płaszczyźnie. Wiadomo, że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Ponadto dla każdego punktu zbioru S istnieje przynajmniej k punktów, które mają od niego taką samą odległość. Wykaż, że $k \leq \sqrt{2n} + 1$.

Rozwiązanie:

Niech T oznacza liczbę obiektów składających się z takiego punktu A i pary punktów B, C , że $AB = AC$. Z treści zadania wiemy, że do każdego punktu A możemy dobrać co najmniej $\binom{k}{2}$ takich par punktów, a co za tym idzie $T \geq n \cdot \binom{k}{2}$. Z drugiej strony, mając parę punktów B, C , wszystkie pasujące do niej punkty A leżą na symetralnej odcinka BC , czyli z warunku z zadania wiemy, że są co najwyżej dwa takie punkty. Mamy zatem $2\binom{n}{2} \geq T \geq n \cdot \binom{k}{2}$. Po przekształceniu tej nierówności dostajemy $k(k-1) \leq 2n-2 < \sqrt{2n}(\sqrt{2n}+1)$, skąd już wynika teza, gdyż wszystkie liczby są tu dodatnie.

3. Niech n będzie liczbą parzystą, a S zbiorem składającym się z n punktów. Wiadomo, że dla każdych dwóch punktów X, Y ze zbioru S istnieje taki punkt

$Z \in S$, że $XZ = YZ$. Wykaż, że istnieją takie cztery różne punkty P, A, B, C , że $PA = PB = PC$.

Rozwiązanie:

Niech $n = 2k$. Tak samo jak w poprzednim zadaniu, oznaczmy przez T liczbę obiektów składających się z takiego punktu P i pary punktów B, C , że $PB = PC$. Wiemy, że dla każdej pary punktów B, C istnieje punkt P tworzący z nimi szukany obiekt. To oznacza, że $T \geq \binom{n}{2} = k(2k - 1)$. Widzimy teraz, że pewien taki punkt P należy do przynajmniej $\lceil \frac{k(2k-1)}{2k} \rceil = k$. Punktów różnych od niego jest $2k - 1$, czyli wśród par punktów pasujących do P pewien punkt się powtórzy. Powiedzmy, że jest to punkt A i że pary A, B oraz A, C pasowały do P . Wówczas P, A, B, C jest szukaną czwórką punktów.

4. W mam talent wzięło udział m uczestników, których oceniało $n \geq 3$ sędziów, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Każdy sędzia oceniał każdego kandydata mówiąc czy jest na *TAK*, czy na *NIE*. Każda para sędziów zgadzała się w maksymalnie k ocenach. Wykaż, że $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.

Rozwiązanie:

Niech L oznacza liczbę trójek składających się z uczestnika oraz dwóch sędziów, którzy ocenili go tak samo. Treść zadania mówi nam, że $L \leq k \cdot \binom{n}{2}$. Weźmy teraz dowolnego uczestnika. Powiedzmy, że dostał on a ocen *TAK* oraz b ocen *NIE*, przy czym $a + b = n$. Taki uczestnik jest w dokładnie $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$ trójkach. Niech $m = 2t + 1$. Wartość wyrażenia $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$ jest całkowita dodatnia oraz skończona, więc możemy wybrać takie a, b , dla których wartość tego wyrażenia jest minimalna. Załóżmy bez straty ogólności, że $a > b$. Zastępując tą parę parą $a - 1, b + 1$ wartość naszego wyrażenia nie zmniejszy się, co po prostych przekształceniach prowadzi do równości $a = b + 1$, czyli ostatecznie $\binom{a}{2} + \binom{b}{2} \geq \binom{t+1}{2} + \binom{t}{2} = t^2$. Mamy więc $mt^2 \leq L \leq k \cdot \binom{n}{2}$, co po prostych przekształceniach prowadzi do tezy zadania.

5. Łączymy przeciwległe boki szachownicy 8×8 otrzymując nową szachownicę w kształcie powierzchni bocznej walca. Wykaż, że nie da się ustawić na tej szachownicy ośmiu hetmanów tak, by żadne dwa się nie biły.

Rozwiązanie:

Założmy, że takie ustawienie jest możliwe. Ponumerujmy wiersze i kolumny szachownicy po kolei liczbami od 1 do 8. Popatrzmy na sumę wszystkich 16 współrzędnych z ośmiu pól zajmowanych przez hetmany. Zarówno na pierwszej jak i na drugiej współrzędnej liczby są parami i różne, więc szukana suma wynosi $2(1 + 2 + \dots + 8) = 72$. Z drugiej strony nietrudno zauważyć, że wszystkie przekątne w jednym z kierunków mogą być utożsamiane z sumą współrzędnych pól modulo 8. Na każdej z nich jest dokładnie jeden hetman, więc suma wszystkich 16 współrzędnych modulo 8 wynosi $1 + 2 + \dots + 8 = 36$, co nie jest liczbą podzielną przez 8, ale $8 \mid 72$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

6. Udowodnij, że wśród dowolnych pięciu 500–elementowych podzbiorów zbioru 1000–elementowego istnieją takie dwa, których część wspólna liczy przynajmniej 200 elementów.

Rozwiązanie:

Niech L oznacza liczbę trójek składających się z pewnego elementu oraz dwóch podzbiorów 500–elementowych, które zawierają ten element. Niech $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ oznacza tysiąc rozpatrywanych przez nas elementów oraz niech y_i oznacza liczbę 500–elementowych podzbiorów z zadania zawierających element x_i . Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{1000} y_i = 5 \cdot 500 = 2500$, jako że każdy element 500–elementowego zbioru zostanie wliczony w tej sumie dokładnie raz, a tych podzbiorów jest 5. Ponadto $L = \sum_{i=1}^{1000} \binom{y_i}{2}$, ponieważ dla każdego elementu x_i dwa zbiory 500–elementowe, do których on należy, możemy wybrać na $\binom{y_i}{2}$ sposoby. Postaramy się znaleźć takie wartości y_i , dla którego wartość L jest możliwie najmniejsza. Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{1000} \binom{y_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1000} (y_i^2 - y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1000} y_i^2 - \frac{1}{2} \cdot 2500 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1000} y_i^2 - 1250$, co przyjmuje najmniejszą wartość wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{1000} y_i^2$ jest możliwie najmniejsze. Rozumowanie będzie analogiczne do tego z poprzedniego zadania. Weźmy taki układ y_i , dla którego suma kwadratów jest najmniejsza. Gdyby pewne dwie z tych liczb różniły się o co najmniej 2, to Zwiększając mniejszą o 1 i zwiększając mniejszą o 1 dostajemy mniejszą sumę kwadratów przy zachowanej sumie liczb (wystarczy rozpisać i porównać). To oznacza, że minimalną sumę kwadratów dostajemy mając wśród liczb 500 dwójek oraz 500 trójek. Widzimy teraz, że $L = \sum_{i=1}^{1000} \binom{y_i}{2} \geq 500\left(\binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right) = 2000$. Istnieje $\binom{5}{2} = 10$ par podzbiorów, czyli któraś para jest w przynajmniej dwustu trójkach, co należało pokazać.

Wielomiany

Maciej Dziuba, Kamil Galewski

1. Wykaż, że jeżeli dowolny wielomian postaci $x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, to $a = b = c = d = 0$.

Rozwiązanie:

Ponieważ współczynniki przy x^5 i x^4 w tym wielomianie są równe 0, to na mocy wzorów Viete'a

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 0, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 6} x_i x_j = 0$$

gdzie x_i są pierwiastkami tego wielomianu. Stąd

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^6 x_i \right)^2 - 2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 6} x_i x_j \right) = 0$$

Ponieważ wszystkie liczby x_i są rzeczywiste oraz suma ich kwadratów jest równa 0, to $x_i = 0$ dla $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. To natomiast implikuje, że wielomian z zadania jest równy x^6 , czyli $a = b = c = d = 0$.

2. Znaleźć wszystkie wielomiany postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \{-1, 1\}$ ($0 \leq i \leq n$), których wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.

Rozwiązanie:

Na mocy wzorów Viete'a zachodzą wzory

$$x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \left(\sum_i x_i \right)^2 - 2 \left(\sum_{i < j} x_i x_j \right) = \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 - 2 \left(\frac{a_{n-2}}{a_n} \right) \leq 3$$

Jednakże na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną zachodzi

$$\sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \leq \frac{3}{n}$$

skąd $n \leq 3$. Gdy $n = 3$, w powyższej nierówności zachodzi równość, co jest możliwe jedynie dla $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$. Rozpatrzenie przypadków pokazuje, że jedyne wielomiany trzeciego stopnia spełniające warunki zadania to $(x^3) - x \pm (x^2 - 1)$ oraz $-((x^3) - x \pm (x^2 - 1))$. Rozpatrzenie $n = 1$ lub $n = 2$ jest proste - rozwiązania to $x - 1, x + 1, -x - 1, -x + 1, x^2 \pm x - 1, -(x^2 \pm x - 1)$

3. Wielomian P o współczynnikach całkowitych spełnia równości $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$ dla pewnych trzech parami różnych liczb całkowitych a, b, c . Wykaż, że nie istnieją całkowite pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie:

Założmy, że istnieje całkowite d , że $P(d) = 0$. Ponieważ dla dowolnego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych W i dowolnych różnych liczb całkowitych a, b zachodzi $a - b |W(a) - W(b)|$, to każda z liczb $a - d, b - d, c - d$ musi dzielić 1, co nie może zajść. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

4. Wykaż, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest różnicą dwóch rosnących wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Niech W będzie rozpatrywanym przez nas wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Rozważmy wielomian $A(x) = (W'(x))^2 + 1$, gdzie $W'(x)$ jest pochodną z wielomianu $W(x)$. Niech Q będzie dowolnym wielomianem, którego pochodną jest $A(x)$. Nietrudno zauważyć, że Q jest rosnący, jako że jego pochodna - A - jest zawsze dodatnia. Ponadto wielomian $W(x) + Q(x)$ jest rosnący - gdyby bowiem jego pochodna równa $(W'(x))^2 + 1 + W'(x)$ była w pewnym momencie mniejsza bądź równa 0 dla pewnego $x = a$, to biorąc dowolne b takie, że $(W'(b))^2 + 1 + W'(b) > 0$ dostajemy na mocy ciągłości, że pomiędzy a i b istnieje pierwiastek wielomianu $(W'(x))^2 + 1 + W'(x)$. Wtedy $W'(c)$ byłby rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$, co nie może zajść, jako że to równanie kwadratowe ma ujemny wyróżnik. Skoro wielomiany $W(x) + Q(x)$ oraz $Q(x)$ są rosnące, to $W(x) = (W(x) + Q(x)) - Q(x)$ jest szukanym przez nas przedstawieniem W w postaci różnicy dwóch rosnących wielomianów.

5. Znajdź wszystkie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych f takie, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych a, b, c spełniających $ab + bc + ca = 0$ zachodzi następująca równość

$$f(a - b) + f(b - c) + f(c - a) = 2f(a + b + c)$$

Rozwiązanie:

Widzimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x trójka $6x, 3x, -2x$ spełnia warunek $ab + bc + ca = 0$, zatem mamy równość $f(3x) + f(5x) + f(-8x) = 2f(7x)$. Obie strony są wielomianami, które są zawsze równe, więc muszą to być takie same wielomiany. Zapisując wielomian f w postaci $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ możemy porównać współczynniki stojące przy x^i po obu stronach i dostajemy równość $3^i + 5^i + (-8)^i = 2 \cdot 7^i$. Nietrudno sprawdzić, że dla odpowiednio dużych i liczba $(-8)^i$ ma większy moduł niż liczba $2 \cdot 7^i - 3^i - 5^i$ (można z obu stron wyciągnąć 8^i przed nawias). Z kolei sprawdzając małe i dochodzimy do wniosku, że jedyne możliwe wartości i spełniające podaną równość to 2 oraz 4. To oznacza, że jedynie przy x^4 oraz x^2 wielomian f może mieć niezerowe współczynniki. Z drugiej strony można sprawdzić, że wielomiany postaci $px^4 + qx^2$ spełniają podany warunek dla dowolnych

liczb rzeczywistych p, q . Robimy to sprawdzając, że wielomiany x^4, x^2 spełniają podany warunek oraz, że dowolna kombinacja liniowa dobrych wielomianów również jest dobra.

6. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n > 1$ o współczynnikach całkowitych oraz niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Rozpatrujemy wielomian $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, gdzie P występuje k razy. Wykazać, że istnieje co najwyżej n takich liczb całkowitych t , że $Q(t) = t$.

Rozwiązanie:

Założmy nie wprost, że istnieją parami różne liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, które są punktami stałymi wielomianu Q . Z faktu $a - b \mid P(a) - P(b)$ dla dowolnych liczb całkowitych a, b dostajemy, że dla $a_i \neq a_j$ wszystkie liczby ciągu $a_i - a_j, P(a_i) - P(a_j), P(P(a_i)) - P(P(a_j)), \dots, Q(a_i) - Q(a_j) = a_i - a_j$ wszystkie wyrazy są niezerowe oraz każdy wyraz dzieli następny. Wiemy jednak, że skrajne wyrazy są równe, zatem moduły wszystkich tych liczb są równe, czyli w szczególności $a_i - a_j = \pm P(a_i) - P(a_j)$. Gdyby jednak istniały jednocześnie pary, w których mamy różne znaki, to istniałyby też takie pary mające jeden wspólny element. Bez straty ogólności założmy, że $a_1 - a_2 = P(a_1) - P(a_2)$ oraz $a_1 - a_3 = P(a_3) - P(a_1)$. Dodając te równości stronami dostajemy $2a_1 - a_2 - a_3 = P(a_3) - P(a_2)$. Prawa strona jest jedną z liczb $a_3 - a_2, a_2 - a_3$. Oba przypadki prowadzą do sprzeczności z tym, że a_1 jest różne od a_2 i a_3 . To oznacza, że dla każdej pary i, j mamy $a_i - a_j = P(a_i) - P(a_j)$ lub dla każdej pary $a_i - a_j = P(a_j) - P(a_i)$. Rozważymy tylko pierwszy przypadek, drugi jest analogiczny. Po wstawieniu $j = 1$ dostajemy $P(a_i) - a_i = P(a_1) - a_1$. Oznaczając $c = P(a_1) - a_1, R(x) = P(x) - x - c$ widzimy, że wielomian R ma stopień n , a każda z liczb a_i jest jego pierwiastkiem. Tych liczb jest więcej niż n , co prowadzi do sprzeczności, która kończy dowód.

7. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykaż, że jeżeli $P(P(\dots P(x)\dots)) = x$ dla pewnej liczby całkowitej x (P występuje n razy), to $P(P(x)) = x$.

Rozwiązanie:

Rozważmy następujący ciąg: $x_0 = x$ i $x_{k+1} = P(x_k)$ dla $k \geq 0$. Założmy, że $x_k = x_0$. Wiemy, że

$$d_i = x_{i+1} - x_i \mid P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$$

dla wszystkich i , co razem z $d_k = d + 0$ daje $|d_0| = |d_1| = \dots = |d_k|$.

Założmy, że $d_1 = d_0 = d \neq 0$. Wtedy $d_2 = d$ (w przeciwnym razie $x_3 = x_1$ i x_0 nigdy nie wystąpi ponownie w ciągu x_n , co rodzi sprzeczność). Podobnie $d_3 = d$ itd., skąd $x_k = x_0 + kd \neq x_0$ dla wszystkich k , sprzeczność. Stąd $d_1 = -d_0$, więc $x_2 = x_0$.

8. Wykaż, że jeżeli dla pewnego wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych $P(P(x))$ jest kwadratem pewnego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to $P(x)$ również jest kwadratem pewnego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Wielomian $P(P(x))$ jest kwadratem pewnego wielomianu, więc ma stopień parzysty, co oznacza, że wielomian P również ma stopień parzysty. Oznaczmy przez $z_1, z_2, \dots, z_n$ wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu P , gdzie n jest stopniem P . Rozważmy najpierw przypadek, w którym pewien pierwiastek jest nieparzystokrotny. Wówczas są przynajmniej dwa takie. Bez straty ogólności założymy, że $z_1 \neq z_2$ mają krotność nieparzystą. Wielomian $P(x)$ jest iloczynem czynników postaci $x - z_i$, zatem $P(P(x))$ jest iloczynem czynników postaci $P(x) - z_i$. Dla $z_i \neq z_j$ wielomiany $P(x) - z_i, P(x) - z_j$ różnią się o stałą różną od 0, czyli są względnie pierwsze. To oznacza, że $P(x) - z_1, P(x) - z_2$ są kwadratami wielomianów o współczynnikach zespolonych, powiedzmy Q^2, R^2 . Wówczas $z_1 - z_2 = Q^2 - R^2 = (Q - R)(Q + R)$. Wielomiany, $Q, Q + R$ są stałe, czyli Q, R też, a co za tym idzie P jest wielomianem stałym. Jest to stała będąca liczbą rzeczywistą nieujemną, zatem P jest kwadratem wielomianu stałego. Teraz rozważmy przypadek, w którym każdy pierwiastek ma krotność parzystą. Dla dowolnego pierwiastka nierzeczywistego z , liczba z' będąca jej sprzężeniem również jest pierwiastkiem P . Dzieląc P przez $(x - z)(x - z')$, mający współczynniki rzeczywiste, dostajemy wielomian o współczynnikach rzeczywistych. Powtarzając to rozumowanie dostaniemy, że krotność każdego pierwiastka i jego sprzężenia są takie same. Biorąc wielomian będący pierwiastkiem z wielomianu P możemy go zapisać w postaci iloczynu czynników $x - z_i$, a wszystkie nierzeczywiste pierwiastki możemy ze sobą połączyć dostając czynniki będące wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Oznacza to, że wielomian będący pierwiastkiem z P ma współczynniki rzeczywiste, co kończy dowód.

Podobieństwo (spiralne) trójkątów

Maciej Dziuba, Kamil Galewski

1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem oraz niech E i F będą punktami na odcinkach odpowiednio AD i BC , przy czym $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Półprosta FE przecina półproste BA i CD odpowiednio w punktach S i T . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach SAE , SBF , TCF , TDE przechodzą przez pewien punkt wspólny.

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem podobieństwa spiralnego S które przekształca A na B i D na C . Wtedy przekształca ono AD na BC oraz E na F , jako że dzielą one odcinki odpowiednio AD i BC w tym samym stosunku. Stąd S przekształca odcinki AE na BF oraz ED na FC . Implikuje to, że M jest wspólnym punktem Miquela czworokątów $ABFE$ i $EFCD$. Stąd leży on na okręgach opisanych na trójkątach SAE , SBF , TCF , TDE .

2. Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem wypukłym, w którym $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE$ oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ADE$. Przekątne BD i CE przecinają się w punkcie P . Wykaż, że prosta AP połowi odcinek CD . *Rozwiązanie:*

Niech ω_1 i ω_2 będą okręgami opisanymi odpowiednio na trójkątach BAC i DAE . Zauważmy, że trójkąty BAC , CAD oraz DAE są parami podobne. Rozważmy podobieństwo spiralne przekształcające trójkąt ABC na trójkąt ADE . Z podstawowych własności podobieństwa spiralnego wynika, że P jest drugim punktem przecięcia ω_1 i ω_2 . Ponieważ

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA$$

oraz

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle AED$$

to CD jest styczna do obu ω_1 i ω_2 . Stąd środek odcinka CD ma równą potęgę punktu względem obu tych okręgów, więc leży na ich osi potęgowej - prostej AP .

3. Niech N będzie środkiem łuku ABC okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech NP , NT będą stycznymi do okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ poprowadzonymi z punktu N (P i T leżą na okręgu wpisanym). Proste BP i BT przecinają okrąg opisany na $\triangle ABC$ po raz drugi w punktach odpowiednio P_1 i T_1 . Wykaż, że $PP_1 = TT_1$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sphericalangle IBN = \sphericalangle IPN = \sphericalangle ITN = 90^\circ.$$

Stąd $BPITN$ jest pięciokątem wpisanym w okrąg. Ponadto $IP = IT$, co oznacza, że BP i BT są sprzężone izogonalnie w kącie $\sphericalangle ABC$. Stąd, z symetrii, $NP_1 = NT_1$.

Zauważmy, że $NP = NT$ oraz

$$\sphericalangle PNT = \sphericalangle PBT = \sphericalangle P_1BT_1 = \sphericalangle P_1NT_1$$

więc $\sphericalangle PNP_1$. Zatem trójkąty NPP_1 , NTT_1 są przystające. Stąd $PP_1 = TT_1$, co kończy dowód.

4. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, przy czym $AB \neq AC$. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku BC , natomiast punkt E jest punktem styczności tego okręgu dopisanego i prostej BC . Proste BC i AJ przecinają się w punkcie D . Okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE przecinają się w punkcie $F \neq A$. Wykaż, że $\sphericalangle AFJ = 90^\circ$.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności załóżmy, że $AB > AC$; wtedy punkty F i C leżą po przeciwnych stronach prostej AB . Niech okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku BC będzie styczny do prostych AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Ponieważ

$$\sphericalangle EFA = \sphericalangle ADC = \sphericalangle CBA + \sphericalangle BAD = \sphericalangle CFA + \sphericalangle BAD,$$

to

$$\sphericalangle EFC = \sphericalangle EFA - \sphericalangle CFA = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$$

Ponieważ $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAC$, to prosta FE jest dwusieczną kąta BFC i dostajemy, że

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BE}{CE} = \frac{BP}{CQ}$$

Na mocy tej równości oraz faktu $\sphericalangle FBP = 180^\circ - \sphericalangle FBA = 180^\circ - \sphericalangle FCA = \sphericalangle FCQ$ możemy wywnioskować, że trójkąty FBP oraz FCQ są podobne. Oznacza to, że $\sphericalangle FPA = \sphericalangle FQA$. Stąd czworokąt $AFPQ$ jest cykliczny. AJ jest średnicą tego okręgu, bo $\sphericalangle APJ = \sphericalangle AQJ = 90^\circ$. Stąd wnioskujemy $\sphericalangle AFJ = 90^\circ$.

5. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB = AC \neq BC$ oraz niech I będzie środkiem jego okręgu wpisanego. Prosta BI przecina AC w D , natomiast prosta przechodząca przez D i prostopadła do AC przecina AI w E . Wykaż, że odbicie punktu I względem prostej AC leży na okręgu opisanym na trójkącie BDE .

Rozwiązanie:

Niech I' będzie odbiciem I względem prostej AC oraz niech D' będzie drugim punktem przecięcia AI z okręgiem opisanym na $\triangle ABD$. Ponieważ AD' jest dwusieczną kąta BAD , to punkt D' jest środkiem łuku BD i $DD' = BD' = CD'$. Oczywiście A , E , D' leżą na prostej AI w tej kolejności.

Zauważmy, że zachodzą równości $\sphericalangle ED'D = \sphericalangle AD'D = \sphericalangle ABD = \sphericalangle IBC = \sphericalangle ICB$. Ponieważ D' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD , mamy $\sphericalangle EDD' = 90^\circ - \sphericalangle D'DC = \sphericalangle CBD = \sphericalangle IBC$. Dwie powyższe obserwacje pokazują, że trójkąty $ED'D$ i ICB są podobne. Stąd mamy

$$\frac{BC}{CI'} = \frac{BC}{CI} = \frac{DD'}{D'E} = \frac{BD'}{D'E}.$$

Dostajemy także

$$\sphericalangle BCI' = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACI' = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ICA = \sphericalangle BCA + \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCD'.$$

Stąd mamy, że trójkąty BCI' i $BD'E$ są podobne, więc trójkąty BCD' i $BI'E$ również są podobne. Skoro BCD' jest równoramienny, dostajemy $BE = I'E$.

Ponieważ DE jest dwusieczną zewnętrzną kąta $\sphericalangle BDI'$ oraz $EI' = EB$, mamy że E leży na okręgu opisanym na trójkącie BDI' .

Równania diofantyczne

Jakub Węgrecki

1. Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych dodatnich

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z$$

Rozwiązanie:

Zachodzi $4x + 5y > 3x + 4y > 1$, więc $3x + 4y = 7^a$ oraz $4x + 5y = 7^b$. Zauważmy, że

$$7^a = 3x + 4y < 4x + 5y = 7^b < 21x + 28y = 7(3x + 4y) = 7^{a+1}$$

Zatem b nie jest liczbą całkowitą, co jest sprzeczne. Zatem równanie nie ma rozwiązań.

2. Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych dodatnich

$$2^n + 777 = x^2$$

Rozwiązanie:

Oczywiście $3 \mid 777$, więc 2^n i x^2 mają takie same reszty z dzielenia przez 3. Wiadomo, że reszty x^2 to 0 lub 1, a reszty 2^n to 1 lub 2. Zatem 2^n przystaje do 1 modulo 3, co zachodzi tylko wtedy gdy n jest parzyste, więc $2 \mid n$, więc $n = 2k$. Zatem

$$(x - 2^k)(x + 2^k) = 777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$$

Zatem $(x - 2^k) = 1$ lub 3 lub 7 lub $3 \cdot 7$ lub $3 \cdot 37$ lub $7 \cdot 37$. Sprawdzamy te przypadki i otrzymujemy wynik.

3. Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych dodatnich

$$7^x = 1 + y^2 + z^2$$

Rozwiązanie:

Rozpatrując równanie modulo 8, dostajemy, że x jest parzysty. Niech $x = 2^r \cdot k$, gdzie k jest nieparzyste oraz $r > 0$. Wtedy

$$y^2 + z^2 = (7^{2^{r-1}k} + 1)(7^{2^{r-2}k} + 1) \cdot \dots \cdot (7^{2^k} + 1)(7^k + 1)(7^k - 1)$$

Zauważmy, że $7^k - 1$ jest postaci $8k + 6$, więc ma dzielnik pierwszy postaci $4k + 3$ w nieparzystej potędze. Znany lemat mówi nam, że $y^2 + z^2$ takiego dzielnika mieć nie może.

4. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p oraz liczby całkowite dodatnie q , które spełniają równanie

$$p^2 - p + 1 = q^3$$

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że $p > q$. Z równania wynika, że $p(p-1) = (q-1)(q^2+q+1)$, oraz $NWD(p, q-1) = 1$ gdyż $p > q-1$. Zatem $q-1 \mid p-1$. Zatem $p = (q-1) \cdot k + 1$ dla pewnego całkowitego k . Podstawmy do wyjściowego równania i przekształćmy:

$$q^2 + q(1 - k^2) + (k^2 - k + 1) = 0$$

Żeby to równanie miało rozwiązanie, to $\Delta = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$ musi być kwadratem liczby całkowitej. Dla $k < 3$ mamy $\Delta < 0$. Dla $k > 2$ mamy $(k^2-1)^2 > \Delta \geq (k^2-3)^2$. Czyli $\Delta = (k^2-2)^2$ lub $\Delta = (k^2-3)^2$. Rozpatrując te przypadki dostaniemy, że $q = 7$ oraz $p = 19$.

5. Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych dodatnich

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y$$

Rozwiązanie:

Niech L i P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę danego równania. Zauważmy też na wstępie, że dla dowolnej całkowitej liczby t słuszne są związki $t^2 - t \geq 0$ oraz $t^2 + t \geq 0$. Dla $x = 0$ i dla $x = 1$ zachodzi równość $L = 0$. Liczba P jest z kolei sumą trzech nieujemnych składników, przy czym pierwsze dwa są równe zeru jedynie dla $y = 0$. Wobec tego zależność $P = 0$ jest spełniona tylko dla $y = 0$. W rezultacie uzyskujemy dwa rozwiązania (x, y) danego równania: $(0, 0)$ i $(1, 0)$, a innych rozwiązań z niewiadomą x równą 0 lub 1 nie ma. Od tego momentu zakładamy, że liczba całkowita x jest różna od 0 i 1. Prawdziwa jest więc nierówność $x^2 - x \geq 2$. Korzystając z zależności $x^2 - x \geq 2$ oraz $y^2 - y + 4 \geq 4$ dostajemy $L > (x^2 - x - 1)^2$ oraz $P < (y^2 + 2)^2$. Zatem $x^2 - x - 1 < y^2 + 2$. Ponadto z zależności $x^2 - x \geq 2$ oraz $y^2 + y \geq 0$ mamy $L \leq (x^2 - x)^2 - 1$ oraz $P \geq (y^2 + 1)^2 - 1$. Zatem $x^2 - x > y^2 + 1$, więc $x^2 - x = y^2 + 2$. Korzystając z równości $L = P$ dostajemy, że jedyne pary to $(-2, 2)$ oraz $(3, 2)$.

6. Rozwiązać równanie w liczbach całkowitych dodatnich

$$2^x + 17 = y^4$$

Rozwiązanie:

Z tożsamości $a^4 b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$ dla $a = y^4$ i $b = 2^x$ wynika, że liczba $y^{16} - 16^x$ jest podzielna przez 17. Zatem y^{16} i 16^x dają te same reszty modulo 17. Modulo 17 widzimy (z Małego Twierdzenia Fermata), że x jest parzyste. Zatem $17 = (y^2 - 2^{\frac{x}{2}})(y^2 + 2^{\frac{x}{2}})$, czyli $1 = y^2 - 2^{\frac{x}{2}}$ oraz $17 = y^2 + 2^{\frac{x}{2}}$. Czyli $x = 6$ oraz $y = 3$.

Algorytmy

Jan Fornal

1. Dana jest tabela $2 \times n$. W jej komórki wpisane są liczby rzeczywiste dodatnie. Suma liczb w każdej kolumnie wynosi 1. Udowodnić, że można wybrać po jednej liczbie z każdej kolumny, tak aby dla każdego wiersza suma liczb wybranych z tego wiersza była nie większa niż $\frac{n+1}{4}$.

Rozwiązanie:

Założmy, że liczby występują w pierwszym rzędzie w kolejności niemalejącej, wtedy w drugim rzędzie kolejne liczby będą coraz mniejsze. Powiedzmy, że liczby w pierwszym rzędzie to kolejno $a_1, a_2, \dots, a_n$, z kolei w drugim rzędzie mamy po kolei $b_1, b_2, \dots, b_n$. Rozpatrzmy najmniejsze takie k , dla którego $\sum_{i=1}^k a_i > \frac{n+1}{4}$. Gdyby takie k nie istniało, to wtedy bierzemy wszystkie liczby z pierwszego rzędu i warunki zadania będą spełnione. Teraz $a_k \leq \frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k} > \frac{n+1}{4k}$. Wiemy, że $b_k = 1 - a_k$, czyli stosujemy szacowania: $\sum_{i=k}^n b_i \leq (n+1-k)b_k = (n+1-k)(1-a_k) = (n+1-k)(1-\frac{n+1}{4k}) = \frac{5(n+1)}{4k} - \frac{(n+1)^2+4k^2}{4k^2} \leq \frac{5(n+1)}{4} - \frac{4k(n+1)}{4k} = \frac{n+1}{4}$. Widzimy zatem, że obie liczby: $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$ i $\sum_{i=k}^n b_i$ są nie większe niż $\frac{n+1}{4}$.

2. Dane jest sześć pudełek $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, ponadto w każdej jest dokładnie jedna moneta. Na pudełkach możemy wykonywać następujące operacje:

1. Jeśli B_k dla $1 \leq k \leq 5$ zawiera co najmniej jedną monetę, to usuwamy jedną monetę z B_k i dodajemy dwie do B_{k+1}
2. Jeśli B_k dla $1 \leq k \leq 4$ zawiera co najmniej jedną monetę, to usuwamy jedną monetę z B_k i zamieniamy zawartość B_{k+1} i B_{k+2} .

Pokazać, że w wyniku takich operacji możemy sprawić, by pudełka B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 były puste, natomiast B_6 zawierała dokładnie $2020^{2020^{2020}}$ monet.

Rozwiązanie:

Najpierw oznaczmy operacje, które już mamy jako $T1$ i $T2$. Zauważmy, że można wykonać następujący ciąg operacji: $[a, 2^b, 0] \xrightarrow{T1} [a, 0, 2^{b+1}] \xrightarrow{T2} [a-1, 2^{b+1}, 0]$. Powtarzając to dokładnie a razy dojdziemy z $[a, 2^b, 0]$ do $[0, 2^{a+b}, 0]$. Nazwijmy ten ciąg operacji jako $T3$. Zauważmy jeszcze, że dla $a, b \geq 1$ możemy wykonać następujący ciąg operacji: $[a, b, 0, 0] \xrightarrow{T1} [a, b-1, 2^1, 0] \xrightarrow{T3} [a, 0, 2^b, 0] \xrightarrow{T2} [a-1, 2^b, 0, 0]$. Oznaczmy tę operację przez $T4$. Zauważmy jeszcze, że $[a, 0, 0, 0] \xrightarrow{T1} [a-1, 2, 0, 0]$, stosując teraz $a-1$ razy operacje $T4$, dochodzimy do $[0, 2^{2^{2^{\dots^{2^2}}}}, 0, 0]$, przy czym taki łańcuch potęg ma a dwójek. Powiedzmy, że $[a, 0, 0, 0] \xrightarrow{T5} [0, 2^{2^{2^{\dots^{2^2}}}}, 0, 0]$. Zatem za pomocą ruchów $T1, T2, T3, T4, T5$ będziemy chcieli dojść do sytuacji, że tylko w

B_6 są monety i jest ich dokładnie $2020^{2020^{2020}}$. Zaczynając od początku, idziemy: $[1, 1, 1, 1, 1, 1] \xrightarrow{T1} [1, 1, 1, 1, 0, 3] \xrightarrow{T2} [1, 1, 1, 0, 3, 0] \xrightarrow{T2} [1, 1, 0, 3, 0, 0] \xrightarrow{T2} [1, 0, 3, 0, 0, 0] \xrightarrow{T1} [0, 2, 3, 0, 0, 0] \xrightarrow{T1} [0, 0, 7, 0, 0, 0]$. Teraz korzystając z $T5$ dostajemy $[0, 0, 0, 2^{2^{2^{\dots 2^2}}}, 0, 0]$ przy czym w tej wieży mamy 7 dwójek. Jeśli $T = 2020^{2020^{2020}}$, to łatwo zauważyć, że taka wieża jest większa niż $\frac{T}{4}$ i parzysta, czyli przy pomocy ruchu $T2$ możemy dojść do $[0, 0, 0, \frac{T}{4}, 0, 0]$. Następnie korzystając z ruchu $T1$ dochodzimy do $[0, 0, 0, 0, 0, T]$, czyli dostajemy żadaną konfigurację monet.

3. Pan Paweł ma trzy konta w banku, w każdej z nich ma całkowitą liczbę dolarów. Pan Paweł może tylko przelewać pieniądze z konta, w którym jest a dolarów, na konto, w którym jest b dolarów, tak, aby po przelewie na pierwszym koncie było $a - b$ dolarów, a na drugim $2b$ dolarów (pod warunkiem, że $a \geq b$). Udowodnić, że Pan Paweł może dokonywać tych przelewów w taki sposób, by ostatecznie w jednym koncie nie było dolarów.

Rozwiązanie:

Założmy, że liczba dolarów na tych trzech kontach to odpowiednio A, B i C . Naszym celem będzie pokazanie, że zawsze możemy wykonać pewien ciąg operacji, aby zmniejszyć wyrażenie $\min(A, B, C)$. Założmy, że w pewnym momencie mamy $A \leq B \leq C$. Tam gdzie jest A dolarów powiemy, że jest pierwsze konto, na drugim koncie jest B dolarów i na trzecim koncie C dolarów. Chcemy dojść do sytuacji, w której na pewnym koncie będzie mniej niż A dolarów. Niech $B = qA + r$, gdzie r jest mniejsze niż A . Powiedzmy, że q ma następującą reprezentację w systemie binarnym: $q = m_0 + 2m_1 + 4m_2 + \dots + 2^k m_k$. Wykonamy teraz następujące $k + 1$ ruchów: jeśli m_i jest równe 1 to $i + 1$ -szym ruchu przestawiamy $2^i A$ dolarów z drugiego konta na pierwsze. W innym razie przelewamy w $i + 1$ ruchu $2^i A$ dolarów z trzeciego konta na pierwsze. Po wykonaniu tych $k + 1$ ruchów na pierwszym koncie będziemy mieli dokładnie $2^{k+1} A$ dolarów, a drugim koncie dokładnie r dolarów. W związku z tym dojdzie do zmniejszenia minimalnej liczby dolarów na jednym koncie, a co za tym idzie w pewnym momencie na pewnym koncie nie będzie ani jednego dolara.

4. Na spotkaniu dotyczącym zagrożeń współczesnego świata spotkało się 100 osób z 25 państw. Z każdego kraju jest 4 reprezentantów, wszyscy zasiedli do okrągłego stołu. Wykazać, że możemy podzielić te 100 osób na cztery grupy po 25 osób, tak aby żadne dwie osoby z tej samej grupy nie siedziały obok siebie ani nie były z tego samego państwa.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw pewien lemat, albo inaczej powiedziawszy sposób, w który będziemy dzielić osoby do grup.

Lemat: W grupie mamy $2n$ osób, osoby te są połączone krawędziami koloru czerwonego i koloru niebieskiego. Z każdej osoby wychodzi dokładnie jedna krawędź niebieska i jedna czerwona. Wówczas możemy podzielić osoby na dwie równoliczne grupy, tak aby w obrębie każdej z nich nie było żadnych krawędzi. Dowód tego lematu jest jednak oczywisty, gdyż graf utworzony przez osoby i krawędzie obu typu

będzie się składał ze spójnych składowych, a każda spójna tak naprawdę będzie cyklem długości parzystej, czyli żądany podział jest możliwy.

Teraz podzielimy każde z państw na dwie podgrupy po dwie osoby. Między osobami z jednej grupy narysujemy krawędź czerwoną. Z kolei krawędzie niebieskie narysujemy co drugą kolejną parę na okrągłym stole. Na mocy lematu dzielimy tych ludzi na dwie grupy po 50 osób bez żadnych krawędzi. Teraz z każdego państwa istnieją dwie osoby, które są w jakiejś jednej grupie. Poprowadźmy tam nowe czerwone krawędzie. Z kolei nowe niebieskie krawędzie poprowadźmy między tymi kolejnymi osobami na okrągłym stole, gdzie wcześniej nie poprowadziliśmy takiej krawędzi. W taki sposób dzielimy każdą z tych 50-osobowych grup na cztery 25-osobowe grupy. Co więcej, taki podział na gwarantuje już, że nie ma dwóch osób w tym samym państwie, ponadto nie ma dwóch sąsiadujących osób na okrągłym stole z tej samej grupy. To prowadzi do końca rozwiązania.

5. W Rabce znajduje się pewna liczba sklepów z choinkami. Niektóre z tych sklepów są połączone za pomocą jednokierunkowych dróg. Wiadomo, że dla każdego sklepu istnieją dokładnie dwie drogi zaczynające się w tym sklepie. Pokazać, że wszystkie sklepy można podzielić na maksymalnie 1014 grup, tak aby nie istniały dwa sklepy połączone drogą z tych samych grup, ponadto nie istnieją takie dwie drogi i grupy A, B , że jedna droga prowadzi ze sklepu grupy A do sklepu grupy B , a druga prowadzi ze sklepu grupy B do sklepu grupy A .

Rozwiązanie:

Najpierw pokażemy, że jeśli w grafie G liczba krawędzi wychodzących z G wynosi maksymalnie 6, to graf jest 13-kolorowalny. Wynika to bowiem z indukcji: w grafie G istnieje wierzchołek stopnia nie większego niż 12, z indukcji kolorujemy graf G bez tego wierzchołka, a następnie ostatni wierzchołek kolorujemy w taki sposób, w jaki nie jest pomalowany żaden z pozostałych sąsiadujących wierzchołków. Możemy ten lemat zaaplikować do naszego zadania: grupujemy sklepy na 13 rozłącznych grup w taki sposób, by żadne dwa sklepy między którymi jest ścieżka o długości maksymalnie 2 nie były w tej samej grupie. Następnie dokonujemy jeszcze jednego podziału w obrębie każdej z grup: dzielimy każdą z grup na 78 podgrup w zależności do jakich grup należą sklepy wychodzące z danego sklepu. W ten sposób uzyskamy podział na $13 \cdot 78 = 1014$ grup. Załóżmy, że istnieje ścieżka ze sklepu z grupy A do sklepu z grupy B i vice versa. Wówczas ze jak mamy ścieżkę ze sklepu typu A do sklepu typu B , to ze sklepu typu B musi być odpowiednia ścieżka do sklepu typu A' , gdzie A i A' należą do jednej z tych większych 13 grup. To przeczy konstrukcji tych 13 grup. W ten sposób uzasadniliśmy fakt, że konstrukcja spełnia warunki zadania.

6. Powiemy, że liczba całkowita dodatnia n jest m -przedstawialna, jeśli jest możliwe, aby uzyskać n przez m cyfr oraz sześciu operacji $+, -, \times, \div, ^, \oplus$ ($\oplus$ oznacza złączenie dwóch liczb, na przykład $16 \oplus 73 = 1673$). Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia N , taka, że każda liczba N -cyfrowa jest $N - 1$ -przedstawialna.

Rozwiązanie:

Najpierw udowodnimy następujący lemat:

Lemat: Jeśli liczba l ma $m > 2$ cyfr oraz jest podzielna przez 7^5 , to jest $m - 1$

przedstawialna.

Dowód: Zauważmy, że $7^5 > 10000$, ale ponieważ $l = 7^5 \cdot t$, to t ma mniej niż $n - 3$ cyfr, czyli t jest $n - 3$ przedstawialna, a zatem $l = 7^5 \cdot t$ jest $m - 1$ -przedstawialna. Zauważmy teraz, że jak weźmiemy liczbę k -cyfrową, która jest $k - 1$ -przedstawialna, to po dopisaniu pewnych cyfr do początku i końca tej liczby (tak, aby na końcu otrzymać liczbę mającą $k + l$ cyfr), otrzymana liczba będzie $k + l - 1$ -przedstawialna. W związku z tym na mocy naszego lematu wystarczy dla dowolnej liczby N -cyfrowej znaleźć podciąg cyfr, który będzie podzielny przez 7^5 . Niech $N > 4 \cdot 7^5$. Wówczas patrzymy na następujące ciągi: $e_4 e_3 e_2 e_1, e_8 e_7 e_6 e_5 e_4 e_3 e_2 e_1, \dots, e_{4 \cdot 7^5} e_{4 \cdot 7^5 - 1} \dots e_1$, gdzie $e_1, e_2, \dots$ oznaczają kolejne cyfry od prawej liczby N -cyfrowej. Albo jedna z tych liczb będzie podzielna przez 7^5 , wtedy albo teza zadania będzie działać na mocy lematu, ewentualnie ten ciąg będzie składał się z samych zer, i wtedy przedstawimy ten ciąg jako 10 podniesione do odpowiedniej potęgi. W innym razie pewne dwie z liczb będą dawały taką samą resztę modulo 7^5 , czyli ich różnica będzie podzielna przez 7^5 . Dostajemy inny ciąg cyfr podzielny przez 7^5 i powtarzamy nasze rozumowanie.

Algorytmy

Jan Fornal

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Turniejem nazywamy graf pełny skierowany o n wierzchołach, taki, że między dowolnymi dwoma różnymi wierzchołkami jest dokładnie jedna krawędź. Ścieżka Hamiltona to ścieżka długości $n - 1$, która przebiega przez wszystkie wierzchołki grafu. Wykazać, że istnieje turniej, w którym jest n wierzchołków i co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$ ścieżek Hamiltona.

Rozwiązanie:

Najpierw wybierzmy skierowanie wszystkich krawędzi grafu G o n wierzchołkach, kierunek każdej krawędzi wybieramy niezależnie z równym prawdopodobieństwem. Weźmy wszystkie permutacje zbioru wierzchołków G . Wówczas wartość oczekiwana liczby ścieżek Hamiltona będzie równa sumie wartości oczekiwanych zmiennych losowych X_π , gdzie X_π przyjmuje wartość 1, gdy wierzchołki w permutacji π tworzą ścieżkę Hamiltona, albo 0, gdy tak się nie dzieje. Powyższa własność wynika z liniowości wartości oczekiwanej. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że n pewnych wierzchołków w określonej kolejności tworzy ścieżkę Hamiltona wynosi $\frac{1}{2^{n-1}}$, dokładnie taka sama jest wartość oczekiwana X_π dla dowolnej permutacji π . W związku z tym wartość oczekiwana liczby ścieżek Hamiltona w całym grafie jest równa $\frac{n!}{2^{n-1}}$. Istnieje taki wybór skierowań krawędzi, aby tych ścieżek było co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$, co chcieliśmy pokazać.

2. Dany jest graf G mający n wierzchołków, które są ponumerowane liczbami od 1 do n , oznaczmy przez d_i stopień i -tego wierzchołka. Udowodnić, że istnieje zbiór wierzchołków $X \subset V(G)$, w którym żadne dwa nie są ze sobą połączone, ponadto jego moc jest nie mniejsza niż

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1}.$$

Rozwiązanie:

Wybieramy najpierw z równym prawdopodobieństwem permutację zbioru n wierzchołków grafu G . Dla każdej permutacji będziemy w następujący sposób wybierali niezależny zbiór grafu G : do niezależnego zbioru wrzucimy wszystkie takie wierzchołki, które połączone są tylko z wierzchołkami, które występują później w naszej permutacji. Łatwo zauważyć, że każdy taki zbiór $f(G)$ będzie niezależny. Będziemy chcieli obliczyć wartość wyrażenia $E[|f(G)|]$. Wiadomo, że $E[|f(G)|] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$, gdzie X_i oznacza zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy i -ty wierzchołek grafu G jest w zbiorze $f(G)$, albo 0 w przeciwnym razie. Prawdopodobieństwo tego, że

wierzchołek o numerze i w permutacji trafi przed swoimi sąsiadami wynosi $\frac{1}{d_i+1}$. W związku z tym $E[|X_i|] = P(X_i) = \frac{1}{d_i+1}$, czyli $E[|f(G)|] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i+1}$. Dla pewnej permutacji wyrażenie $|f(G)|$ przyjmie wartość nie mniejszą niż $E[|F(G)|]$, a to chcieliśmy dokładnie pokazać.

3. Dany jest zbiór X , który zawiera 2^{500} punktów na okręgu. Punkty te ponumerowane są od 1 do 2^{500} w pewnej kolejności. Pokazać, że można wybrać 100 parami rozłącznych łuków o końcach w zbiorze X , takich, że suma liczb na końcach łuków jest taka sama dla każdego łuku.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu będziemy korzystali z rezultatu uzyskanego podczas poprzedniego zadania. Pokolorujmy najpierw wszystkie łuki w zależności jaka wynosi suma liczb na końcach łuków. Jeśli $2n = 2^{500}$, to suma końców łuków może przyjmować wartości: $3, 4, 5, \dots, 4n-1$, czyli będziemy potrzebowali $4n-3$ kolorów. Powiemy, że między dwoma łukami tego samego koloru jest krawędź, jeżeli przecięcie tych łuków (rozumianych w kategorii zbiorów domkniętych) jest niepuste. Załóżmy, że pomiędzy końcami pewnego łuku jest dokładnie i punktów. Wtedy stopień takiego łuku wynosi co najwyżej i . Niech G_c będzie grafem, którego wierzchołkami będą łuki koloru c , natomiast $f(H)$ oznacza moc największego niezależnego zbioru H . Wówczas na mocy poprzedniego zadania: $\sum_c f(G_c) \geq 2n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$. W związku z tym dla pewnego koloru będziemy mieli, że $f(G_c) \geq \frac{2n}{4n-3} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$. Łatwo oszacować sumę $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$ z dołu przez 249 (korzystamy z znanego triku $\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$). W związku z tym $f(G_c) \geq \frac{249}{2} > 100$, czyli dowiedliśmy tezę zadania.

4. Udowodnić, że istnieje stała c mniejsza niż 1, taka, że dla każdego wielokąta P o polu 1 istniał wektor o długości $\frac{1}{100}$, tak aby otrzymany obraz translacji Q wielokąta P miał tę własność, że $P \cap Q$ ma pole nie większe niż c .

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $f(\theta)$ pole figury $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ dla translacji o kierunku θ . Jeżeli pokażemy, że $\mathbb{E} f(\theta) < c$, to z własności wartości oczekiwanej dostaniemy tezę zadania. Niech A_0 będzie losowo wybranym punktem z $\mathcal{P}$, natomiast A_1 będzie też losowo wybranym punktem w odległości $\frac{1}{100}$ od A_0 . Zauważmy, że zachodzi równość $\mathbb{E} f(\theta) = \mathbb{P}(A_1 \in \mathcal{P})$. Załóżmy, że teza zadania nie działa, innymi słowy możemy uczynić to prawdopodobieństwo dowolnie bliskie 1. Teraz niech A_2 będzie losowo wybranym punktem w odległości $\frac{1}{100}$ od A_1 . Ponieważ rozkład A_1 nie ma skończonej gęstości prawdopodobieństwa w żadnym punkcie, możemy powiedzieć, że $\mathbb{P}(A_2 \in \mathcal{P})$ też jest dowolnie bliskie 1. Kontynuujemy ten proces, poprzez definiowanie punktów $A_3, A_4, \dots, A_{100}$ tak jak wcześniej A_1 i A_2 . Również tak jak w przypadku A_2 , możemy sprawić, aby $\mathbb{P}(A_{100} \in \mathcal{P})$ było dowolnie blisko 1. Teraz ustalamy A_0 , oraz niech X znajduje się w okręgu jednostkowym o środku A_0 poza $\mathcal{P}$. Prawdopodobieństwo, że A_{100} trafi nam w otoczenie X jest dodatnie, ponieważ punkty A_0 , które zawierają otoczenie X w promieniu 1, też mają gęstość dodatnią, to z dodatnim prawdopodobieństwem otrzymujemy, że A_{100} jest poza $\mathcal{P}$. To nas prowadzi do sprzeczności z tego, co powiedzieliśmy o $\mathbb{P}(A_{100} \in \mathcal{P})$.

5. Niech G będzie grafem, który ma e krawędzi i n wierzchołków, ponadto spełniona jest nierówność $e \geq 4n$. Udowodnić, że liczba przecięć krawędzi grafu G jest nie mniejsza niż $\frac{e^3}{64n^2}$.

Rozwiązanie:

Dla dowolnego grafu G oznaczmy przez $cr(G)$ liczbę przecięć krawędzi grafu G , $V(G)$, $E(G)$, $F(G)$ to klasycznie zbiór wierzchołków, krawędzi i ścian grafu G (ściany rozważamy tylko dla grafów planarnych). Zauważmy, że jeśli graf jest planarny, to wtedy $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ oraz $3|F(G)| \leq 2|E(G)|$. Z tych dwóch faktów możemy dojść do równości $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. Rozważając teraz już wszystkie grafy możemy dojść do nierówności: $cr(G) \geq |E(G)| - 3|V(G)| + 6 > |E(G)| - 3|V(G)|$ (gdyby pierwsza nierówność nie działała to wtedy usuwając te krawędzie, które mają przecięcia, doszlibyśmy do grafu planarnego, w którym nierówność $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ nie zachodziłaby). Teraz będziemy wybierali wierzchołki grafu G z prawdopodobieństwem równym p , gdzie p później ustalimy. W ten sposób uzyskamy nowy graf H , w których krawędzie będą należały do $|V(G)|$ oraz będą indukowane z H w sposób naturalny. Oczekiwana liczba wierzchołków $E[|V(H)|]$ wynosi $p|V(G)|$, oczekiwana liczba krawędzi $E[|E(H)|]$ to po prostu $p^2|E(G)|$, a oczekiwana liczba przecięć krawędzi to $E[|cr(H)|] = p^4|cr(G)|$. Ponieważ dla dowolnego wyboru H wyrażenie $|cr(H)| - |E(H)| + 3|V(H)|$ przyjmuje wartość dodatnią, to wartość oczekiwana również będzie dodatnia dla takiego wyrażenia. Wynosi ona dokładnie $p^4|cr(G)| - p^2|E(G)| + 3p|V(G)| > 0$. Jeśli weźmiemy $p = \frac{4|E(G)|}{|V(G)|}$, to dostaniemy tęzę zadania.

6. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $k > 2$ istnieje graf prosty G , w którym każdy wierzchołek ma stopień nie większy od k , nie istnieje cykl krótszy niż k oraz stosunek liczby krawędzi do liczby wierzchołków wynosi co najmniej $\frac{k}{2019}$.

Rozwiązanie:

Jeśli $k < 2019$, to biorąc odpowiednio dużą ścieżkę prostą, dostajemy graf, który spełnia warunki zadania. Teraz skupmy się na przypadku $k \geq 2019$. Ustalmy odpowiednio duże n , ponadto dla każdej krawędzi losujemy z prawdopodobieństwem $\frac{k}{n}$, czy ma należeć do naszego grafu. Zauważmy, że liczba krawędzi otrzymanego grafu reprezentuje nam rozkład Bernoulliego, powiedzmy, że liczba krawędzi jest reprezentowana przez zmienną losową X . Wartość oczekiwana liczby krawędzi wynosi $\mathbb{E}[X] = \frac{k(n-1)}{2}$, natomiast wariancja $Var[x] = \frac{k(n-1)(n-k)}{2n}$. Z nierówności Czebyszewa prawdopodobieństwo tego, że $X - \mathbb{E}[X] \geq -\sqrt{2Var[X]}$ wynosi co najmniej $\frac{3}{4}$. Łatwo zauważyć, że $\sqrt{2Var[X]} \leq \frac{E[X]}{3}$, czyli prawdopodobieństwo tego $X > \frac{2\mathbb{E}[X]}{3} = \frac{k(n-1)}{3}$ jest większe niż $\frac{3}{4}$. Niech X_1 oznacza liczbę cykli długości większych niż k oraz X_2 oznacza sumę wyrażen $(deg(v) - k)$ po wszystkich wierzchołkach v o stopniu większym niż k . Zauważmy, że dla każdego grafu G możemy w ten sposób skonstruować graf G' , który ma $X - X_1 - X_2$ krawędzi, wszystkie cykle o długości nie mniejszej niż k oraz wszystkie wierzchołki o stopniu maksymalnie k . Zauważmy, że wszystkich potencjalnych cykli o długości t jest $\frac{n!}{(n-t)!t}$. Zatem prawdopodobieństwo,

że wybierzemy wszystkie krawędzie cyklu długości t to $\frac{n!}{t(n-t)!} \cdot \frac{k^t}{n^t}$. Zatem

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{t=3}^k \frac{n!}{t(n-t)!} \cdot \frac{k^t}{n^t} \leq \sum_{t=3}^k \frac{k^t}{t},$$

zatem wartość oczekiwana X_1 jest zależna tylko od k . Zatem prawdopodobieństwo tego, że $X_1 < 4\mathbb{E}[X_1] < \epsilon n$ jest większe niż $\frac{3}{4}$. Teraz oszacujemy wyrażenie $\mathbb{E}[X_2]$. Niech $p = \frac{k}{n}$. Prawdopodobieństwo tego, że dany wierzchołek ma stopień t wynosi $\binom{n-1}{t} p^t (1-p)^{n-t-1}$. Zatem widzimy, że

$$\mathbb{E}[X_2] = n \sum_{t=1}^{n-k-1} t \binom{n}{k+t} p^{k+t} (1-p)^{n-k-1-t}.$$

Dalej widzimy, że prawa strona jest równa

$$\begin{aligned} n(1-p)^{n-1} & \left(\sum_{t=0}^{n-1} \left(t \left(\frac{k}{n-k} \right)^t \binom{n-1}{t} - \sum_{t=0}^{n-1} k \left(\frac{k}{n-k} \right)^t \binom{n-1}{t} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{t=0}^k (k-t) \left(\frac{k}{n-k} \right)^t \binom{n-1}{t} \right). \end{aligned}$$

Wyrażenie $(1-p)^{n-1}$ można szacować dla dużych n jako e^{-k} . Ze wzorów dwumianowych Newtona dostajemy, że pierwsza z tych sum to $\frac{k(n-1)}{(n-k)} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{n-2}$, a druga to $k \left(\frac{n}{n-k} \right)^{n-1}$, czyli ich różnica to $\left(\frac{n}{n-k} \right)^{n-2} \cdot \frac{-k}{n-k}$, co jest rzędu e^k , czyli pomnożone przez ne^{-k} da nam coś rzędu n . Zauważmy, że

$$ne^{-k} \sum_{t=0}^k (k-t) \left(\frac{k}{n-k} \right)^t \binom{n-1}{t} \leq ne^{-k} \sum_{t=0}^k (k-t) \frac{k^t}{t!}.$$

Dalej widzimy, że prawa strona to po prostu $ne^{-k} \frac{k^{k+1}}{k!}$. Szacując ze wzoru Stirlinga dostajemy, że to jest równe $n\sqrt{\frac{k}{2\pi}}$, czyli mniejsze niż $\frac{nk}{50}$. Zatem $\mathbb{E}[X_2]$ można oszacować przez $\frac{nk}{50}$. Zatem z prawdopodobieństwem co najmniej $\frac{3}{4}$ $X_2 < \frac{3nk}{50}$. Możemy sprawić, by zarówno X było duże oraz X_1 i X_2 były małe, wtedy $X - X_1 - X_2 \geq \frac{nk}{3} - X_1 - \frac{3nk}{50} \geq \frac{nk}{2019}$ (gdyż X_1 będzie tylko zależał od k). Dla takiego wyboru grafu liczba krawędzi będzie większa niż $\frac{nk}{2019}$, czyli odpowiedni stosunek będzie spełniał warunki zadania.

7. Dany jest graf dwudzielny G , który ma n wierzchołków. Przy każdym wierzchołku jest lista, która zawiera więcej niż $\log_2 n$ kolorów. Udowodnić, że istnieje takie kolorowanie, że każdy wierzchołek jest pokolorowany przy użyciu jednego z kolorów z odpowiadającej listy, ponadto żadne dwa wierzchołki połączone krawędziami nie są pomalowane przy użyciu tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Założmy, że $V(G) = A \cup B$ oraz między wierzchołkami A i B nie istnieją żadne krawędzie. Zauważmy najpierw, że lista wszystkich kolorów na wszystkich listach ma skończenie wiele elementów. Dla każdego koloru z generalnej listy wybieramy jedną z grup A lub B z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, potem kolorujemy wszystkie wierzchołki z wybranej grupy, które jeszcze nie zostały pomalowane, oraz mają odpowiedni kolor na swojej liście. Zależy nam zatem na pokazaniu, że istnieje taki wybór tych grup dla odpowiednich kolorów, żeby każdy wierzchołek został pomalowany. Niech X_i oznacza zdarzenie odpowiadające nie pomalowaniu i -tego wierzchołka. Wystarczy pokazać, że $P(\cup_{i=1}^n X_i) < 1$. Widzimy, że $P(X_i) = \frac{1}{2^t}$, gdzie t oznacza liczbę kolorów na liście i -tego wierzchołka. Ponieważ $t > \log_2 n$, czyli $P(X_i) < \frac{1}{n}$, czyli $P(\cup_{i=1}^n X_i) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i) < 1$, co kończy rozwiązanie.

8. Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ oraz $B_1, \dots, B_n$ będą skończonymi zbiorami liczb całkowitych dodatnich. Wiadomo, że A_i oraz B_i są rozłączne dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ natomiast gdy $i \neq j$, to przecięcie $A_i \cap B_j$ jest niepuste. Wykazać, że:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$

Rozwiązanie:

Weźmy zbiór S będący sumą mnogościową wszystkich zbiorów A_i oraz B_j . Następnie losowo wybieramy permutację elementów S . Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo tego, że w permutacji wszystkie elementy A_i wystąpią przed elementami z B_i . Nietrudno sprawdzić, że $p_i = \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}}$. Ponadto nie jest możliwe aby jednocześnie występowały wszystkie wartości z A_i a potem z B_i dla dwóch różnych i . Na podstawie tego stwierdzamy, że $\sum_{i=1}^n p_i \leq 1$, co implikuje nam tezę zadania.

Wielomiany

Jan Fornal

1. Dany jest wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia parzystego. Współczynnik wiodący wielomianu P jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej. Wiadomo również, że istnieje nieskończenie wiele liczb $n \in \mathbb{Z}$, dla których $P(n)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Pokazać, że wielomian P jest kwadratem innego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Założmy, że $P(x) = a^2x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Teraz znajdziemy takie liczby wymierne $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ oraz wielomian $Q(x) = ax^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$, tak aby wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)^2$ miały takie same współczynniki przy x^k , gdzie $k \geq n$. Zauważmy, że współczynniki przy x^{2n-1} w wielomianach $P(x)$ oraz $Q(x)^2$ są równe, gdy $a_{2n-1} = 2ab_{n-1}$. W ten sposób mamy zdefiniowaną liczbę b_{n-1} . Następnie porównujemy współczynniki przy x^{2n-2} , otrzymując $a_{2n-2} = 2ab_{n-2} + b_{n-1}^2$, zatem możemy również określić, ile wynosi liczba b_{n-2} . W podobny sposób wyliczamy $b_{n-3}, \dots, b_0$, dostając, że stopień wielomianu $R(x) = P(x) - Q(x)^2$ jest równy co najwyżej $n-1$. Powiedzmy, że $t \in \mathbb{Z}$ jest taką liczbą, że $tQ(x)$ ma tylko współczynniki całkowite, wówczas $t^2P(x) = (tQ(x))^2 + t^2R(x)$. Ponadto jak weźmiemy x takie, że $P(x)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to albo $R(x) = 0$, albo $|t^2R(x)| \geq 2|tQ(x)| - 1$. Ponieważ stopień lewej strony nierówności wynosi maksymalnie $n-1$, a prawej n , to ta nierówność zachodzi jedynie dla skończonej liczby x . Zatem jeśli istnieje nieskończenie wiele x spełniających warunki zadania, to istnieje też nieskończenie wiele x , dla których $R(x) = 0$, stąd wnioskujemy, że wielomian R jest zerowy. Teraz otrzymujemy, że $P(x) = Q(x)^2$, gdzie P ma współczynniki całkowite, a Q wymierne. Korzystając z lematu Gaussa stwierdzamy, że Q ma współczynniki całkowite, czyli to co chcieliśmy uzyskać.

2. Dany jest wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, który dla dowolnej liczby całkowitej przyjmuje wartość będącą kwadratem liczby całkowitej. Pokazać, że wielomian P jest kwadratem innego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy rozkład wielomianu $P(x)$ na czynniki pierwsze $P(x) = a \prod_{i=1}^n Q_i(x)^{\alpha_i}$, gdzie wszystkie wielomiany Q_i są nierozkładalne. Najpierw wykażemy, że nie istnieje α_i , które jest nieparzyste. Założmy, że tak nie jest. Wówczas dla takiego i bierzemy odpowiednio dużą liczbę pierwszą p oraz k , tak, aby $p|Q_i(k)$. Taka liczba pierwsza istnieje na mocy twierdzenia Schura, które mówi że dla każdego niestałego wielomianu istnieje nieskończenie wiele takich pierwszych. Wiemy, że $Q_i(x)$ jest względnie pierwsze $Q_j(x)$ dla $j \neq i$ oraz z $Q'_i(x)$. Zatem dla każdego z tych wielomianów

możemy zastosować algorytm Euklidesa w taki sposób, by uzyskać wielomiany A i B o współczynnikach całkowitych oraz stałą M , żeby $A(x)Q_j(x) + B(x)Q_i(x) = M$ (dla każdego j mamy niekoniecznie takie same wielomiany A, B i stałą M), również $A_i(x)Q_i(x) + B_i(x)Q'_i(x) = M_i$. Biorąc p większe od wszystkich takich M, M_i oraz a , dostajemy, że p nie dzieli żadnej z liczb $Q_j(k)$ oraz $Q'_i(k)$. Teraz możemy stwierdzić, że wykładnik p -adyczny liczby $P(k)$ jest równy wykładnikowi p -adycznemu liczby $Q_i(k)$ pomnożonej przez α_i . Zatem $p^2 | Q_i(k)$, gdyż wykładnik p -adyczny liczby $Q_i(k)$ jest dodatni i parzysty. Również możemy taki sam argument zastosować dla $Q_i(k+p)$, gdyż $p | Q_i(k+p)$. W związku z tym ze wzoru Taylora dostajemy, że $Q_i(k+p) \equiv Q_i(k) + pQ'_i(k) \pmod{p^2}$, co pozwala nam stwierdzić, że $p | Q'_i(k)$. Wtedy byśmy musieli mieć $p | M_i$, ale M_i jest różne od 0 i $p > |M_i|$, co prowadzi nas do sprzeczności z warunkiem o nieparzystości α_i . W związku z tym wszystkie α_i są parzyste. Szybko też stwierdzamy, że a też musi być kwadratem, skąd dostajemy tezę zadania.

3. Udowodnić powyższe dwa twierdzenia dla trzecich i wyższych potęg.

Rozwiązanie:

Patrz rozwiązania do zadań 1 i 2.

4. Dany jest wielomian dwóch zmiennych $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$. Liczbę $x \in \mathbb{Z}$ nazwiemy przyjemną, jeśli istnieje taki $y \in \mathbb{Z}$, że $P(x, y) = 0$. Wiemy, że każdy nieskończony ciąg arytmetyczny liczb całkowitych zawiera przynajmniej jedną liczbę przyjemną. Pokazać, że istnieje wielomian $T(x) \in \mathbb{Q}[x]$, taki, że $P(x, T(x))$ jest wielomianem zerowym zmiennej x .

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy bez dowodu z dwóch faktów:

Lemat 1. Dane są liczby całkowite dodatnie $k < n$ i m oraz wielomiany o współczynnikach całkowitych $P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_m(x_1, \dots, x_n)$. Wówczas istnieje nieskończenie ciągów o wyrazach w liczbach całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_k$, dla których wielomiany $P_i(a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ są nierozkładalne dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Warto wspomnieć, że to twierdzenie jest znane jako twierdzenie Hilberta o nierozkładalności.

Lemat 2. Dany jest nierozkładalny wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia większego niż 1. Wówczas istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p , takich, że nie istnieje k , dla którego $p | P(k)$

Teraz rozpatrzmy rozkład wielomianu $P(x, y)$ na czynniki pierwsze $P(x, y) = a \prod_{i=1}^n Q_i(x, y)^{\alpha_i}$, gdzie Q_i są wielomianami nierozkładalnymi. Dla danego wielomianu przez stopień y -owy będziemy rozumieli największą potęgę y , że istnieje wyraz w Q_i z tą potęgą. Zauważmy, że możemy wywalić z wielomianu $P(x)$ wszystkie czynniki Q_i , które mają współczynnik y -owy równy 0. Wynika to stąd, że mogą się one zerować w skończonej liczbie iksów, a co za tym idzie, każdy ciąg arytmetyczny będzie nadal zawierał jedną liczbę przyjemną, nawet poza tym skończonym zbiorem. Pokażemy, że istnieje i , że stopień y -owy wielomianu Q_i wynosi jeden. Gdyby tak nie było,

to znajdujemy x_0 takie, że wielomiany $Q_i(x_0, y)$ są nierozkładalne z lematu pierwszego, ponadto pilnujemy, aby stopnie y -owe Q_i były równe odpowiednio stopniom Q_i . W związku z tym wielomiany dla każdego i istnieje p_i , takie, że p_i nigdy nie dzieli $Q_i(x_0, y)$ (lemat 2). Weźmy $x \equiv x_0 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_k}$, wtedy $P(x, y) = 0$ jest równoważne temu, że $Q_i(x, y) = 0$, dla pewnego i , czyli $0 \equiv Q_i(x, y) \equiv Q_i(x_0, y) \pmod{p_i}$, co daje sprzeczność z tym co założyliśmy na podstawie lematu 2. Powiedzmy teraz bez straty ogólności, że stopnie y -owe wielomianów $Q_1, Q_2, \dots, Q_j$ są równe 1, a wielomianów $Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_k$ są większe niż 1. Będziemy chcieli powiedzieć, że dla któregoś z Q_i , gdzie $i \leq j$ istnieje nieskończenie wiele liczb przyjemnych. Ponownie jak wcześniej zdefiniujemy odpowiednie x_0 , tak aby wielomiany $Q_{j+1}(x_0, y), \dots, Q_k(x_0, y)$ były nierozkładalne oraz liczby $p_{j+1}, \dots, p_k$. Wówczas ciąg $x \equiv x_0 \pmod{p_{j+1} \cdots p_k}$ zawiera tylko liczby przyjemne któryś z wielomianów $Q_1, \dots, Q_j$. Ponieważ tych liczb przyjemnych jest nieskończenie wiele, to któryś Q_i będzie miał nieskończenie wiele liczb przyjemnych. Załóżmy bez straty ogólności, że $i = 1$. Wtedy $Q_1(x, y) = A(x)y + B(x)$. Ponieważ istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych k , takich, że $A(k)|B(k)$, to z możemy stwierdzić, że A i B jako wielomiany się dzielą, czyli podstawiając $y = \frac{B(x)}{A(x)} = T(x)$ dostajemy, że $P(x, T(x)) = 0$.

5. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ istnieje u całkowite, że $P(x) = u^3 + u$. Pokazać, że istnieje wielomian $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, dla którego zachodzi równość: $P(x) = (Q(x))^3 + Q(x)$

Rozwiązanie:

Stosujemy dowód zadania 4 dla wielomianu $W(x, y) = y^3 + y - P(x)$. Z niego wynika przede wszystkim, że wielomian $W(x, y)$ musi mieć czynnik będący wielomianem pierwszego stopnia zmiennej y . Nietrudno zauważyć, że jeśli potraktujemy ten czynnik jako wielomian zmiennej y , to będzie miał współczynnik przy y równy 1, gdyż wielomian $y^3 + y - P(x)$ jako wielomian zmiennej y jest moniczny. Zatem mamy, że $y - Q(x) | y^3 + y - P(x)$, więc możemy powiedzieć nie tylko, że wielomian Q , który istnieje na mocy zadania 4 będzie miał współczynniki wymierne, lecz nawet całkowite. To kończy rozumowanie.

6. Rozstrzygnąć czy istnieje nieskończony zbiór A liczb całkowitych dodatnich, że dla dowolnych parami różnych a, b, c ze zbioru A liczba $abc + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

Rozwiązanie:

Weźmy parami różne liczby $a, b, c, d \in A$ i rozważmy wielomian $P(x) = (xab + 1)(xbc + 1)(xcd + 1)(xda + 1)$ jego stopień wynosi 4, współczynnik wiodący to $(abcd)^2$ oraz dla każdego $x \in A \setminus \{a, b, c, d\}$ jest to kwadrat liczby całkowitej. Jeśli zbiór A jest nieskończony, to z zadania pierwszego stwierdzamy, że $P(x)$ jest kwadratem innego wielomianu, czyli może mieć on dwa pierwiastki dwukrotne, albo jeden czterokrotny. Tymczasem $ab \neq bc$, czyli $ab = cd$ oraz $bc = ad$, te dwie równości doprowadzają nas do $b^2 = d^2$, czyli $b = d$, sprzeczność. Zatem nie istnieje nieskończony zbiór A spełniający warunki zadania.

7. Pokazać, że równanie $(x+1)(x+2)\cdots(x+k) = y^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań:

- a) gdzie k jest parzyste,
- b) gdzie k jest nieparzyste.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pierwszy podpunkt wynika w sposób jasny z zadania nr 1, czyli możemy się tylko skupić na podpunkcie drugim. Zauważmy, że jeśli wyrażenie $(x+1)(x+2)\cdots(x+k)$ jest kwadratem, to każdą z liczb $x+1, x+2, \dots, x+k$ można przedstawić jako $x+i = c_i d_i^2$, gdzie c_i jest bezkwadratowe i ma dzielniki pierwsze mniejsze niż k . Gdyby $p|c_i$ oraz $p \geq k$, to możemy łatwo stwierdzić, że $p|c_j$ dla innego j , czyli $p|(x+i) - (x+j)$, co nam daje, że $p|i-j$. Jednakże $i-j$ jest mniejsze niż k , a więc dostajemy sprzeczność. W związku z tym ciąg $c_1, c_2, \dots, c_k$ może przyjmować skończenie wiele różnych wartości, czy dla nieskończonej gamy rozwiązań T liczby $c_1, c_2, \dots, c_k$ będą takie same. Również dla iloczynu $S = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_s) = c_S d_S^2$, gdzie $s = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, liczba c_S jest bezkwadratowa i ma dzielniki pierwsze mniejsze niż k . Gdyby $p|c_S$ oraz $p \geq k$, to wtedy dla pewnego i $p|c_{a_i}$, a my wiemy, że tak być już nie może. Oczywiście też jeśli x_1 i x_2 należą do T , to liczby $S_1 = (x_1+a_1)\cdots(x_1+a_s)$ oraz $S_2 = (x_2+a_1)\cdots(x_2+a_s)$ mają taką samą część bezkwadratową. Różnych możliwości wyboru ciągu $a_1, \dots, a_s$ jest dokładnie $\binom{k}{s}$. Jeżeli pokażemy, że $2^{\pi(k-1)} < \binom{k}{s}$, to z zasady szufladkowej Dirichleta dostaniemy, że istnieją takie dwa iloczyny S_1 i S_2 , które dla każdego $x \in T$ będą miały taką samą część bezkwadratową. Tymczasem $2^{\pi(k-1)} \leq 2^{\frac{k-1}{2}} < \frac{2^k}{k+1} \leq \binom{k}{s}$, co wynika z łatwych szacowań, czyli takie dwa iloczyny rzeczywiście istnieją. Jeśli $S_1 = (x+a_1)\cdots(x+a_s)$ oraz $S_2 = (x+b_1)\cdots(x+b_s)$ mają taką część bezkwadratową dla każdego $x \in T$, to $P(x) = (x+a_1)\cdots(x+a_s)(x+b_1)\cdots(x+b_s)$ jest kwadratem dla nieskończenie wielu x . Korzystając z zadania pierwszego, $P(x)$ jest kwadratem innego wielomianu, czyli wszystkie jego pierwiastki są co najmniej dwukrotne. W związku z tym ciągi $a_1, a_2, \dots, a_s$ i $b_1, \dots, b_s$ muszą mieć dokładnie takie same elementy, ale to nam daje sprzeczność z naszym wyborem.

Równania funkcyjne

Radomił Baran

1. Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, taka, że

$$f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y),$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich x, y .

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że istnieje taka funkcja. Wtedy

$$f(x) - f(x+y) \geq \frac{f(x)y}{f(x)+y}.$$

Dostajemy stąd, że f jest ściśle malejącą funkcją. Dla pewnego $x \in \mathbb{R}_+$ wybierzmy taką liczbę całkowitą dodatnią, że $nf(x+1) \geq 1$. Wtedy

$$f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) \geq \frac{f\left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{f\left(x + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}} > \frac{1}{2n},$$

dla każdego całkowitego nieujemnego $k < n$, bo $f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x+1) \geq \frac{1}{n}$. Sumując takie nierówności dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ mamy

$$f(x) - f(x+1) > \frac{1}{2}.$$

Wyberzmy teraz taką liczbę całkowitą m , że $m \geq 2f(x)$. Wtedy

$$f(x) - f(x+m) = (f(x) - f(x+1)) + \dots + (f(x+m-1) - f(x+m)) > \frac{m}{2} \geq f(x),$$

czyli $f(x+m) < 0$, sprzeczność, która dowodzi, że nie ma takich funkcji f .

2. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ takie, że

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5,$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}_+$.

Rozwiązanie:

Dla danego x niech $a_0 = x$, $a_{k+1} = f(a_k)$. Mamy wtedy rekurencję

$$a_{k+3} + a_{k+2} = 2a_k + 5.$$

Odejmując to od równości

$$a_{k+4} + a_{k+3} = 2a_{k+1} + 5$$

dostajemy

$$a_{k+4} = a_{k+2} + 2a_{k+1} + 2a_k.$$

Równanie charakterystyczne ma postać $x^4 = x^2 + 2x + 2$, czyli $(x-1)^2(x^2 + 2x + 2) = 0$, tzn. 1 jest pierwiastkiem podwójnym a pozostałe dwa to $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4})$. Zatem

$$a_k = c_0 + c_1 k + 2^{\frac{k}{2}}(c_2 \cos \frac{k\pi}{4} + c_3 \sin \frac{k\pi}{4}),$$

dla pewnych stałych c_0, c_1, c_2 i c_3 , które zależą tylko od pierwszych czterech wyrazów tego ciągu. Rozważmy podciągi o indeksach przystających do 0, 2, 4 i 6 modulo 8. Wiedząc, że wyrazy tego ciągu są dodatnie można przez analizę granicy wykazać, że $c_2 \geq 0, c_3 \geq 0, c_2 \leq 0, c_3 \leq 0$, czyli $c_2 = c_3 = 0$. Zatem $a_{k+1} = a_k + c_1$, zatem z pierwszego równania rekurencyjnego dostajemy $c_1 = 1$, czyli $f(x) = x + 1$ i jest to jedyna taka funkcja.

3. Wykazać, że jeśli $a \leq 1$ to nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, która spełnia

$$f(f(x) + \frac{1}{f(x)}) = x + a,$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich x , a gdy $a > 1$ to jest nieskończenie wiele takich funkcji.

Rozwiązanie:

Rozważmy $a \leq 1$. Przypuśćmy, że istnieje taka funkcja. Niech

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}.$$

Jeśli $f(x) > 1$ to wstawiając $y = f(x) - a > 0$ w głównym równaniu mamy $f(g(y)) = f(x)$. Jednak warunek z zadania oznacza, że f jest różnowartościowa, czyli $x = g(y) \geq 2$. Zatem $f(x) < 1$ dla każdego $x \in (0; 2)$ z co najwyżej jednym wyjątkiem. Dla $x \in (0; 2)$ mamy

$$y = \frac{1}{f(x)} - a > 0, z = f(g(y)) \geq 2, f(z) = \frac{1}{f(x)}, z + a = f(g(z)) = f(g(x)) = x + a.$$

Czyli $2 \leq z = x < 2$, sprzeczność. Rozważmy teraz $a > 1$. Niech f będzie dowolną silnie rosnącą funkcją ciągłą na przedziale $[0; 2]$, dla której $f(0) = 1$ i $f(2) = a$. Wtedy warunek z zadania jednoznacznie wyznacza, że f jest silnie rosnącą ciągłą funkcją na całej dziedzinie. Żeby to pokazać weźmy $g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ i zdefiniujmy ciąg $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ przez: $a_0 = 0, a_n = g(a_{n-1})$. Przypuśćmy, że f jest silnie rosnącą funkcją ciągłą na przedziale $(a_{n-1}, a_n]$ większym niż 1. Wtedy łatwo sprawdzić, że $g(x)$ jest silnie rosnącą funkcją ciągłą na tym przedziale z $g(a_{n-1}) = a_n$ i $g(a_n) = a_{n+1}$. Zatem dla każdego $x \in (a_n, a_{n+1}]$ istnieje dokładnie jedno $y \in (a_{n-1}, a_n]$ takie, że $x = g(y)$

i wtedy $f(x) = y + a$. Z indukcji dostajemy, że f jest zdefiniowana na wszystkich liczbach dodatnich i spełnia warunek zadania.

4. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, które są rosnące na przedziale $[1, \infty)$ oraz

$$f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx}),$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich x, y i z .

Rozwiązanie:

Zastępując x, y i z przez $\frac{y}{x}, \frac{y}{x}$ i xy mamy

$$2f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) = f(1)f(x)f(y).$$

Dla $y = 1$ mamy $3f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1)^2f(x)$. W szczególności $4f(1) = f(1)^3$, czyli jako, że $f(1) > 0$ to $f(1) = 2$. Zatem $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ i otrzymaną na początku równość można zapisać

$$f(xy) = f(x)f(y) - f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dalej, ponieważ $e > 1$, to $f(e) \geq f(1) = 2$, czyli $f(e) = e^\alpha + e^{-\alpha}$ dla pewnego $\alpha \geq 0$. Korzystając z tego, że $f(x^2) = f(x)^2 - 2$, z indukcji możemy pokazać, że

$$f(e^{2^{-n}}) = e^{\alpha 2^{-n}} + e^{-\alpha 2^{-n}},$$

dla każdego n naturalnego. Pamiętając jednak, że

$$f(e^{(m+1)2^{-n}}) = f(e^{2^{-n}})f(e^{m2^{-n}}) - f(e^{(m-1)2^{-n}}),$$

dostajemy z indukcji

$$f(e^{m2^{-n}}) = e^{\alpha m 2^{-n}} + e^{-\alpha m 2^{-n}},$$

dla dowolnych liczb naturalnych m i n . Ponieważ Zbiór liczb postaci $m2^{-n}$ jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich oraz funkcja f jest rosnąca na przedziale $[1; \infty)$ to wnioskujemy, że na tym przedziale jest równa $x^\alpha + x^{-\alpha}$. Ponieważ jednak $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, to mamy tę równość dla każdego $x > 0$. Łatwo sprawdzić, że podana funkcja spełnia warunki zadania.

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, które spełniają

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x + y)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich x, y .

Rozwiązanie:

Jedynym rozwiązaniem jest $f(x) \equiv \frac{1}{x}$. Udowodnimy to poprzez następujące fakty.

Niech $P(x, y)$ oznacza podstawienie x i y do głównego równania.

Fakt 1: $x^2 f(x)$ jest nieograniczona z góry.

Dowód : Załóżmy przeciwnie i niech a będzie tym ograniczeniem.

Dla każdego $k > \sqrt{\frac{2a}{f(2)}}$, mamy $f(k) < \frac{f(2)}{2}$.

Z $P(1-x, 1+x)$, widzimy, że $(0, f(2)] \in f(\mathbb{R})$.

Zatem istnieje takie l , że $f(l) + f(k) = f(2)$, i z naszego założenia mamy $l < \sqrt{\frac{2a}{f(2)}}$.

Ostatecznie, $P(k, l) \implies f(f(2)) = kl f(k+l) \leq \frac{a}{\frac{k}{l} + 2 + \frac{l}{k}}$, czyli zbiegając $k \rightarrow \infty$,

możemy sprawić aby iloraz $\frac{k}{l}$ był dowolnie duży, czyli $f(f(2)) \leq 0$, sprzeczność.

Z Faktu 1 dostajemy następujący wniosek:

Wniosek 2: $f(x)$ jest surjekcją.

Dowód Dla dowolnej liczby dodatniej r niech s będzie liczbą dodatnią spełniającą

$s^2 f(s) \geq 4r$. Teraz, niech $t = \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{r}{f(s)}}$, wtedy

$$P\left(\frac{s}{2} - t, \frac{s}{2} + t\right); f\left(f\left(\frac{s}{2} - t\right) + f\left(\frac{s}{2} + t\right)\right) = r$$

A stąd mamy surjektywność f .

Fakt 3: Jeśli liczby a, b, c, d spełniają $a < b, c < d, f(a) = f(b)$, i $f(c) = f(d)$, to $a = c$ i $b = d$.

Dowód: Załóżmy przeciwnie. Bez straty ogólności $a = \min\{a, b, c, d\}$.

Jeśli $a \neq c$, to $P(c-a, a), P(c-a, b), P(d-a, a), P(d-a, b) \implies f(c+b-a) = f(d+b-a)$
 $P(b, d), P(b, c) \implies df(b+d) = cf(b+c)$
 $P(a, c+b-a), P(a, d+b-a) \implies (c+b-a)f(b+c) = (d+b-a)f(b+d) \implies c(d+b-a) = d(c+b-a) \implies (c-d)(b-a) = 0$. Czyli sprzeczność.

Zatem $a = c$, więc $b \neq d$.

Ostatecznie patrząc na czwórkę $(a', b', c', d') = (a, b, \min\{b, d\}, \max\{b, d\})$ zamiast na (a, b, c, d) , ta sama metoda implikuje, że $a = \min\{b, d\}$, czyli sprzeczność.

Fakt 3 implikuje, że istnieje co najwyżej jedna para liczb rzeczywistych dodatnich (a, b) taka, że $a < b$ i $f(a) = f(b)$.

Fakt 4: $f(x)$ jest różnowartościowa.

Proof: Załóżmy, że nie jest i weźmy takie liczby (a, b) , że $a < b$ i $f(a) = f(b)$.

$P(x, a), P(x, b) \implies af(x+a) = bf(x+b) \implies f(x+(b-a)) = \frac{a}{b}f(x) \forall x > a$

Oznaczmy $t = b-a > 0$ i $c = \frac{a}{b} < 1$, wtedy niech l będzie dodatnią liczbą rzeczywistą, spełniającą następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} l > a \\ \frac{l^2}{4} > \frac{c^2(l+2t)^2}{4} > al \\ \frac{(l+t)^2}{4} > \frac{c(l+2t)^2}{4} > a(l+t) \end{cases}$$

Wtedy istnieją $x_1, x_2, x_3, x_4 > a$ takie, że

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = l \\ x_3 + x_4 = l + t \\ x_1 x_2 = \frac{c^2(l+2t)^2}{4} \\ x_3 x_4 = \frac{c(l+2t)^2}{4} \end{cases}$$

Mamy więc $x_1x_2f(x_1+x_2) = x_3x_4f(x_3+x_4) = h^2f(2h)$ gdzie $h = \frac{l+2t}{2}$.
 Zatem, z $P(x_1, x_2), P(x_3, x_4), P(h, h)$ i Faktu 3, dostajemy, że istnieją dwa różne multizbiory $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ takie, że $y_1, y_2, z_1, z_2 > a$ i $f(y_1)+f(y_2) = f(z_1)+f(z_2)$.
 Ostatecznie widzimy, że $f(y_1+t) + f(y_2+t) = f(z_1+t) + f(z_2+t)$ i $f(y_1+2t) + f(y_2+2t) = f(z_1+2t) + f(z_2+2t)$. Czyli,

$$\begin{cases} y_1y_2f(y_1+y_2) = z_1z_2f(z_1+z_2) \\ (y_1+t)(y_2+t)f(y_1+y_2) = (z_1+t)(z_2+t)f(z_1+z_2) \\ (y_1+2t)(y_2+2t)f(y_1+y_2) = (z_1+2t)(z_2+2t)f(z_1+z_2) \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań dostajemy $y_1+y_2 = z_1+z_2, y_1y_2 = z_1z_2 \implies \{y_1, y_2\} = \{z_1, z_2\}$, sprzeczność.

Fakt 5: $x^2f(x)$ jest ściśle rosnąca.

Dowód: Załóżmy, że istnieją takie $a > b$, że $a^2f(a) \leq b^2f(b)$, wtedy $af(a) < bf(b)$ i $f(a) < f(b)$.

Niech $p = \frac{bf(b)-af(a)}{f(b)-f(a)}$, wtedy $p < b$, a więc $P(p, a-p), P(p, b-p) \implies f(f(p) + f(a-p)) = f(f(p) + f(b-p)) \implies a = b$, sprzeczność.

Wniosek 6: $f(x)$ jest ściśle monotoniczna.

Dowód: Ponieważ f jest bijekcją wystarczy udowodnić, że f jest ciągła.

Ponieważ $x^2f(x) = 4f(2f(\frac{x}{2}))$ jest surjekcją, a także jest ściśle rosnąca z Faktu 5 to $x^2f(x)$ musi być ciągła, więc także f musi być ciągła.

Fakt 7: $f(x) \equiv \frac{1}{x}$

Dowód: Rozważmy 2 przypadki:

- $f(x)$ jest ściśle rosnąca.

W tym przypadku mamy

$$\forall y \in (0, 1), f(f(1)) < f(f(1) + f(y)) = yf(1+y) < yf(2)$$

To oczywiście implikuje, że $f(f(1)) \leq 0$, sprzeczność. Zatem w tym przypadku nie ma takiej funkcji.

- $f(x)$ jest ściśle malejąca.

W tym przypadku mamy $P(1, 1) \implies f(1) = 1$

Teraz, dla każdej pary liczb rzeczywistych dodatnich $a < b$ mamy $P(a-k, k), P(b-k, k) \implies (a-k)f(a) < (b-k)f(b) \forall k \in (0, a) \implies af(a) \leq bf(b)$

Zatem $f(x) \geq \frac{1}{x}$ dla wszystkich $x \geq 1$ i $f(x) \leq \frac{1}{x}$ dla wszystkich $x \leq 1$.

Dla każdego $t > 1$, wybierzmy $T > 1$ tak żeby $\frac{1}{t} + \frac{1}{T} < 1$, wtedy $P(t, T) \implies \frac{tT}{t+T} \geq f(\frac{1}{t} + \frac{1}{T}) \geq f(f(t) + f(T)) = tTf(t+T) \geq \frac{tT}{t+T}$

Czyli, $f(\frac{1}{t} + \frac{1}{T}) = f(f(t) + f(T)) \implies \frac{1}{t} + \frac{1}{T} = f(t) + f(T) \implies f(t) = \frac{1}{t}$.

Z drugiej strony dla każdego $t < 1$, wybierzmy $T < 1$ tak żeby $t + T < 1$, wtedy $P(t, T) \implies \frac{tT}{t+T} \leq f(\frac{1}{t} + \frac{1}{T}) \leq f(f(t) + f(T)) = tTf(t+T) \leq \frac{tT}{t+T}$

Czyli, $f(\frac{1}{t} + \frac{1}{T}) = f(f(t) + f(T)) \implies \frac{1}{t} + \frac{1}{T} = f(t) + f(T) \implies f(t) = \frac{1}{t}$.

Zatem $f(x) \equiv \frac{1}{x}$ tak jak chcieliśmy.

Inwersja

Radomił Baran

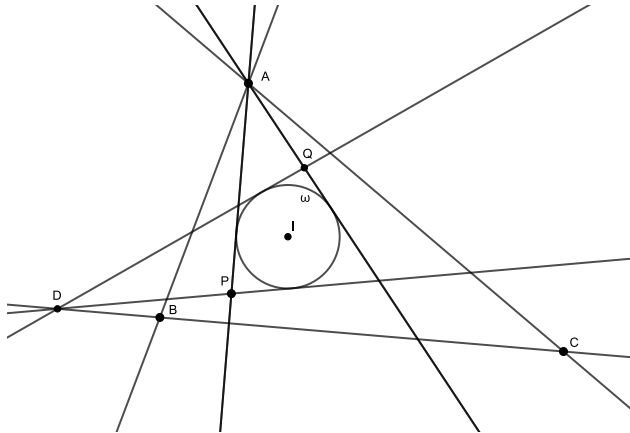
Lematy pomocnicze

W zadaniach będziemy wykorzystywać dobrze znane własności inwersji oraz następujące lematy

Lemat 1. Punkty P i Q są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego lub dopisanego do trójkąta ABC . Okrąg ω jest styczny do prostych AP i AQ , a jego środkiem jest I . Wykazać, że drugie styczne do ω z punktów P i Q przecinają się na prostej BC .

Rozwiązanie:

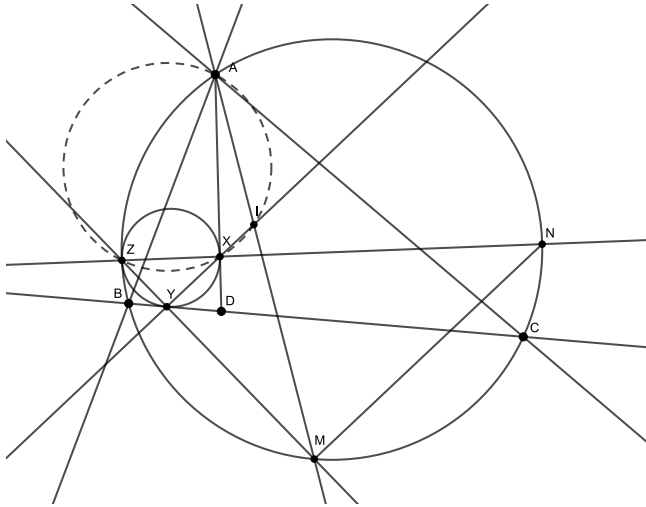
Niech D będzie przecięciem drugich stycznych z P i Q do ω . Z twierdzenia dualnego do inwolucyjnego twierdzenia Desarguesa wiemy, że istnieje inwolucja rzutowa na pęku prostych z wierzchołka B , która przekształca BA na BD , BP na BQ i styczne z B do ω na siebie. Jednak Dwie ostatnie pary są też obrazami w symetrii względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$, a inwolucja rzutowa jest wyznaczona przez 2 pary punktów (lub prostych), więc proste BD i BA muszą też być symetryczne względem dwusiecznej $\sphericalangle ABC$, czyli $D \in BC$.



Lemat 2. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC . Okrąg ω jest styczny do odcinków AD i BD w punktach X i Y oraz do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie Z . Niech jeszcze I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wtedy punkty I , X i Y są współliniowe oraz punkty A , I , X i Z leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem łuku BC . Wtedy punkty M , I i A są współliniowe. Jednak również jednokładność, o środku w Z przekształcająca ω na okrąg opisany na ABC przekształci Y na M bo prosta styczna do okręgu opisanego przez M jest równoległa do BC . Zatem M , Y i Z są współliniowe. Niech J będzie punktem przecięcia prostych AM i XY . Chcemy żeby $I = J$. Niech jeszcze prosta ZX przecina okrąg opisany na ABC w punkcie N . Wtedy z jednokładności w Z wiemy, że $XY \parallel MN$. Zatem $\sphericalangle AZX = \sphericalangle AMN = \sphericalangle XJM$, czyli punkty Z , X , J i A leżą na jednym okręgu. Zauważmy teraz, że $\sphericalangle XZY = \sphericalangle DYX = \sphericalangle DXY = \sphericalangle AXJ = \sphericalangle AZJ$, czyli też $\sphericalangle JZY = \sphericalangle AZX = \sphericalangle XJM$, zatem z podobieństwa trójkątów MJY i MZJ mamy $MJ^2 = MY \cdot MZ = MB^2$, gdzie ostatnia równość wynika z przeprowadzenia inwersji względem okręgu o środku w M i promieniu $MB = MC$. Zatem $MJ = MB$, czyli z lematu trójkąta mamy, że $J = I$, co kończy nam rozwiązanie lematu.

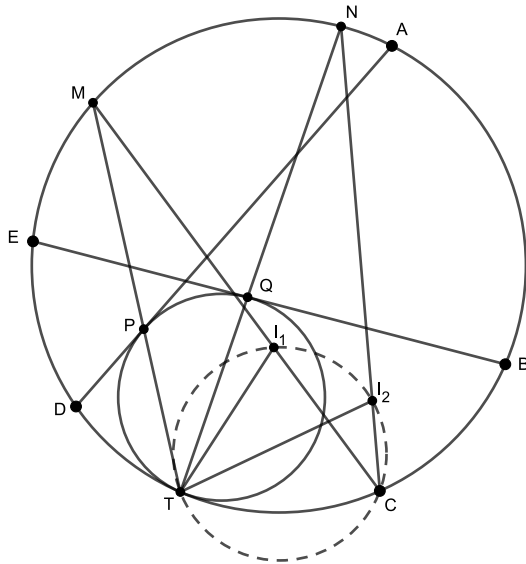


Lemat 3. *Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg Ω . Punkty I_1 i I_2 są środkami okręgów wpisanych w trójkąty CAD i CBE , a okrąg Γ jest okręgiem stycznym do prostych AD , BE i wewnętrznie do łuku BD okręgu Ω , który zawiera C w punkcie T . Wykazać, że punkty C , I_1 , I_2 i T leżą na jednym okręgu.*

Rozwiązanie:

Niech M i N będą środkami łuków AD i BE , niezawierających punktu C . Wtedy C , I_1 i M są współliniowe, C , I_2 i N są współliniowe. Niech jeszcze P i Q będą punktami styczności okręgów wpisanych w CAD i CBE z bokami AD i BE . Wtedy z jednokładności o środku w T wiemy, że T , P i M są współliniowe. Podobnie T , Q i N są współliniowe. Z lematu o trójkącie oraz z inwersji o środkach w M i promieniu MA i N i promieniu NB mamy $MP \cdot MT = MI_1^2$ i $NQ \cdot NT = NI_2^2$. Z jednokładności

wiemy jednak, że $\frac{NQ}{NT} = \frac{MP}{MT}$, czyli $\frac{NI_2}{NT} = \frac{\sqrt{NQ \cdot NT}}{NT} = \sqrt{\frac{NQ}{NT}} = \sqrt{\frac{MP}{MT}} = \frac{\sqrt{MP \cdot MT}}{MT} = \frac{MI_1}{MT}$, zatem trójkąty MI_1T i NI_2C są podobne, czyli $\sphericalangle I_1TI_2 = \sphericalangle MTN = \sphericalangle I_1CI_2$, co kończy rozwiązanie lematu.



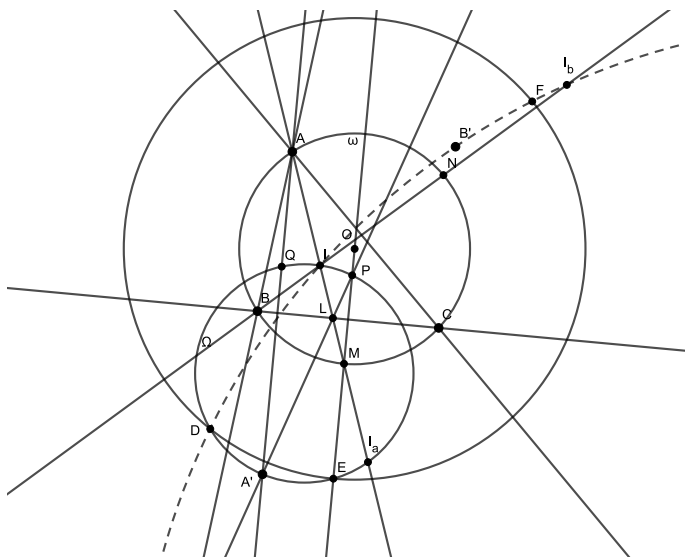
Lemat 4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkty I_a, I_b i I_c są środkami okręgów dopisanych do ABC , stycznych do boków odpowiednio BC, CA i AB . Punkty A^*, B^* i C^* są punktami symetrycznymi do A, B i C względem boków odpowiednio BC, CA i AB . Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach A^*I_aI, B^*I_bI i C^*I_cI przecinają się w jednym punkcie, różnym od I .

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia: ω -okrąg opisany na trójkącie ABC , Ω -okrąg opisany na trójkącie A^*I_aI , Q -przecięcie AA^* z Ω , L -przecięcie AI z BC , M -przecięcie AI z ω , O -środek ω , N -przecięcie BI z ω , F -odbicie O względem N , P -przecięcie A^*L z OM , E -przecięcie OM z Ω (M leży między O i E), $\sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle CBA = \beta, \sphericalangle ACB = \gamma$, R -promień ω .

Z prostego przeliczenia na kątach mamy, że trójkąty ABI i AI_aC są podobne zatem $AB \cdot AC = AI \cdot AI_a$. Zauważmy ponadto, że po inwersji względem okręgu o środku A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożonej z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$ punkt O przejdzie na A^* (bo przed inwersją $OB = OA = OC$ czyli po inwersji $AB = BO', AC = CO'$). Czyli $AO \cdot AA^* = AB \cdot AC = AI \cdot AI_a = AQ \cdot AA^*$, gdzie ostatnia równość wynika z potęgi punktu A względem Ω . Zatem $AQ = AO$, czyli też $IQ = IO$. Oczywiście $A^*L = AL$ i $ML = LP$ zatem $A^*L \cdot LP = AL \cdot LM = BL \cdot LC =$

$IL \cdot LI_a$, gdzie ostatnie dwie równości wynikają z potęgi punktu L względem ω i okręgu opisanego na BIC (na którym leży I_a). Zatem P leży na Ω . Mamy więc $\sphericalangle A'E = \sphericalangle A^*PM = \sphericalangle OMA = \sphericalangle IAQ = \sphericalangle A^*I_a = \sphericalangle IQ$, więc $IQ = I_aE$, czyli $OI = EI_a$. Wynika z tego, że $OM = ME$. Niech teraz D będzie drugim punktem przecięcia okręgu o środku w O i promieniu $2R$ z Ω (E leży na tym okręgu, co przed chwilą pokazaliśmy). Jeśli $D = E$ to łatwo dostać, że $\alpha = 60^\circ$ i możemy powtórzyć proces dla innych wierzchołków, chyba, że ABC jest równoboczny ale wtedy teza lematu jest oczywista. Niech więc $D \neq E$. Analogicznie do tego co zrobiliśmy przed chwilą możemy pokazać, że F leży na okręgu opisanym na B^*II_b czyli $\sphericalangle IB^*F = 180^\circ - \sphericalangle FI_bN = 180^\circ - \sphericalangle NIO = \frac{\alpha+\beta}{2} + \sphericalangle II_aE$ oraz $\angle IDF = \frac{\sphericalangle IPA^*}{2} - \sphericalangle FDA^* = \frac{\sphericalangle IPA^*}{2} - \frac{\beta}{2} + \gamma - 90^\circ$. Łącząc te dwie równości dostajemy $\sphericalangle IB^*F + \sphericalangle IDF = 180^\circ$, czyli wielokąt DIB^*FI_b jest cykliczny. Podobnie udowadniamy, że DII_cC^* jest cykliczny co daje tezę lematu.

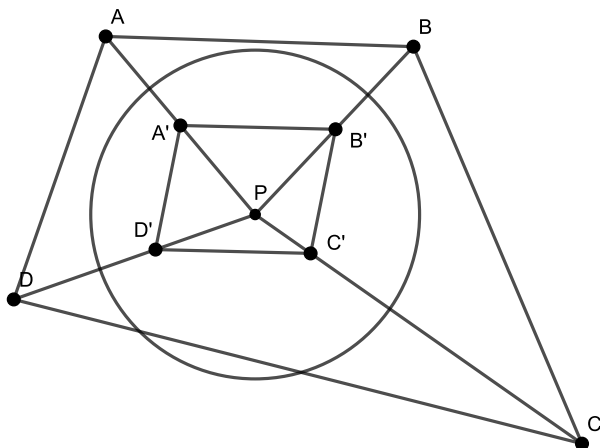


Zadania i rozwiązania

1. Dany jest czworokąt $ABCD$. Wykazać, że istnieje taki punkt P , że okręgi opisane na trójkątach APB i CPD są styczne oraz okręgi opisane na trójkątach APD i BCP są styczne. *Rozwiązanie:*

Rozważmy inwersję względem punktu P . Nasz warunek przekształca się wtedy w to, że czworokąt $A'B'C'D'$ jest równoległobokiem (X' to obraz X w inwersji). Z własności inwersji mamy $\sphericalangle APC = \sphericalangle A'D'C' + \sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle APC = 360^\circ - \sphericalangle ABC -$

$\sphericalangle A'B'C'$, czyli $\sphericalangle APC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC - \sphericalangle ADC)$, z dokładnością do kąta 180° oraz $\sphericalangle BPD = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD - \sphericalangle BCD)$, z dokładnością do kąta 180° . Czyli punkt P musi leżeć na odpowiednich okręgach, gdyż te kąty są stałe. Wystarczy więc wziąć przecięcie tych okręgów.

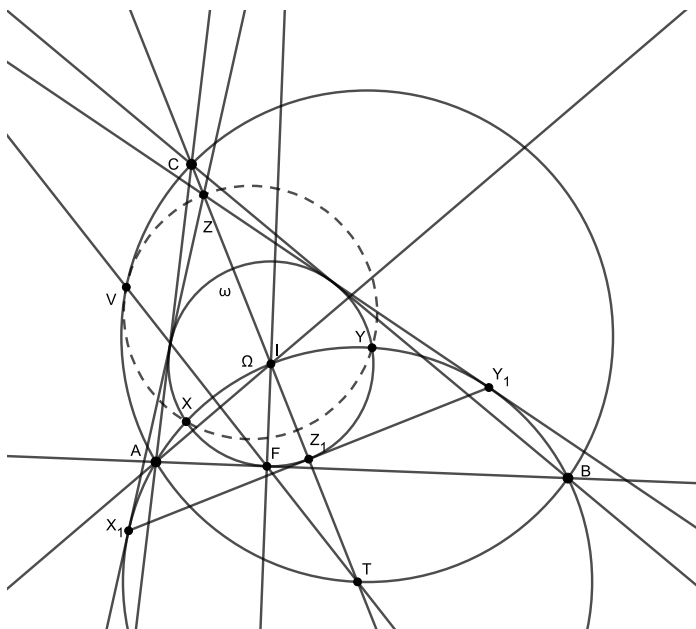


2. Okrąg ω o środku I jest wpisany w trójkąt ABC . Okrąg Ω to okrąg opisany na trójkącie AIB . Okręgi ω i Ω przecinają się w punktach X i Y . Punkt Z jest punktem przecięcia wspólnych stycznych do okręgów ω i Ω . Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie XYZ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Rozwiązanie:

Niech T będzie środkiem łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC . Z lematu o trójkącie wiemy, że T jest środkiem Ω . Niech teraz F będzie punktem styczności okręgu ω z bokiem AB , a V będzie punktem przecięcia prostej FT z okręgiem opisanym, różnym od T . Niech punkty X_1 i Y_1 będą takimi punktami na okręgu Ω , że leżą one na wspólnych stycznych do okręgów ω i Ω . Wtedy $\sphericalangle IY_1Z = \sphericalangle IY_1X_1 = \sphericalangle Y_1X_1I$ i podobnie $\sphericalangle IY_1Z = \sphericalangle X_1Y_1I$, więc I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt X_1Y_1Z , czyli ω jest okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Zatem jeśli Z_1 będzie środkiem X_1Y_1 to będziemy mieli, że $Z \in \omega$. Ale Z_1 jest obrazem punktu Z w inwersji względem Ω . Zauważmy jeszcze, że w tej inwersji prosta BC przejdzie na okrąg opisany na ABC , więc punkt V przejdzie na punkt F . Czyli punkty X , Y , Z i V będą leżeć na jednym okręgu, który jest obrazem ω w inwersji względem Ω . Jednak ω jest styczny do BC , więc jego obraz inwersyjny, czyli okrąg z tezy będzie

styczny do obrazu BC , czyli do okręgu opisanego na ABC . Co należało udowodnić.



3. Punkty I i O są środkami odpowiednio okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie ABC . Punkty P i Q są izogonalnie sprzężone w tym trójkącie, przy czym $\sphericalangle API = 90^\circ$. Punkt R leży na symetralnej odcinka AP , w taki sposób, że $AR \perp AQ$. Symetralna odcinka AI przecina prostą OR w punkcie X . Wykazać, że $\sphericalangle IQA = \sphericalangle XAI$.

Rozwiązanie:

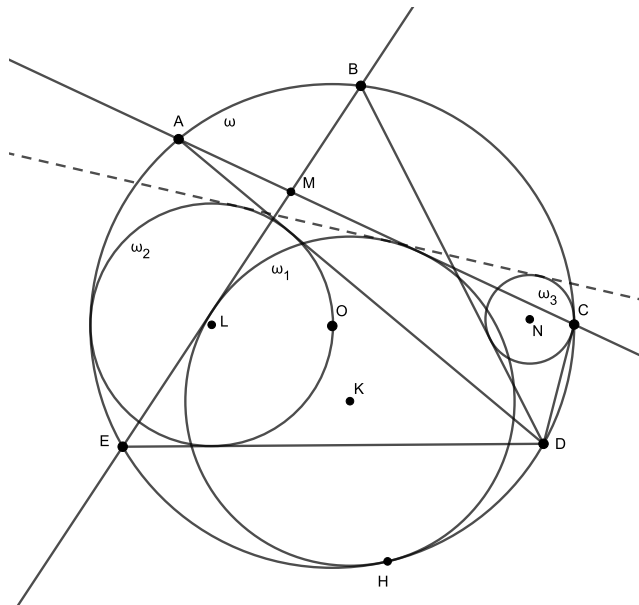
Rozważmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$. Po zastosowaniu własności inwersji zauważamy, że zadanie przekształci się do następującej formy: Dany jest trójkąt ABC . Punkt I jest środkiem okręgu dopisanego do boku BC trójkąta ABC . Punkt P jest taki, że $\sphericalangle AIP = 90^\circ$. Punkt Q jest izogonalnie sprzężony do punktu P . Punkt R leży na prostej prostopadłej do AQ przechodzącej przez A , przy czym, $AP = PR$. Punkt O jest odbiciem punktu A względem prostej BC . Punkt X leży na okręgu opisanym na trójkącie AOR , przy czym $AI = IX$. Wykazać, że proste AX i QI są równoległe. Niech ω będzie okręgiem opisanym na czworokącie $ARXO$. Niech teraz O' , X' i R' będą środkami odcinków AO , AX i AR . Wtedy punkty A , O' , X' i R' leżą na jednym okręgu. Oznaczmy go przez ω' . Niech W będzie punktem przecięcia ω' z BC , różnym od O' . Wtedy $AO'Q = 90^\circ$, czyli $\sphericalangle AR'W = \sphericalangle AX'W = 90^\circ$. Wiemy jednak też, że $PA = PR$, czyli $\sphericalangle PR'A = 90^\circ$, zatem punkty P , W i R' są

A geometric diagram featuring a circle with center O . Several points are marked on the circle: A , B , C , P , Q , R , and X . Lines connect these points, forming various geometric figures. At point A , an angle is marked between lines AB and AC . At point P , an angle is marked between lines PA and PQ . The diagram illustrates the relationships between these points and lines, likely related to the geometry of a sphere or a similar curved surface.

Rozwiązanie:

91

przez T^* przecinają P^*Q^* i R^*S^* odpowiednio w punktach Y^* i Z^* . Zauważmy, że $A^*Q^* = T^*Y^*$, czyli $J_2^*Y^*$ jest prostopadłe do A^*B^* . Analogicznie $J_1^*Z^* \perp A^*B^*$, więc widzimy, że $P^*Q^* \parallel T^*J_1^*, R^*S^* \parallel T^*J_2^*$ czyli z twierdzenia Pappusa punkty J^*, J_1^* i J_2^* są współliniowe. Czyli przed inwersją punkty D, J, J_1 i J_2 musiały leżeć na jednym okręgu. Czyli z lematu 3 dostajemy, że UV jest styczna do ω_1 , co chcieliśmy udowodnić.

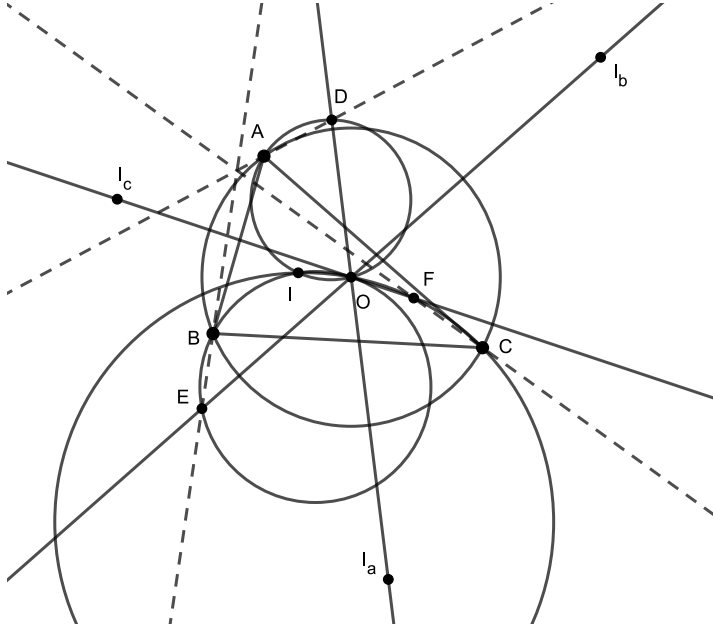


5. Punkty O i I są środkami odpowiednio okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie ABC . Punkty I_a, I_b i I_c są środkami okręgów dopisanych do boków odpowiednio BC, CA i AB trójkąta ABC . Punkt D jest drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie AIO z prostą I_aO . Punkty E i F definiujemy analogicznie. Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech A^*, B^* i C^* będą punktami symetrycznymi do A, B i C względem boków BC, CA i AB . Ponieważ trójkąty AIO i AA^*I_a są podobne to $\sphericalangle ADI_a = \sphericalangle AIO = \sphericalangle AA^*I_a$, czyli punkty A, A^*, D i I_a leżą na jednym okręgu. Zatem $\sphericalangle ADI = \sphericalangle AOI = \sphericalangle AI_aA^* = \sphericalangle ADA^*$, czyli $A^* \in ID$. Podobnie dowodzimy, że B^* leży na IE oraz na okręgu opisanym na BEI_b i C^* leży na IF oraz na okręgu opisanym na trójkącie CFI_c . Z lematu 4 wiemy, że okręgi opisane na trójkątach A^*II_a, B^*II_b i C^*II_c mają wspólną oś potęgową, więc wykonując inwersję o środku w I (złożoną z symetrią), która zamienia pary $(A, I_a), (B, I_b), (C, I_c), (D, A^*)$,

(E, B^*) , (F, C^*) dostaniemy, że proste AD , BE i CF przecinają się punkcie, który jest obrazem drugiego punktu przecięcia okręgów opisanych na trójkątach A^*II_a , B^*II_b i C^*II_c w tej inwersji.



6. Proste AP i BP są styczne do okręgu ω , którego środkiem jest O w punktach odpowiednio A i B . Punkt J jest środkiem okręgu Γ opisanego na trójkącie PAB . Okrąg Ω , o środku w K przechodzi przez P , jest styczny zewnętrznie do ω w punkcie L i przecina proste PA i PB w punktach odpowiednio C i D . Prosta CD przecina okrąg Γ w punktach E i F . Punkt G jest przecięciem prostych OE i AB , a punkt H jest przecięciem prostych OF i AB . Niech Q , R , S i T będą środkami okręgów opisanych na trójkątach odpowiednio PLG , PLA , PLB i PLH . Wykazać, że $\sphericalangle QPR = \sphericalangle SPT$.

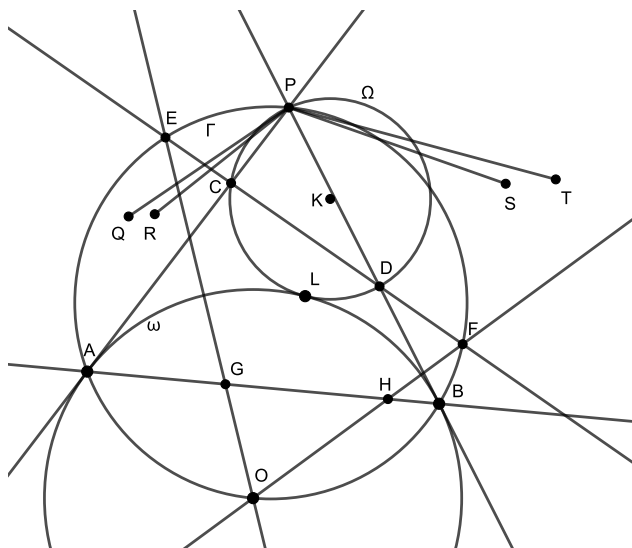
Rozwiązanie:

Niech Φ będzie inwersją względem okręgu o środku w punkcie P i promieniu $\sqrt{PC \cdot PD}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle CPD$. Obrazem okręgu ω będzie okrąg $\Phi(\omega)$ wpisany w trójkąt PCD . Niech I będzie jego środkiem. Wtedy $\Phi(L) = \Phi(\omega) \cap CD$, $\Phi(A) = \Phi(\omega) \cap PD$, $\Phi(B) = \Phi(\omega) \cap PC$, czyli punkty $\Phi(E)$ i $\Phi(F)$ będą punktami przecięcia prostej $\Phi(A)\Phi(B)$ z Ω . Zauważmy, że $\Phi(G)$ leży na okręgu opisanym na $P\Phi(A)\Phi(B)$ i na okręgu o średnicy $P\Phi(E)$, czyli $\Phi(G)$ jest rzutem punktu P na prostą $I\Phi(E)$. Podobnie punkt $\Phi(H)$ jest rzutem punktu P na $I\Phi(F)$. Zauważmy teraz, że punkty $\Phi(O)$, $\Phi(R)$, $\Phi(S)$, $\Phi(T)$ są odbiciami punktu P względem $\Phi(L)\Phi(G)$, $\Phi(L)\Phi(A)$, $\Phi(L)\Phi(B)$, $\Phi(L)\Phi(H)$, zatem wystarczy pokazać, że $\sphericalangle \Phi(A)\Phi(L)\Phi(G) = \sphericalangle \Phi(B)\Phi(L)\Phi(H)$. Możemy teraz przeformułować nasze

zadania na takie:

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a punkty D, E i F są punktami styczności okręgu wpisanego z bokami odpowiednio BC, CA i AB . Punkty Y i Z są punktami przecięcia prostej EF z okręgiem opisanym na ABC . Punkty P i Q są rzutami punktu A na IY i IZ . Udowodnić, że $\sphericalangle EDP = \sphericalangle FDQ$.

Ponieważ Y i Z leżą na biegunowej A względem okręgu wpisanego to AP i AQ są biegunowymi Y i Z względem okręgu wpisanego, czyli P i Q to obrazy Y i Z w inwersji względem okręgu wpisanego, zatem dostajemy, że punkty P i Q leżą na okręgu dziewięciu punktów trójkąta DEF . Rozważmy teraz inwersję względem okręgu o środku w punkcie D i promieniu $\frac{1}{2}\sqrt{DE \cdot DF}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle EDF$. Wtedy okrąg opisany na IEF i okrąg dziewięciu punktów trójkąta DEF są swoimi obrazami względem tej inwersji, więc także punkty P i Q są swoimi obrazami w tej inwersji czyli DP i DQ są izogonalnie sprzężone a kącie $\sphericalangle EDF$, czyli $\sphericalangle EDP = \sphericalangle FDQ$, co kończy rozwiązanie zadania.



Metoda poruszania punktów

Radomił Baran

Teoria

Definicja 1. Łańcuch rzutowy to zbiór punktów na płaszczyźnie rzutowej, który jest prostą rzutową lub krzywą stożkową. Oznaczamy łańcuch rzutowy punktów X na prostej (lub krzywej stożkowej) p przez $p(X)$

Definicja 2. Przekształceniem rzutowym pomiędzy dwiema prostymi (lub krzywymi stożkowymi) p and q nazwiemy dowolną bijekcję $\phi : p \rightarrow q$, która zachowuje dwustosunek, tzn.

$$(A_1, A_2; A_3, A_4) = (\phi(A_1), \phi(A_2); \phi(A_3), \phi(A_4)),$$

gdzie $A_i \in p$ i $\phi(A_i) \in q$.

Definicja 3. Przekształceniem perspektywicznym pomiędzy dwiema prostymi p i q o środku O nazwiemy funkcję, która punktowi A na p przyporządkowuje taki punkt B na q , że punkty O , A i B są współliniowe.

Mówimy, że $p(X)$ i $q(Y)$ są rzutowe jeśli istnieje przekształcenie rzutowe pomiędzy tymi łańcuchami i oznaczamy $p(X) \bar{\wedge} q(Y)$ lub $p(X) \mapsto q(Y)$.

Podobnie, $p(X)$ i $q(Y)$ są perspektywiczne jeśli istnieje przekształcenie perspektywiczne pomiędzy tymi łańcuchami i oznaczamy wtedy $p(X) \bar{\bar{\wedge}} q(Y)$.

Definicja 4. Pęk prostych to zbiór prostych przechodzących przez ustalony punkt na płaszczyźnie rzutowej. Możemy mieć też inne pęki (np. pęki krzywych stożkowych). Oznaczamy pęk prostych p , które przechodzą przez punkt A przez $A(p)$.

Definicja 5. Przekształceniem rzutowym pomiędzy dwoma pękami $A(p)$ i $B(q)$ nazwywamy dowolną bijekcję $\phi : p \rightarrow q$, która zachowuje dwustosunek, tzn.

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = (\phi(p_1), \phi(p_2); \phi(p_3), \phi(p_4)),$$

gdzie $p_i \in A(p)$ i $\phi(p_i) \in B(q)$.

Definicja 6. Przekształceniem perspektywicznym pomiędzy pękami $A(p)$ i $B(q)$ o osi l nazwywamy dowolną funkcję, która dla każdego punktu $X \in l$ przekształca prostą $AX \in A(p)$ w prostą $BX \in B(q)$

Mówimy, że $A(p)$ i $B(q)$ są rzutowe jeśli istnieje przekształcenie rzutowe pomiędzy tymi pękami i oznaczamy wtedy $A(p) \bar{\wedge} B(q)$ lub $A(p) \mapsto B(q)$.

Podobnie, $A(p)$ i $B(q)$ są perspektywiczne jeśli istnieje przekształcenie perspektywiczne pomiędzy tymi pękami i oznaczamy $A(p) \bar{\bar{\wedge}} B(q)$.

(Steinera) Dane są dwa pęki prostych $A(p)$ i $B(p)$, oraz przekształcenie rzutowe π pomiędzy nimi. Wtedy, jeśli π jest perspektywiczne to punkty przecięcia prostych p i $\pi(p)$ tworzą prostą, a jeśli nie jest perspektywiczne to punkty te tworzą niezdegenerowaną krzywą stożkową.

(dualne do Steinera) Dane są dwa łańcuchy rzutowe $p(A)$ i $q(B)$ oraz przekształcenie rzutowe π pomiędzy nimi. Jeśli π jest perspektywiczne to wszystkie proste AB przecinają się w jednym punkcie. Jeśli π nie jest perspektywiczne to wszystkie proste AB są styczne do pewnej krzywej stożkowej.

Własność 1. *Przekształcenia rzutowe są odwracalne oraz złożenie przekształceń rzutowych jest rzutowe.*

Własność 2. *Niech $p(X) \mapsto q(Y)$. Wtedy $p(X) \bar{\cap} q(Y)$ wtedy i tylko wtedy gdy przecięcie prostych p i q jest punktem stałym w tym przekształceniu rzutowym.*

Własność 3. *Niech $A(p) \mapsto B(q)$. Wtedy $A(p) \bar{\cap} B(q)$ wtedy i tylko wtedy gdy prosta AB jest stała w tym przekształceniu rzutowym.*

Własność 4. *Przekształcenie rzutowe pomiędzy dwoma łańcuchami rzutowymi (pękami) jest jednoznacznie wyznaczone przez trzy pary odpowiadających punktów (prostych).*

Własność 5. *Inwersja zachowuje dwustosunek na prostej lub okręgu.*

Własność 6. *Dla dowolnej krzywej stożkowej γ i dowolnego punktu P przekształcenie z γ do γ , które punkt X przekształca w punkt $PX \cap \gamma \neq X$ jest rzutowe.*

Własność 7. *Dana jest prosta l i okrąg ω oraz punkt P leżący na tym okręgu. Dla łańcucha $\omega(X)$ rozważmy łańcuch $l(Y)$, gdzie $Y = PX \cap \omega$. Wtedy $\omega(X) \mapsto l(Y)$.*

Lemat 5. *Dane są dwa łańcuchy punktów $k(A)$ i $l(B)$. Przypuśćmy, że $k(A) \mapsto l(B)$ oraz $X_{\infty k} \mapsto X_{\infty l}$. Wtedy dla dowolnych kątów α i β , zbiór punktów X takich, że $\angle(XA, k) = \angle(XB, l)$ jest prostą.*

Rozwiązanie:

Niech p_∞ będzie prostą w nieskończoności. Zauważmy, że wszystkie proste XA przechodzą przez punkt w nieskończoności $X_{\infty \alpha}$, a wszystkie proste XB przechodzą przez punkt w nieskończoności $X_{\infty \beta}$. Ponieważ $k(A) \mapsto l(B)$ to mamy $X_{\infty \alpha}(X_{\infty \alpha}A) \mapsto X_{\infty \beta}(X_{\infty \beta}B)$. Zatem wystarczy pokazać, że to przekształcenie jest perspektywiczne. Czyli wystarczy sprawdzić, że p_∞ jest stałą, jednak to jest oczywiste ponieważ $X_{\infty k} \mapsto X_{\infty l}$.

Lemat 6. *Dane są dwie proste k i l przecinające się w punkcie A oraz punkt P , który nie leży na żadnej z tych prostych. Dla zmieniającego się punktu $B \in k$ niech C będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na ABP z l (chyba, że jest tylko jeden to $C = A$). Wtedy $k(B) \mapsto l(C)$.*

Rozwiązanie:

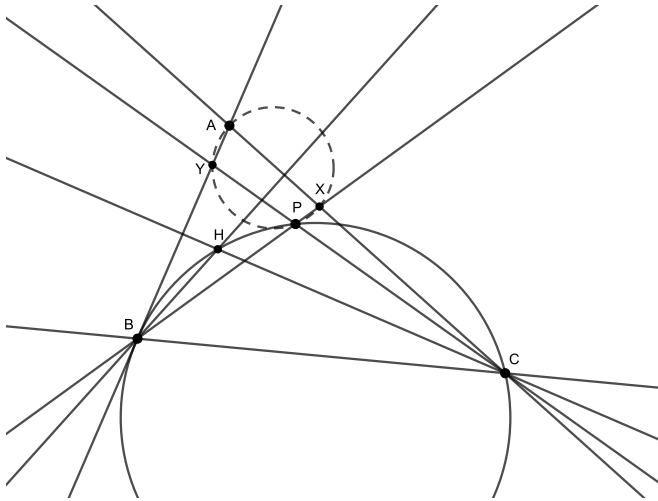
Zauważmy, że po rozważeniu inwersji o środku w punkcie A łańcuchy $k(B)$ i $l(C)$ będą perspektywiczne o środku w punkcie P' , a inwersja zachowuje dwustosunek, co oznacza, że przed inwersją mamy $k(B) \mapsto l(C)$.

Zadania i rozwiązania

1. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ i jego ortocentrum H . Okrąg ω jest okręgiem opisanym na trójkącie BHC , a punkt P leży na ω . Proste BP i CP przecinają proste AC i AB odpowiednio w punktach X i Y . Wykazać, że przy zmieniającym się położeniu punktu P na ω okręgi opisane na $AXPY$ przechodzą przez ustalony punkt, różny od A .

Rozwiązanie:

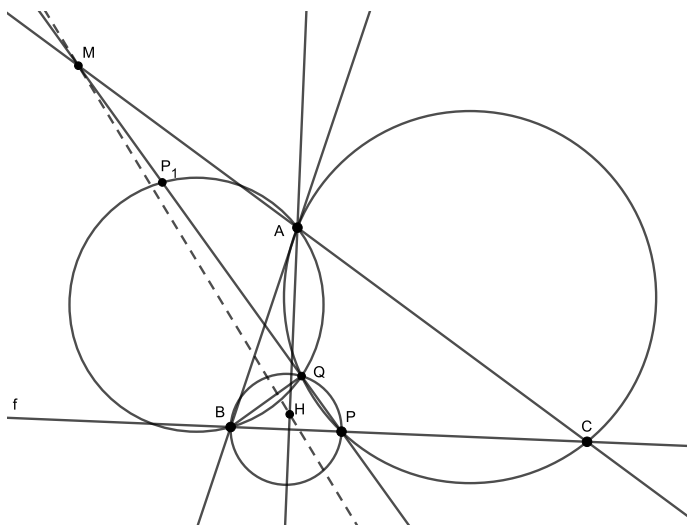
Zauważmy, że przy zmieniającym się punkcie P po okręgu ω mamy $\omega(P) \mapsto AB(Y)$ oraz $\omega(P) \mapsto AC(X)$. Wynika to z własności 7. Zatem z własności 1 wiemy również, że $AB(Y) \mapsto AC(X)$. Niech X_1 i Y_1 będą środkami odcinków AX i AY . Wtedy w oczywisty sposób $AC(X_1) \mapsto AB(Y_1)$. Niech teraz $X_{\infty \perp AB}$ i $X_{\infty \perp AC}$ będą punktami w nieskończoności o kierunkach prostopadłych odpowiednio do AB i AC . Wtedy skoro łańcuchy $AC(X_1)$ i $AB(Y_1)$ są rzutowe to również pęki $X_{\infty \perp AB}(X_{\infty \perp AB}Y_1)$ i $X_{\infty \perp AC}(X_{\infty \perp AC}X_1)$ są rzutowe. Punkty ich przecięcia to środki okręgów opisanych na trójkątach AXY . Niech teraz A_1 będzie odbiciem punktu A względem środka odcinka BC . Ponieważ $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ to punkt A_1 leży na okręgu ω . Mamy ponadto $BA_1 \parallel AC$ i $CA_1 \parallel AB$ zatem gdy $P = A_1$ to $X = X_{\infty \perp AC}$ i $Y = X_{\infty \perp AB}$, czyli $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ zatem prosta $X_{\infty \perp AB}X_{\infty \perp AC}$ jest stała w przekształceniu rzutowym między rozważanymi pękami. Z własności 3 wiemy więc, że punkty przecięcia odpowiadających prostych z tych pęków leżą na jednej prostej. Zatem wiemy, że środki okręgów opisanych na AXY leżą na jednej prostej. Odbicie punktu A względem tej prostej leży więc na każdym z rozważanych okręgów. To daje tezę zadania.



2. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz punkt P na prostej BC . Okrąg o średnicy BP przecina okrąg opisany na trójkącie APC ponownie w punkcie Q . Niech M będzie punktem przecięcia PQ i AC , a H ortocentrum trójkąta ABP . Udowodnić, że przy zmieniającym się położeniu punktu P , proste MH przechodzą przez ustalony punkt.

Rozwiązanie:

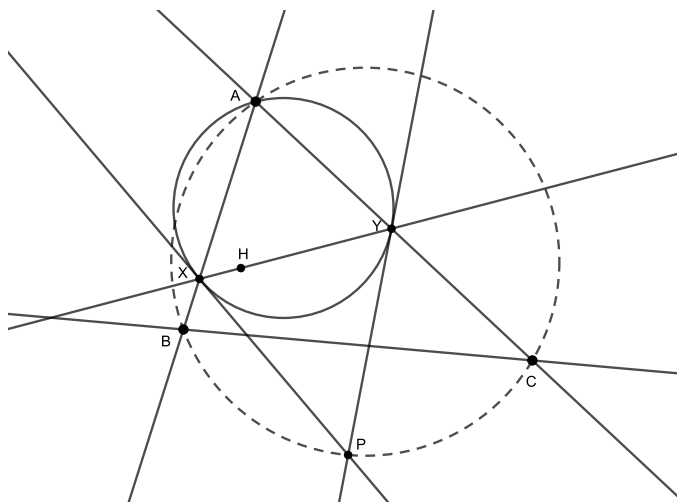
Niech P_1 będzie punktem przecięcia prostej PQ z okręgiem opisanym na trójkącie ABQ . Wiemy, że $\angle AQB = 360^\circ - \angle AQP - \angle BQP = 90^\circ - \angle ACB$, ponieważ $\angle BQP = 90^\circ$ oraz $\angle AQP = 180^\circ - \angle ACB$. Oznacza to, że przy zmieniającym się położeniu punktu P punkt Q porusza się po ustalonym okręgu. Ponadto $\angle BQP_1 = 90^\circ$, więc punkt P_1 jest punktem antypodycznym do B w tym okręgu, czyli jest punktem stałym. Zatem wszystkie proste PQ (czyli też PM) przechodzą przez ustalony punkt. Oznacza to, że $BC(P) \bar{\bar{\cap}} AC(M)$. Niech teraz k będzie prostą prostopadłą do BC przechodzącą przez punkt A . Wtedy $BC(P) \bar{\bar{\cap}} k(H)$, ponieważ jest to rzutowanie przez punkt $X_{\infty \perp AB}$. Zatem $k(H) \mapsto AC(M)$. Chcemy pokazać, że $k(H) \bar{\bar{\cap}} AC(M)$. Zatem z własności 2 wystarczy, że pokażemy, że punkt przecięcia prostych AC i AB , czyli A , jest punktem stałym tego przekształcenia. Niech zatem P będzie takim punktem na prostej BC , że $\angle BAP = 90^\circ$. Wtedy oczywiście $H = A$. Ponadto Q leży na okręgu opisanym na ACP i na okręgu o średnicy BP , czyli na okręgu opisanym na ABP , zatem $Q = A$. Zatem wprost z definicji $M = A$. Czyli $M = H = A$, co kończy rozwiązanie zadania.



3. Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC . Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P . Dowieść, że punkty A , B , C i P leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Ustalmy punkty A , X , Y i T , przy czym $AX = AY$. Będziemy poruszać punktem H na prostej XY i punktami B i C na prostych AB i AC w taki sposób, że H będzie dalej ortocentrum ABC . Zatem $XY(H) \bar{\bar{\wedge}} AX(B)$ i $XY(H) \bar{\bar{\wedge}} AY(C)$, gdzie odpowiednie przekształcenia to rzutowania przez punkty w nieskończoności o kierunkach prostopadłych do AC i AB . Otrzymujemy zatem, że $AX(B) \mapsto AY(C)$. Niech teraz B' będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na ABP z AY . Wtedy z lematu 2 wiemy, że $AX(B) \mapsto AY(B')$, a chcemy wykazać, że $B' = C$, zatem wystarczy, że udowodnimy to dla trzech wyborów punktu H na prostej XY . Gdy H jest punktem w nieskończoności prostej XY to punkty B i C stają się punktami w nieskończoności prostych AB i AC . Ponadto punkt B' również będzie punktem w nieskończoności prostej AC . Jest tak ponieważ w inwersji względem punktu A punkty B , P i B' są współliniowe czyli gdy B jest punktem w nieskończoności prostej AB to po inwersji jest on punktem A , a prosta AP przecina AC w punkcie A zatem B' będzie obrazem punktu A na prostej AC w inwersji, czyli punktem w nieskończoności prostej AC . Zatem mamy $B' = C$ w tym przypadku. Pozostaje rozważyć dwa przypadki. Będą to $H = X$ i $H = Y$, przy czym są one analogiczne więc rozważymy tylko jeden z nich. Niech więc $H = X$. Wtedy punkt B będzie też punktem X , a punkt C będzie takim punktem na prostej AY , że $\sphericalangle AXC = 90^\circ$. Niech teraz $\sphericalangle XAY = \alpha$. Wtedy z twierdzenia o kącie między styczną a sieczną mamy $\sphericalangle PXY = \sphericalangle PYX = \alpha$, czyli $\sphericalangle XPY = 180^\circ - 2\alpha$, zatem $\sphericalangle XPA = 90^\circ - \alpha$. Oczywiście mamy też $\sphericalangle XCA = 90^\circ - \alpha$, zatem punkty A , X , P i C leżą na jednym okręgu. Zatem mamy udowodnione, że $B' = C$ w tym przypadku, co jak już pokazaliśmy implikuje tezę zadania.

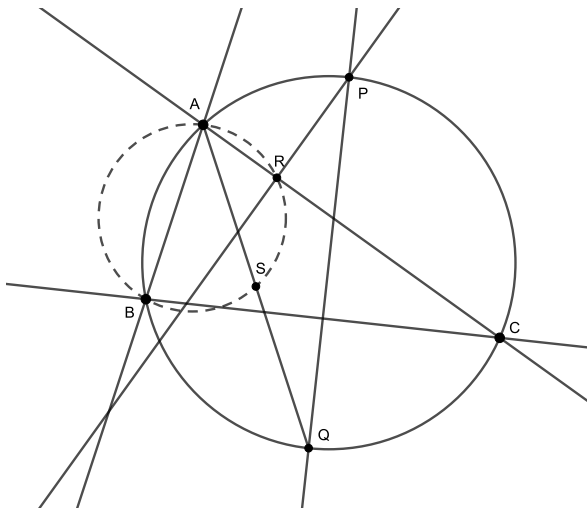


4. Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q , przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC . Punkt R jest

rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC . Punkt S jest środkiem odcinka AQ . Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Rozważmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej kąta BAC . Z własności inwersji łatwo dostajemy, że nasze zadanie przekształca się w następujące sformułowanie: Punkty P i Q są spodkami dwusiecznych odpowiednio zewnętrznej i wewnętrznej trójkąta ABC , opuszczonych z wierzchołka A . Punkt R jest takim punktem na prostej AB , że $\angle APR = 90^\circ$. Ponadto punkt S jest odbiciem punktu A względem Q . Trzeba wykazać, że punkty C, S i R leżą na jednej prostej. Ustalmy więc punkty A, P i Q i poruszajmy punktami B i C na prostej BC , w taki sposób, że AP i AQ to dalej dwusieczne kąta BAC . Wtedy $BC(B) \mapsto BC(C)$. Ponadto w oczywisty sposób $BC(B) \bar{\wedge} k(R)$, gdzie k jest prostą prostopadłą do PA , przechodzącą przez P . Mamy więc, że $BC(C) \mapsto k(R)$. Chcemy pokazać, że $BC(C) \bar{\wedge} k(R)$ oraz że środek tego przekształcenia perspektywicznego to S . Zauważmy, że gdy B jest punktem P to $C = P$ i $R = P$, czyli rzeczywiście $BC(C) \bar{\wedge} k(R)$. Zauważmy ponadto, że gdy $B = Q$ to $C = Q$ oraz R leży na prostej AB , czyli na prostej AS , zatem CR przechodzi przez S . Niech teraz B będzie środkiem odcinka PQ . Wtedy skoro $(P, Q; B, C) = 1$ to znaczy, że C jest punktem w nieskończoności prostej BC . Ponadto mamy wtedy w oczywisty sposób, że punkt R jest odbiciem punktu A względem punktu B . Czyli prosta RS jest równoległa do BC zatem przechodzi przez punkt w nieskończoności tej prostej. Udowodniliśmy tezę w trzech przypadkach, co na mocy rzutowości przekształcenia daje tezę we wszystkich przypadkach.

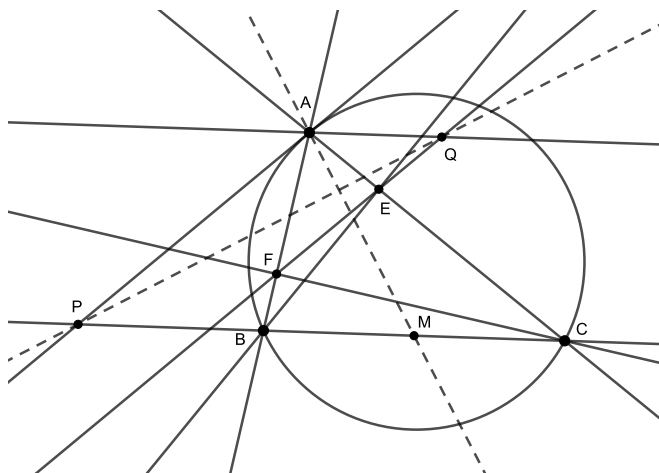


5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C . Prosta

styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P . Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q . Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A .

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem odcinka BC . Ustalmy wierzchołki A i B i poruszajmy punktem C po prostej BC . Wtedy w oczywisty sposób mamy $BC(C) \mapsto BC(M)$ oraz $BC(C) \bar{\bar{\cap}} AB(F)$, gdzie drugie przekształcenie ma środek będący punktem w nieskończoności o kierunku prostopadłym do AB . Niech teraz D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A w trójkącie ABC . Jest on stały gdy ruszamy punktem C . Niech X będzie odbiciem punktu D względem prostej AB . On również jest stały. Niech teraz D' będzie takim punktem na BC , że $(D', D; B, C) = 1$. Z własności dwustosunku wiemy, że punkty D' , E i F są współliniowe. Ponadto skoro $\sphericalangle CFB = 90^\circ$ to $\sphericalangle D'FB = \sphericalangle BFD = \sphericalangle XFB$, gdzie ostatnia równość wynika z definicji punktu X . Zatem punkty D' , E i F leżą na jednej prostej przechodzącej przez punkt X . Czyli $AB(F) \bar{\bar{\cap}} k(Q)$, gdzie k jest prostą równoległą do BC przechodzącą przez A , a środkiem tego przekształcenia perspektywicznego jest X . Czyli $BC(C) \mapsto k(Q)$. Ponadto dla dwóch punktów C_1 i C_2 oraz odpowiadających im punktów P_1 i P_2 mamy $\sphericalangle P_1AP_2 = \sphericalangle C_1AC_2$, czyli $BC(C) \mapsto BC(P)$ bo dwustosunek jest zależny od odpowiednich kątów. Ostatecznie $BC(P) \mapsto k(Q)$. Zauważmy teraz, że gdy C jest odbiciem punktu B względem punktu D to P jest punktem w nieskończoności prostej BC , ale również wtedy $EF \parallel BC$, czyli Q jest tym samym punktem w nieskończoności ($AQ \parallel BC$). Czyli punkt przecięcia BC i k jest stały w podanym przekształceniu, co oznacza, że $BC(P) \bar{\bar{\cap}} k(Q)$. Niech wspólnym punktem prostych PQ będzie Y . Wtedy mamy, że pęki $Y(YP)$ i $A(AM)$ są rzutowe. Chcemy pokazać, że odpowiadające im proste są prostopadłe, więc wystarczy, że pokażemy to dla trzech punktów. Dla C będącego odbiciem B względem D wiemy już, że prosta PQ jest równoległa do BC , natomiast wtedy $M = D$, czyli $AM \perp BC$, a stąd $AM \perp PQ$. Dalej, gdy C będzie punktem w nieskończoności prostej BC to $M = C$, $P = B$ oraz E jest rzutem B na prostą AC , czyli na prostą k . Zatem przecięciem EF z k , będzie rzut punktu B na k . Zatem Q jest tym rzutem. Czyli wtedy $PQ \perp k$ czyli $PQ \perp AM$. Ostatnim przypadkiem będzie taki punkt C , że $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Wtedy $F = A$, czyli znowu $Q = EF \cap k = A$. Wtedy też M jest środkiem BC , czyli M jest środkiem okręgu opisanego na ABC , zatem $AM \perp AP$, bo AP jest styczna do okręgu opisanego na ABC . Zatem w tym przypadku też $AM \perp PQ$, co kończy rozwiązanie zadania.

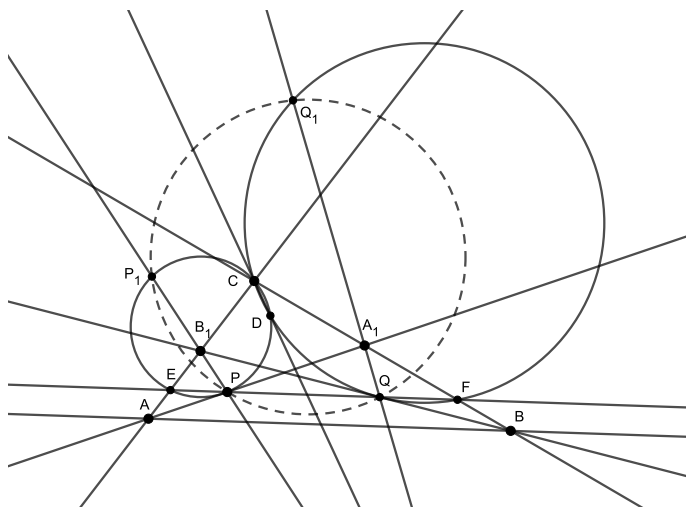


6. W trójkącie ABC , punkt A_1 leży na boku BC i punkt B_1 leży na boku AC . Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AA_1 i BB_1 , przy czym prosta PQ jest równoległa do AB . Punkt P_1 jest takim punktem na prostej PB_1 , że B_1 leży pomiędzy P , a P_1 oraz $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BCA$. Podobnie, niech Q_1 będzie punktem na QA_1 takim, że A_1 leży pomiędzy Q i Q_1 oraz $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$. Wykazać, że punkty P, Q, P_1 i Q_1 leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech E i F będą punktami przecięcia PQ z prostymi AC i BC . Ustalmy punkty C, P, Q, E i F i poruszajmy punktem A na EC . Wtedy B będzie zmieniał się na CF w taki sposób, że $AB \parallel PQ$. Oczywiście wtedy $CE(A) \bar{\mapsto} CF(A_1)$ i $CF(B) \mapsto CE(B_1)$. Zauważmy, że mamy równość $\sphericalangle CP_1P = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CEP$, czyli punkty E, P, C i P_1 leżą na jednym okręgu. Oznaczmy go przez ω_1 . Podobnie punkty Q, F, Q_1 i C leżą na jednym okręgu. Oznaczmy go przez ω_2 . Wtedy dostajemy, że punkty P_1 i Q_1 poruszają się po tych okręgach, które są stałe oraz $CE(B_1) \mapsto \omega_1(P_1)$ i $CF(A_1) \mapsto \omega_2(Q_1)$ na mocy własności 7. Widzimy więc, że pęki $P(P_1)$ i $Q(Q_1)$ są rzutowe. Niech X będzie punktem przecięcia prostych PP_1 i QQ_1 . Niech jeszcze okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punkcie $D \neq C$. Pokażemy, że punkty X leżą na prostej CD . Wystarczy więc, że pokażemy to dla trzech punktów. Gdy $A = C$ to $B = C$ i wtedy $A_1 = B_1 = C$, czyli $P_1 = Q_1 = C$, więc $X = C$. Dalej gdy $A = E$ to $B = F$ i wtedy $P_1 = E$ i $Q_1 = F$, czyli prosta PQ jest stała w przekształceniu $P(P_1) \mapsto Q(Q_1)$, czyli to przekształcenie jest perspektywiczne. Pozostaje pokazać, że $D = X$ również zachodzi. Niech $P_1 = X$ i skonstruujmy wtedy punkt A . Tak samo niech $Q_1 = X$ i skonstruujmy wtedy punkt B . Udowodnimy, że $AB \parallel PQ$. Będzie to równoważne poprzedniemu stwierdzeniu. Mamy więc następujące zadanie: Dany jest trójkąt CEF i punkty P i Q na boku EF . Okręgi opisane na CPE i CQF (ω_1 i ω_2) przecinają się w punkcie D . Prosta DP przecina CE w punkcie B_1 , a prosta DQ

przecina CF w punkcie A_1 . Prosta B_1Q przecina CF w B , a PA_1 przecina CE w A . Wykazać, że prosta AB jest równoległa do EF . Ustalmy więc punkty C, E, F i P i poruszajmy punktem Q na prostej EF . Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej DQ z ω_1 . Jest on stały ponieważ $\sphericalangle CDX = \sphericalangle CFQ$. Zatem przekształcenia punktu Q na D i A_1 są rzutowe. Oczywiście przekształcenie A_1 na A jest rzutowe i D na B_1 . Wykażmy, że przekształcenie B_1 na B jest rzutowe. Żeby to pokazać wystarczy żeby proste QB_1 przechodziły przez ustalony punkt. Jest to jednak równoważne temu, że gdy $Q = E$ to musi być $B_1 = E$. Łatwo jednak zauważyć, że jest to spełnione gdyż wtedy $Q = E$. Czyli przekształcenie z A na B jest rzutowe. Wystarczy więc sprawdzić trzy punkty. Dla $Q = E$ teza jest oczywista. Weźmy jeszcze Q jako punkt w nieskończoności prostej EF . Wtedy również łatwo zauważyć, że $AB \parallel EF$. Jako trzeci przypadek wybierzmy $Q = P$. Proste QD i PD będą wtedy prostymi st stycznymi do ω_2 i ω_1 w P . Oznaczmy punkty przecięcia tych stycznych z CE i CF jako M i N . Wtedy z twierdzenia o kącie między styczną a sieczną mamy $\sphericalangle CFP = \sphericalangle CPM$ i $\sphericalangle CEP = \sphericalangle CPN$, czyli $\sphericalangle MPN + \sphericalangle MCN = 180^\circ$ zatem na punktach C, M, P i N da się opisać okrąg. Czyli $\sphericalangle CNM = \sphericalangle CPM = \sphericalangle CFP$ skąd teza w tym przypadku i to kończy rozwiązanie zadania.

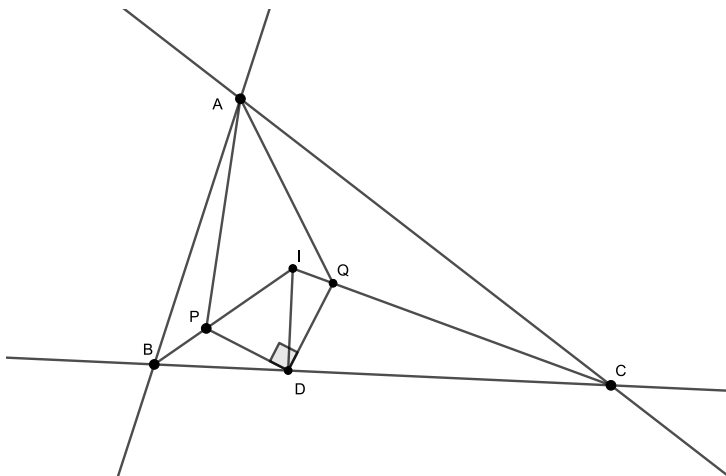


7. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkty P i Q leżą na odcinkach BI i CI , przy czym $2\sphericalangle PAQ = \sphericalangle BAC$. Wykazać, że jeśli D jest punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC to $\sphericalangle PDQ = 90^\circ$.

Rozwiązanie:

Ustalmy punkty A, B, C i poruszajmy punktem P po prostej BI . Punkt Q jest przecięciem prostej będącej obrotem AP o określony kąt z CI zatem $BI(P) \mapsto CI(Q)$. Jeśli teraz P' jest takim punktem na CI , że $\sphericalangle PDP' = 90^\circ$ to również $BI(P) \mapsto CI(P')$. Żeby wykazać tezę wystarczy więc pokazać ją dla trzech różnych

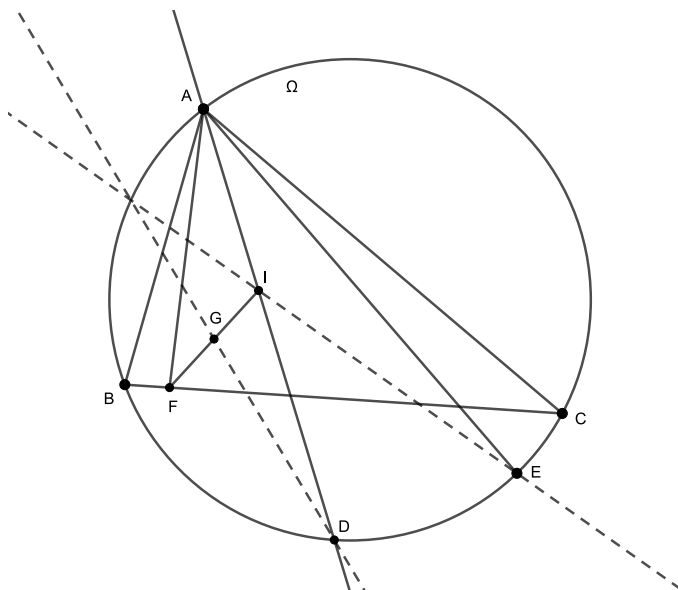
wyborów punktu P . Dla $P = B$ mamy $P' = I = Q$, dla $P = I$ mamy $P' = C = Q$. Niech jeszcze P będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABD . Skoro $\angle APQ = \frac{1}{2}\angle BAC$ to Q będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD . Jednak wtedy w oczywisty sposób $\angle PDQ = 90^\circ$, gdyż DP i DQ to dwusieczne kątów $\angle BDA$ i $\angle CDA$, które sumują się do 180° . Udowodniliśmy więc tezę zadania.



8. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC a Ω jest okręgiem nań opisanym. Prosta AI przecina Ω w punkcie $D \neq A$. Punkt E leży na łuku BDC , a punkt F na boku BC , przy czym $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Punkt G jest środkiem odcinka IF . Wykazać, że proste DG i EI przecinają się na okręgu Ω .

Rozwiązanie:

Poruszajmy punktem E po okręgu Ω . Z równości kątów $\angle BAF = \angle CAE$ mamy, że $\Omega(E) \mapsto BC(F)$. Ponadto $BC(F) \bar{\wedge} k(G)$, gdzie k jest obrazem prostej BC w jednokładności o środku w punkcie I i skali $\frac{1}{2}$. Niech X będzie przecięciem EI z Ω , a Y będzie przecięciem DG z Ω . Z własności 6 i 7 wiemy, że $k(G) \mapsto \Omega(Y)$ oraz $\Omega(E) \mapsto \Omega(X)$. Zatem $\Omega(X) \mapsto \Omega(Y)$. Wystarczy więc wykazać tezę dla trzech wyborów E . Gdy $E = C$ to $F = B$, czyli G jest środkiem odcinka BI . Ponadto X jest środkiem łuku AB . Z lematu o trójkącie wiemy, że $BX = XI$ oraz $BD = DI$, czyli XD to symetralna BI , co oznacza, że DX przechodzi przez środek BI . Gdy $E = B$ mamy analogiczną sytuację. Gdy $E = D$ to F leży na AI , czyli G również, zatem w oczywisty sposób $X = A = Y$. Udowodniliśmy tezę w trzech przypadkach, co kończy rozwiązanie zadania.



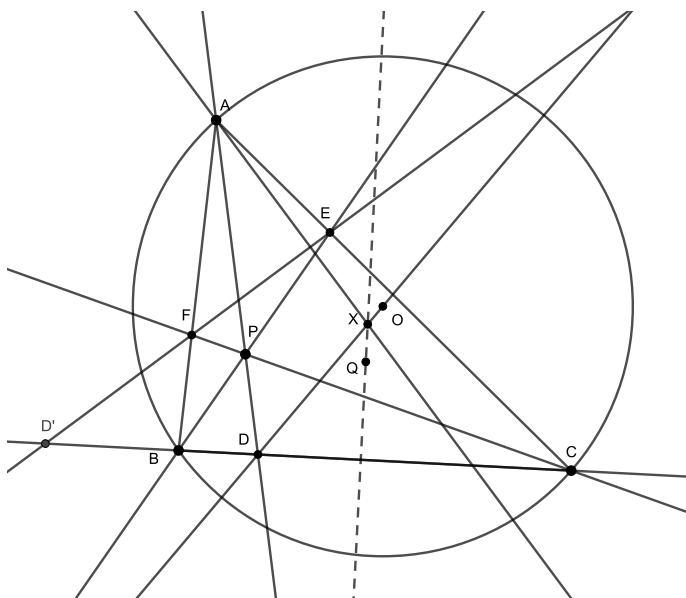
9. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC i jego prosta Eulera k . Punkty M i N są odbiciami punktów B i C względem k . Punkt P jest dowolnym punktem na k . Punkt E jest punktem przecięcia PM i AC , a punkt F jest punktem przecięcia PN i AB . Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC , a S jego odbiciem względem prostej EF . Wykazać, że S leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC . *Rozwiązanie:*

Niech K będzie odbiciem punktu A względem k . Poruszajmy punktem P po prostej k . W oczywisty sposób $k(P) \bar{\wedge} AB(F)$ oraz $k(P) \bar{\wedge} AC(E)$, czyli $AB(F) \mapsto AC(E)$. Z twierdzenia dualnego do twierdzenia Steinera wiemy, że Proste EF są styczne do jednej krzywej stożkowej lub przechodzą przez ustalony punkt. Przechodziłyby one przez jeden punkt gdyby dla $E = A$ mieliśmy $F = A$. Jednak wtedy proste MA i NA musiałyby się przecinać na k , co jest niemożliwe. Czyli proste EF są styczne do pewnej krzywej stożkowej γ . Widzimy, że gdy $E = A$ to EF jest AB , a gdy $F = A$ to EF jest AC , zatem γ jest styczna do prostych AB i AC . Niech X i Y będą punktami przecięcia k z AB i AC . Z symetrii względem prostej k wiemy, że punkty M , X i K są współliniowe. Tak samo punkty N , Y i K są współliniowe. Zatem dla $P = X$ punkt $F = X$ oraz E jest przecięciem MX z AC , czyli prosta EF jest prostą MK . Tak samo dla $P = Y$ prosta EF jest prostą NK . Weźmy teraz jako punkt P punkt będący punktem przecięcia prostej MN z prostą BC . Wtedy prosta EF będzie prostą MN . Zatem nasza krzywa γ będzie styczna do prostych AB , AC , MN , MK i NK . Pięć obiektów wyznacza jednoznacznie krzywą stożkową, więc wystarczy, że znajdziemy krzywą, która jest styczna do tych prostych. Niech ω będzie elipsą wpisaną w trójkąt ABC o ogniskach H i O . Proste MN , NK , MK są symetryczne do boków trójkąta ABC względem prostej OH , zatem te proste są

Rozwiązanie:

106

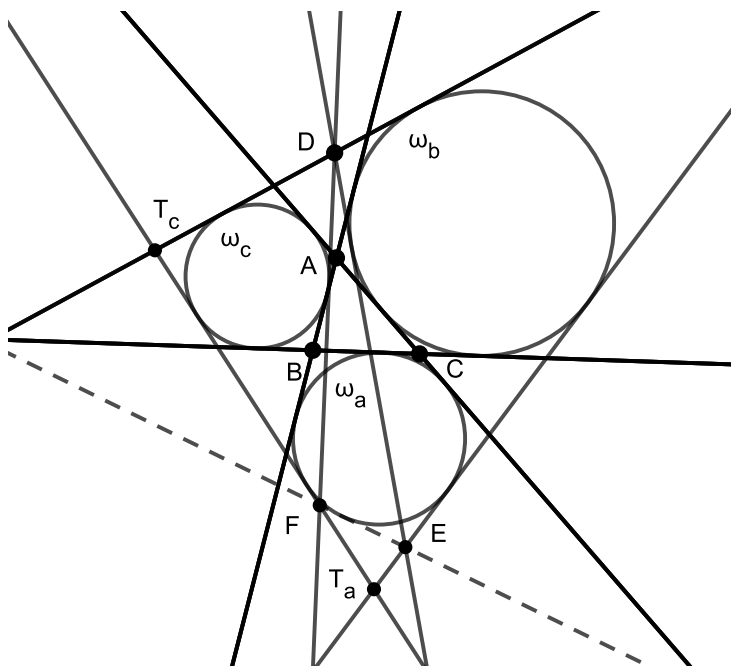
przez A , więc w oczywisty sposób $XQ \perp BC$. Dalej, niech P będzie przecięciem prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Wtedy punkt Q jest punktem w nieskończoności prostej k . Z własności biegunowych wiemy, że prosta EF jest biegunową punktu D względem okręgu opisanego na trójkącie ABC , czyli $OD \perp EF$. Zatem prosta prostopadła do EF przechodząca przez A przecina OD w punkcie w nieskończoności prostej OD . Czyli w tym przypadku prosta QX jest prostą w nieskończoności, więc przechodzi przez punkt $X_{\infty \perp BC}$. Pozostaje znaleźć ostatni punkt. Niech $P = A$. Wtedy pozostaje nam wykazać następujące zadanie: Dany jest trójkąt ABC oraz punkt D na prostej BC . Punkt D' leży na BC w taki sposób, że $(D', D; B, C) = 1$. Punkt Q leży na prostej BC , przy czym $\sphericalangle BAD = \sphericalangle QAC$. Prosta prostopadła do AD' , przechodząca przez A przecina prostą OD w punkcie X , gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykazać, że prosta QX jest prostopadła do BC . Ponownie wykorzystamy tutaj metodę poruszania punktów. Poruszajmy punktem D na BC . Wtedy w oczywisty sposób $BC(D) \mapsto BC(D')$ oraz $BC(D) \mapsto BC(Q)$. Ponadto również $A(AX) \mapsto O(OD)$. Zatem przecięcia prostych AX i OD czyli X leżą na jednej krzywej stożkowej, przechodzącej przez A i O . Gdy D jest środkiem BC to D' jest punktem w nieskończoności prostej BC zatem prosta AQ będzie prostopadła do BC . Jednak prosta OD również jest prostopadła do BC , czyli ich punkt przecięcia to $X_{\infty \perp BC}$. Oznaczmy go przez W . Wiemy więc, że W leży na rozważanej krzywej stożkowej. Czyli punkt X i pęk WX są rzutowe. Niech więc X' będzie punktem przecięcia WX z BC . Wystarczy pokazać dla trzech różnych punktów D , że $X' = D$. Gdy $D = B$ to $D' = B$ i $Q = C$. Punkt X będzie wtedy punktem antypodycznym do B w okręgu opisanym na trójkącie ABC . Czyli $X' = Q$. Podobnie gdy $D = C$. Weźmy jeszcze punkt D jako spodek dwusiecznej wewnętrznej kąta BAC . Wtedy D' jest spodkiem dwusiecznej zewnętrznej oraz $\sphericalangle D'AD = 90^\circ$, czyli $X = D$. Ponadto oczywiście $Q = D$, więc $X' = Q$. To kończy rozwiązanie zadania.



11. Okręgi ω_a , ω_b i ω_c są okręgami dopisanym do trójkąta ABC stycznymi odpowiednio do boków BC , CA i AB . Proste niezawierające boków trójkąta ABC , styczne do dwóch z okręgów ω_a , ω_b i ω_c tworzą trójkąt $T_a T_b T_c$ (gdzie T_a naprzeciwko A , itd.). Punkt D jest dowolnym punktem na prostej $T_b T_c$. Prosta styczna do ω_b poprowadzona z punktu D , różna od $T_b T_c$ przecina prostą $T_a T_b$ w punkcie E , a prosta styczna do ω_c poprowadzona z punktu D , różna od $T_b T_c$ przecina prostą $T_a T_c$ w punkcie F . Wykazać, że prosta EF jest styczna do okręgu ω_a .

Rozwiązanie:

Poruszajmy punktem D po prostej $T_b T_c$. Wtedy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia dualnego do twierdzenia Steiner'a wiemy, że $T_b T_c(D) \mapsto T_c T_a(F)$ oraz $T_b T_c(D) \mapsto T_a T_b(E)$, zatem $T_a T_c(F) \mapsto T_a T_b(E)$. Niech P , Q i R będą punktami przecięcia prostej $T_b T_c$ odpowiednio z prostymi BC , AC i AB . Łatwo zauważyć, że biorąc za D każdy z punktów P , Q , R , T_c i T_b proste EF staną się prostymi BC , AC , AB , $T_c T_a$ i $T_b T_a$ oraz z twierdzenia Steiner'a wiemy, że istnieje krzywa stożkowa styczna do każdej z prostych EF , czyli również do tych 5 prostych. Jednak okrąg ω_a jest styczny do nich, a 5 punktów wyznacza krzywą stożkową jednoznacznie, czyli każda prosta EF będzie styczna do ω_a , co kończy rozwiązanie zadania.



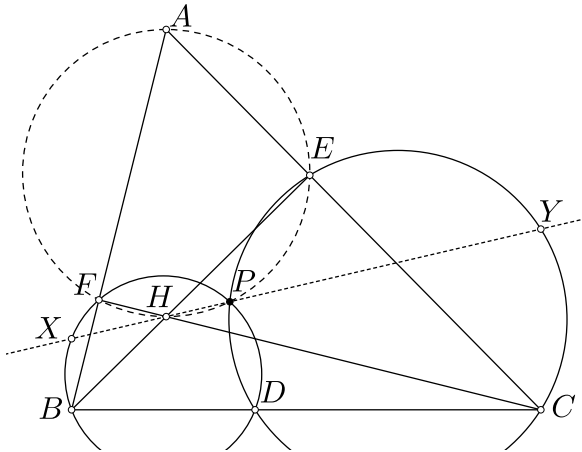
Z ortocentrami

Piotr Kubaty

1. ★ Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt H to jego ortocentrum. Niech punkt D leży na odcinku BC . E, F są spodkami wysokości, poprowadzonych odpowiednio z B, C . Oznaczmy przez ω_1, ω_2 okręgi opisane na BFD, CED . X, Y są punktami antypodycznymi do D odpowiednio na ω_1, ω_2 . Udowodnić, że X, Y, H są współliniowe.

Rozwiązanie:

Przez P oznaczmy drugi punkt przecięcia okręgów opisanych na BDF, CDE . P to punkt Miquela dla trójkąta ABC i punktów D, E, F . Leży więc na okręgu o średnicy AH , $\angle APH = 90^\circ$. Nietrudno spostrzec, że również $\angle XPD, \angle YPD = 90^\circ$, co dowodzi współliniowości H, P, X, Y .



zadanie 1.

2. ★ Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, zaś H – jego ortocentrum. G jest takim punktem, iż czworokąt $ABGH$ jest równoległobokiem. Połóżmy I na prostej GH , tak że prosta AC połowi odcinek HI . Udowodnić, że jeżeli AC przecina okrąg opisany na trójkącie GCI w punktach C, J , to $IJ = AH$.

Rozwiązanie:

Niech J' będzie takim punktem, że $IJJ'H$ jest równoległobokiem. Świadczy to o tym, że $\angle CGI = \angle CJI = \angle JJ'H$, czyli J' leży na okręgu opisanym na trójkącie

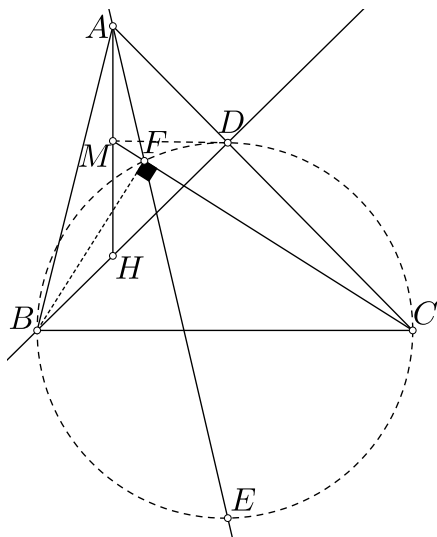
3.★ Okrąg ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC . Proste styczne do ω , poprowadzone z punktów B, C tną się w P . Punkty D, E leżą odpowiednio na AB, AC , w taki sposób iż PD oraz PE są prostopadłe odpowiednio do AB, AC . Wykazać, że środek BC stanowi ortocentrum trójkąta ADE .

Nietrudno spostrzec cykliczności $ADPE$, $BDPM$, $CEPM$. Punkty M , P są izogonalnie sprzężone w kącie BAC . Ponieważ AP zawiera środek okręgu opisanego na ADE , to M jest zawarty w wysokości w tymże trójkącie, poprowadzonej z wierzchołka A . Jeżeli pokażemy, że $\angle DME = 180^\circ - \angle DAE$, dostaniemy, że M jest ortocentrum trójkąta DAE . Zauważmy, że $\angle DME = \angle DMP + \angle PME = \angle DBP + \angle PCE = 360^\circ - (\angle CBA + \angle ACB + \angle PBC + \angle BCP) = 180^\circ - \angle BAC$.

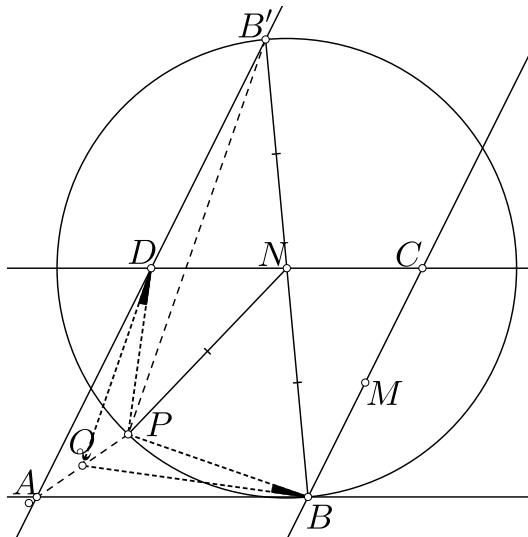
4.★ Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC . Odcinek AA' jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC . Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt H przecina boki AB , AC odpowiednio w punktach E i F . Wykazać, że długość odcinka BC jest równa połowie obwodu trójkąta EFA' .

Oznaczmy przez E', F' odbicia E, F względem B, C . Widzimy, że $\angle ABA' = \angle ACA' = 90^\circ$. A zatem $EF + FA' + A'E = EF + E'F'$. Pozostaje zauważyć, że BC jest linia środkowa w trapezie $EFF'E'$.





zadanie 6.



zadanie 7.

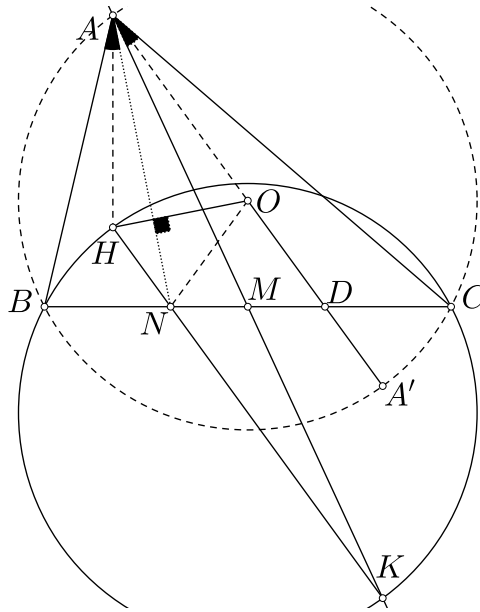
7.★★★ W równoległoboku $ABCD$ punkty M, N są odpowiednio środkami boków BC, CD . Punkt P leży we wnętrzu tego równoległoboku i spełnia $BN = PN$ i $DM = PM$. Punkt Q jest środkiem odcinka PA . Wykazać, że $\angle PBQ = \angle PDQ$.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że P jest ortocentrum BDQ , co zaimplikuje $\angle PBQ = 90^\circ - \angle BQD = \angle PDQ$. Rozważmy odbicie A względem D i napiszmy B' . Jest to bowiem również odbicie B przez N . Wykorzystując $BN = PN$ dostajemy, że P leży na okręgu o średnicy BB' . $DQ \parallel B'P \perp BP$. Analogicznie uzasadniamy $BQ \perp DP$.

8.★★★ Przez O, H oznaczmy odpowiednio środek okręgu opisanego i ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC , spełniającego $AB \neq AC$. Niech M będzie środkiem BC , zaś K – przecięciem AM z okręgiem opisanym na BCH , przy czym M leży na odcinku AK . Zdefiniujmy N jako punkt wspólny HK i BC . Udowodnić, że $AN \perp OH$, pod warunkiem, że $\angle BAM = \angle CAN$. *Rozwiązanie:*

Zdefiniujmy przecięcie prostej AO z prostą BC przez D przez A' będziemy natomiast rozumieć drugie przecięcie prostej AO z okręgiem opisanym na ABC . Nietrudno spostrzec, że środkiem każdego z odcinków HA', AK, ND , jest M . Nasza teza jest równoważna $AH^2 = HN^2 + AO^2 - ON^2$. Widzimy, że $HN = DA', ON = OD$, co implikuje $HN^2 + AO^2 - ON^2 = OA^2 - OD^2 + DA'^2 = A'D \cdot DA + DA'^2 = A'D \cdot A'A = HN \cdot 2AO$. O, M stanowią środki $A'H, A'A$, co oznacza, że $2 \cdot OM = AH$. Pokażemy zatem $AH \cdot OM = HN \cdot AO$, co zakończy rozwiązanie. Ponieważ proste AM, AN są izogonalnie sprzężone w kącie A , podobnie zresztą, jak proste AH, AO , to $\angle HAN = \angle MAO$. Co więcej $AH \parallel OM, HN \parallel AO$ dowodzi $\angle AHN = \angle AOM$. Zatem trójkąty AHN, AOM są podobne i zachodzi $AH \cdot OM = HN \cdot AO$.



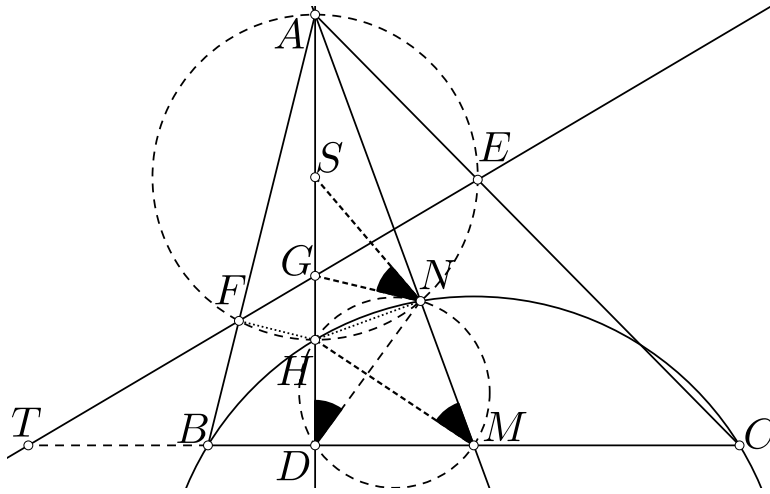
zadanie 8.

9.★★★★ W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem BC . D, E, F oznaczają rzuty kolejno A, B, C na przeciwległe boki. Przez H oznaczmy może ortocentrum trójkąta ABC , a przez S – nic innego, jak środek AH . Co więcej punktem G nazwiemy przecięcie prostych FE i AS . Pokazać, że jeśli N jest przecięciem odcinka AM z okręgiem opisanym na BCH , to $\angle HMA = \angle GNS$. *Rozwiązanie:*

T definiujemy jako przecięcie EF z BC . Najpierw pokażemy $\angle ANH = 90^\circ$. Rozpatrzmy inwersję, przekształcającą H na D . Dostrzegamy, iż okrąg opisany na BCH przechodzi wtedy na okrąg dziewięciu punktów ($H \rightarrow D, B \rightarrow F, C \rightarrow E$). Zatem M zamieni się miejscem z N , $\angle MDA = \angle HNA$. Otrzymujemy, że N jest drugim punktem przecięcia okręgów o średnicy AH i opisanego na HDM . $\angle NMH = \angle NDH$. By $\angle NDH = \angle SNG$ wystarczy $SH^2 = SG \cdot SD$, gdyż $SH = SN$. To zaś jest równoważne $(AH, GD) = -1$ (*Dwustosunek i biegunowe*, Dominik Burek, lemat 2.26, możliwe do wyszukania w internecie). $(SH, GD) = -1$ dostajemy w następujący sposób: Niech U_1, U_2 będą przecięciami TH z prostymi AB, AC . Wtedy $(A, H; G, D) \stackrel{T}{=} (A, U_1; F, B) \stackrel{H}{=} (A, U_2; C, E) \stackrel{T}{=} (A, H; D, G) = \frac{1}{(A, H; G, D)}$, czyli $(A, H; G, D) = -1$.

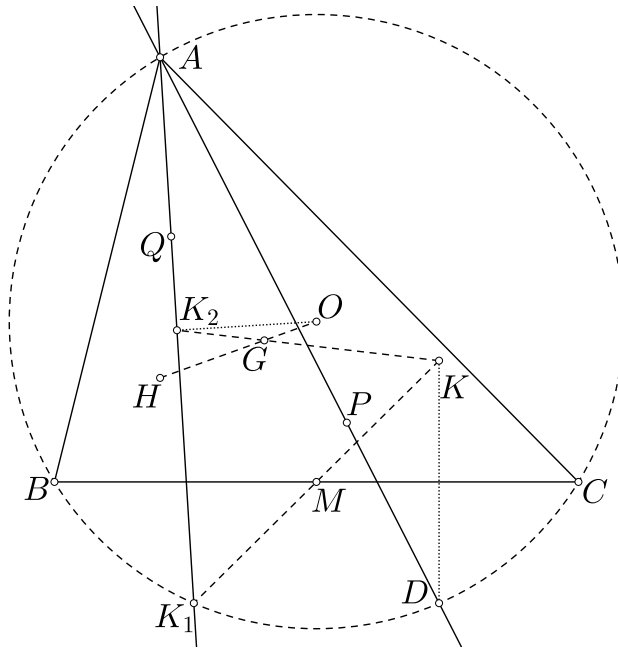
10.★★★★★ Punkt P leży we wnętrzu ostrokątnego trójkąta ABC . Proste AP, BP, CP tną okrąg opisany na ABC odpowiednio w punktach D, E, F . Punkty K, L, M są odbiciami punktów D, E, F odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wykazać, że K, L, M oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednym okręgu. *Rozwiązanie:*

Niech Q będzie punktem izogonalnie sprzężonym do P w trójkącie ABC , G to



zadanie 9.

centroid. $\mathfrak{M}$ to środek BC . Przez K_1 oznaczmy przecięcie AQ z okręgiem opisanym na ABC , a przez K_2 – z prostą KG . $K, \mathfrak{M}, K_1$ są współliniowe. Pokazuje się to tak samo, jak że $H, \mathfrak{M}$, punkt antypodyczny na okręgu opisanym na ABC leżą na jednej prostej. Ponieważ $\overrightarrow{BK_1} + \overrightarrow{CK} = 0$, to G jest centroidem AKK_1 . Tak więc K_2 to środek AK_1 , $\angle AK_2O = 90^\circ$. Znajduje się więc na okręgu o średnicy OQ . Analogicznie L_2, M_2 leżą na tym okręgu. Nadto $2 \cdot K_2G = GK$. Jednokładność w punkcie G o skali -2 zabierze O, K_2, L_2, M_2 na H, K, L, M , okrąg opisany na pierwszych przejdzie na opisany na drugich.

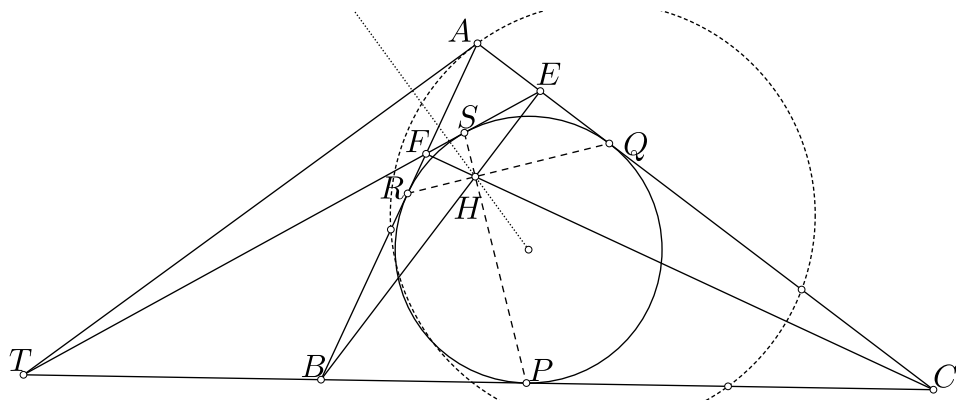


zadanie 10.

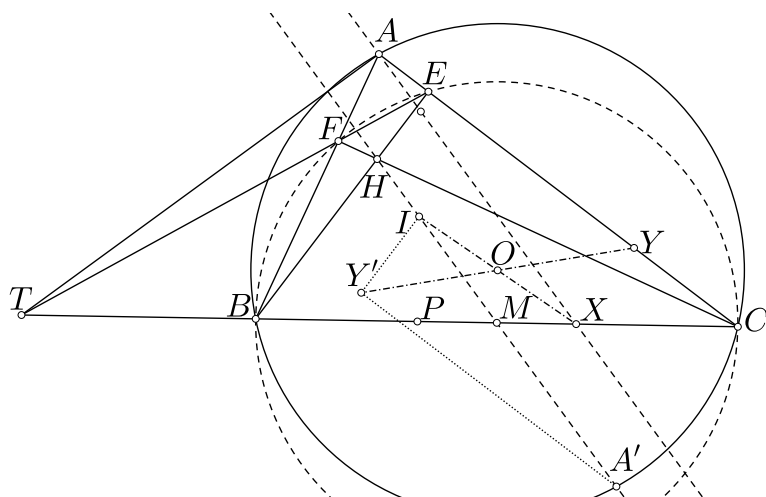
11.★★★★★ Odcinki BE i CF są wysokościami w trójkącie różnobocznym ABC . X, Y, Z są punktami styczności boków BC, CA, AB z okręgami dopisanymi do ABC . Pokazać, że jeżeli EF jest styczna do okręgu wpisanego, to A, X, Y, Z leżą na jednym okręgu. *Rozwiązanie:*

T będzie punktem wspólnym EF, BC . Punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio z prostymi BC, CE, EF, FB nazwiemy P, Q, S, R . Najpierw pokażemy, że punkty H, I, M są współliniowe, gdzie I to środek okręgu wpisanego. Z twierdzenia Brianchona dla sześciokąta $BPCESF$ dostajemy współliniowość S, H, P . Analogicznie otrzymujemy współliniowość R, H, Q . Ponieważ proste QR, SP są biegunowymi odpowiednio A, T . Z twierdzenia La Hire mamy więc, iż H stanowi biegun AT , $IH \perp AT$. Przejdźmy teraz do rysunku drugiego. Oznaczmy przez M środek BC . Znany jest fakt cykliczności $BCFE$. Wiemy również, że M jest środkiem okręgu nań opisanego. Na mocy twierdzenia Brokarda $AT \perp HM$. Istotnie dowodzi to współliniowości H, I, M . Niech A' będzie odbiciem H przez M , O – środkiem okręgu opisanego na ABC , U – odbiciem P względem I . Czytelnik powinien wiedzieć, że A, U, X leżą na jednej prostej. Korzystając z tego $IM \parallel AX$. Rozważmy symetrię płaszczyzny względem punktu O . W szczególności A zostanie przerzucone na A' . Wynika z tego, że prosta AX przejdzie na $A'I$. OM jest symetralną PX , co indukuje, że obrazem punktu X jest przecięcie prostopadłej do BC przechodzącej przez P z prostą $A'I$. Jest to zatem punkt I . Powiedzmy, że Y', Z' są odbiciami Y, Z przez O . Pokażemy, że Y' leży na okręgu o średnicy $A'I$ (analogicznie Z'), co po wykonaniu odbicia względem O da nam tezę. Nietrudno zauważyć, że w jednokładności w punkcie Y , o skali 2 prosta zawierająca O , prostopadła do AC przejdzie na $Y'Q$, na

której leży na przykład I . Wynika z tego $Y'I \perp AC \parallel A'Y'$. Uwaga: kiedy wiemy, że I, X są symetryczne względem O , możemy po prostu stwierdzić, że X jest punktem Bevana w trójkącie ABC , z czego bezpośrednio wynika teza.



zadanie 11. rysunek 1.



zadanie 11. rysunek 2.

Wprowadzenie do dwustosunku

Jakub Adamek

Teoria

Definicja 0.1 (Dwustosunek) *Dane są cztery różne punkty A, C, B, D leżące w tej kolejności na jednej prostej. Dwustosunkiem czwórki punktów A, C, B, D nazywamy wartość wyrażenia*

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

i najczęściej oznaczamy przez $(A, B; C, D)$.

Definicja 0.2 (Czwórka harmoniczna) *Jeżeli dla danych czterech różnych punktów A, C, B, D leżących w tej kolejności na jednej prostej, ich dwustosunek jest równy -1 , to czwórkę tych punktów nazywamy czwórką harmoniczną.*



Twierdzenie. *Dane są cztery różne punkty A, C, B, D leżące w tej kolejności na jednej prostej. Rozpatrzmy takie przekształcenie perspektywiczne o środku w pewnym punkcie S , że:*

$$(A, B, C, D) \stackrel{S}{=} (A', B', C', D').$$

Wówczas

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Dowód Nietrudno zauważyć, że:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{[ASC]}{[CSB]} = \frac{\frac{1}{2}SA \cdot SC \cdot \sin \sphericalangle ASC}{\frac{1}{2}SB \cdot SC \cdot \sin \sphericalangle BSC} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ASC}{\sin \sphericalangle BSC}$$

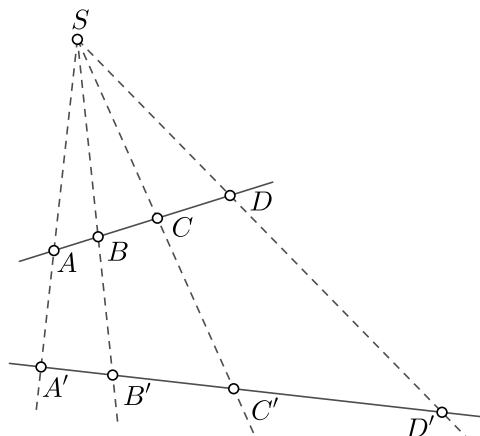
i analogicznie

$$\frac{AD}{DB} = \frac{[ASD]}{[DSB]} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ASD}{\sin \sphericalangle DSB}.$$

Wobec tego:

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\sin \sphericalangle ASC}{\sin \sphericalangle BSC} : \frac{\sin \sphericalangle ASD}{\sin \sphericalangle DSB}.$$

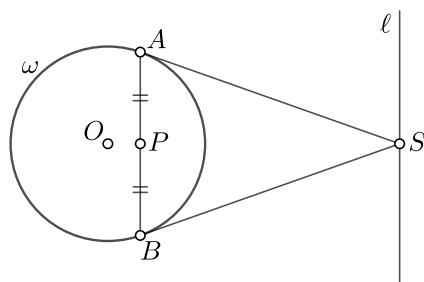
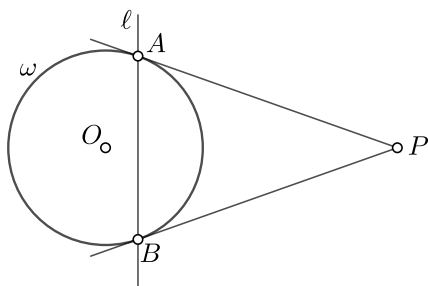
W powyższej równości odpowiednie kąty są kątami skierowanymi. Stąd widzimy, że wartość dwustosunku $(A, B; C, D)$ zależy jedynie od miar kątów pomiędzy prostymi, na których leżą punkty A, B, C i D . Miary tych kątów są jednak stałe. Zatem przy dowolnym przekształceniu perspektywnym względem pewnego punktu wartość dwustosunku jest zachowana.



W szczególności wartość dwustosunku jest zachowana, gdy jeden z punktów A , B , C lub D przechodzi na punkt w nieskończoności.

Definicja 0.3 (Prosta biegunowa) *Dany jest punkt P leżący na płaszczyźnie oraz okrąg ω o środku w punkcie O . Prostą biegunową punktu P względem okręgu ω nazywamy prostą ℓ przechodzącą przez obraz inwersyjny punktu P względem ω , prostopadłą do OP .*

Definicja 0.4 (Biegun prostej) *Dana jest prosta ℓ leżąca na płaszczyźnie oraz okrąg ω o środku w punkcie O . Biegunem prostej ℓ nazywamy punkt, którego biegunową względem okręgu ω jest prosta ℓ .*



Nietrudno zauważyć, że jeżeli:

1. $P = O$, to biegunową punktu P względem okręgu ω jest prosta w nieskończoności.
2. P leży na zewnątrz ω , to prowadząc styczne PA i PB do ω , prosta AB jest biegunową punktu P względem okręgu ω .
3. P leży wewnątrz ω , to przez punkt P prowadzimy cięciwę AB okręgu ω tak, aby punkt P był środkiem odcinka AB . Następnie rysujemy styczne do ω w punktach A i B . Punkt przecięcia poprowadzonych stycznych oznaczmy przez S . Wówczas prostą biegunową punktu P względem okręgu ω jest prosta przechodząca przez punkt S prostopadła do OP .

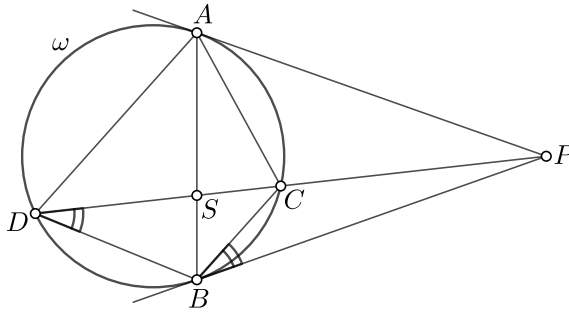
Twierdzenie. Dany jest okrąg ω i dowolny punkt P nie leżący wewnątrz tego okręgu. Proste PA i PB są styczne do okręgu ω odpowiednio w punktach A i B . Przez punkt P prowadzimy prostą, która przecina ω w punktach C i D oraz odcinek AB w punkcie S . Wówczas:

$$(D, C; S, P) = -1.$$

Dowód Przyjmijmy kolejność punktów taką, jak zostało to pokazane na rysunku. Wtedy teza jest równoważna kolejno

$$(D, C; S, P) = -1 \iff \frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SC}} : \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{PC}} = -1 \iff \frac{PD}{PC} = \frac{DS}{SC}.$$

Zauważmy, że trójkąty PBD i PCB są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt (wystarczy proste porównanie odpowiednich kątów). Trójkąty te mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B , czyli zachodzi $\frac{[PBD]}{[PCB]} = \frac{PD}{PC}$. Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, co oznacza, że $\frac{[PBD]}{[PCB]} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2$. Zatem $\frac{PD}{PC} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2$. Analogicznie pokazujemy, że $\frac{PD}{PC} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2$.



Mnożąc stronami otrzymane równości i pierwiastkując stronami otrzymujemy, że $\frac{PD}{PC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BD}{BC}$. Z drugiej strony jednak strony

$$\frac{DS}{SC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \cdot \sin \angle ADB}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BD}{BC},$$

gdyż $\angle ADB + \angle ACB = 180^\circ$. Możemy zatem wywnioskować, że

$$\frac{PD}{PC} = \frac{DS}{SC},$$

co jest równoważne tezie i kończy dowód.

Twierdzenie. Dany jest okrąg ω i punkt P , który nie należy do tego okręgu. Dwie różne proste przechodzące przez punkt P przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach A, D oraz B i C . Wówczas

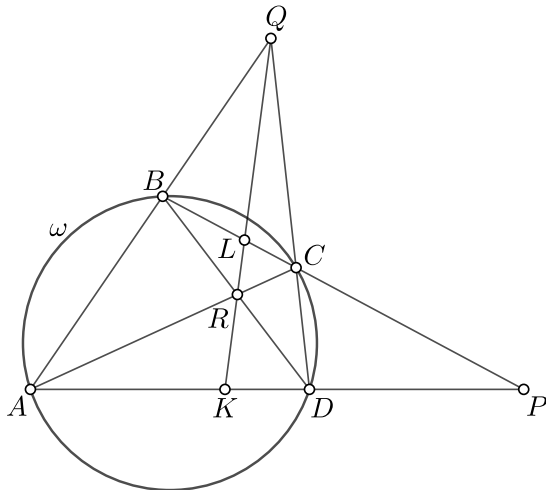
1. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się na biegunowej punktu P względem okręgu ω .

2. Proste AB oraz CD przecinają się na biegunowej punktu P względem okręgu ω .

Dowód Przyjmijmy, że $R = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$, $K = QR \cap AD$, $L = QR \cap BC$. Rozpatrując kolejne przekształcenia perspektywiczne otrzymujemy kolejno:

$$(A, D; K, P) \stackrel{Q}{=} (B, C; L, P) \stackrel{R}{=} (D, A; K, P) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{(A, D; K, P)}.$$

W takim razie $(A, D; K, P) = (B, C; L, P) = -1$.



Z wcześniejszego twierdzenia można teraz wywnioskować, że punkty K i L leżą na biegunowej punktu P względem okręgu ω . Ponieważ punkty K, R, L, Q są współliniowe to prosta QR jest biegunową punktu P względem ω . Tym samym dowiedliśmy obie części twierdzenia.

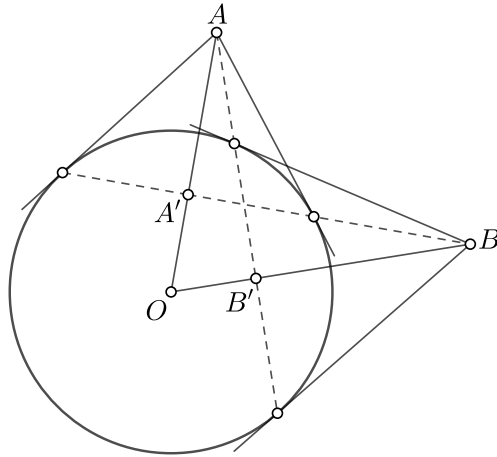
Twierdzenie (La Hire). *Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz dwa punkty A i B . Punkty A, B, O nie są współliniowe. Wówczas punkt A należy do biegunowej punktu B względem okręgu ω wtedy i tylko wtedy, gdy punkt B należy do biegunowej punktu A .*

Dowód Oznaczmy przez B' obraz inwersyjny punktu B w inwersji względem okręgu ω . Z definicji biegunowa punktu B jest prostą prostopadłą do prostej OB w punkcie B' . Zatem $OB \cdot OB' = R^2$, gdzie R oznacza promień okręgu ω .

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt A leży na biegunowej punktu B . Wtedy prosta AB' jest prostopadłą do OB . Niech punkt A' leży na prostej OA w taki sposób, że prosta BA' jest prostopadłą do prostej OA . Wówczas trójkąty OAB' i OBA' są podobne (oba są prostokątne i mają jeden wspólny kąt). Z ich podobieństwa dostajemy

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2,$$

czyli $OA \cdot OA' = R^2$. W takim razie punkt A' jest obrazem inwersyjnym punktu A względem okręgu ω . Oznacza to z kolei, że prosta BA' jest biegunową punktu A .



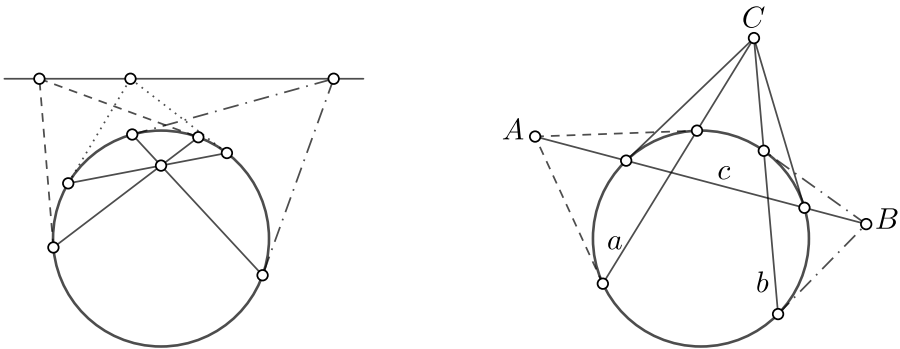
Warto zwrócić tutaj uwagę, że w przypadku współliniowości punktów A, B, O , biegunowe punktów A i B względem okręgu ω są równoległe. Z twierdzenia La Hire płyną poniższe wnioski.

Lemat 0.1 Jeżeli chcemy pokazać, że pewien punkt A należy do prostej ℓ wystarczy pokazać, że biegun prostej ℓ względem okręgu ω leży na prostej biegunowej punktu A względem ω .

Lemat 0.2 Jeżeli chcemy pokazać, że pewne trzy punkty są współliniowe, wystarczy pokazać, że ich proste biegunowe względem okręgu ω są współpękowe - i vice versa - jeśli chcemy pokazać, że pewne trzy proste są współpękowe, wystarczy pokazać, że ich bieguny względem okręgu ω są współliniowe.

Lemat 0.3 Niech a, b, c będą biegunowymi punktów A, B, C względem pewnego okręgu ω . Wówczas

$$C = a \cap b \Leftrightarrow c = AB.$$



Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω . Proste AD i BC oraz CD i AB przecinają się odpowiednio w punktach P i Q . Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie S . Prosta QS przecina ω w punktach K i L . Dowieść, że proste PK i PL są styczne do ω odpowiednio w punktach K i L .

Okrąg ω wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach E, F, G, H . Pokazać, że proste AC, EF, GH przecinają się w jednym punkcie. Pokazać ponadto, że proste AC, BD, EG, FH przecinają się w jednym punkcie.

W trójkącie ABC okrąg ω o środku I jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F . Proste EF i BC przecinają się w punkcie S . Pokaż, że $SI \perp AD$.

Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC . Z punktu A rysujemy styczne AP i AQ do okręgu o średnicy BC , gdzie P i Q to punkty styczności. Pokaż, że punkty P, Q, H są współliniowe.

W trójkącie ABC punkt I to środek okręgu wpisanego. Niech prosta ℓ będzie styczną do okręgu wpisanego różną od jego boków. Na prostej ℓ obieramy punkty X, Y, Z takie, że

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle BIY = \sphericalangle CIZ = 90^\circ.$$

Pokazać, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.

Niech punkty P i Q będą dwoma punktami na półokręgu ω o średnicy AB . Styczne do ω poprowadzone z punktów P i Q oraz proste AP i BQ przecinają się odpowiednio w punktach R i S . Pokazać, że $RS \perp AB$.

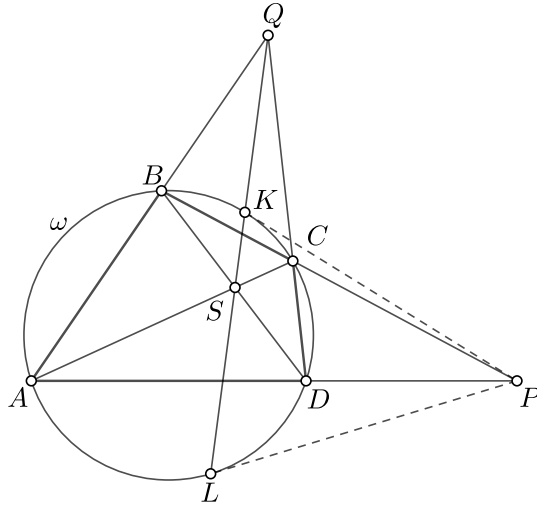
Okrąg ω o środku w punkcie O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N , przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S . Dowieść, że proste BD i OS są prostopadłe.

Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg Ω . Punkt M jest środkiem tego łuku CD okręgu Ω , na którym nie leży punkt A . Niech ω będzie okręgiem o środku M stycznym do prostej AD . Punkt X jest jednym z punktów przecięcia prostej CD z okręgiem ω . Udowodnić, że prosta styczna do okręgu ω w punkcie X przechodzi przez środek odcinka AB .

Dane są okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 , odpowiednio. Okręgi te przecinają się w punktach X i Y . Prosta AB jest wspólną styczną do tych dwóch okręgów, przy czym punkt A leży na ω_1 , a punkt B na ω_2 . Niech styczne do ω_1 i ω_2 w punkcie X przecinają prostą O_1O_2 odpowiednio w punktach K i L . Przypuśćmy, że prosta BL przecina ω_2 po raz drugi w punkcie M , a prosta AK przecina po raz drugi ω_1 w punkcie N . Pokazać, że proste AM, BN i O_1O_2 przecinają się w jednym punkcie.

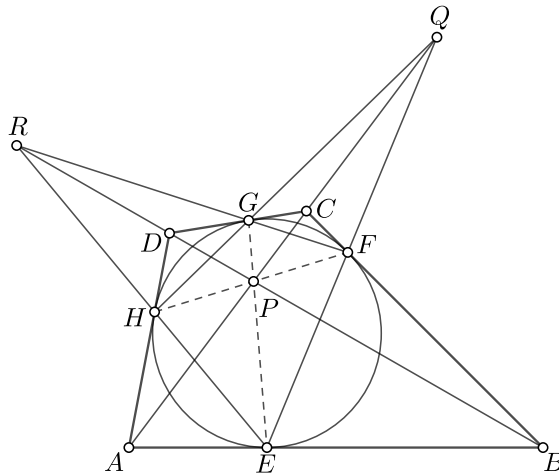
Niech proste PK' i PL' będą prostymi stycznymi do okręgu ω odpowiednio w punktach K' i L' . Pokażemy, że $K' = K$ oraz $L' = L$.

Na mocy twierdzenia 1.3 prosta QS jest biegunową punktu P względem okręgu ω . Z drugiej strony na podstawie definicji biegunowej prosta $K'L'$ jest biegunową punktu Q względem okręgu ω . Zatem $K' = K$ i $L' = L$, co kończy dowód.

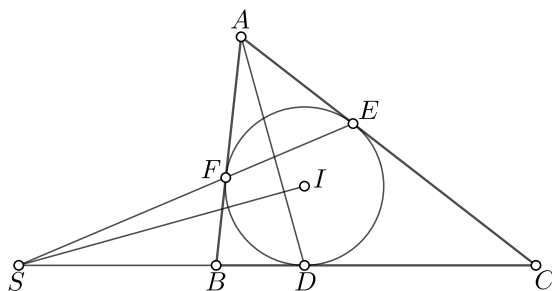


Niech przekątne czworokąta $ABCD$, proste EF i GH oraz EH i GF przecinają się w punktach odpowiednio P , Q i R . Punkt Q leży na biegunowych punktów D i B względem ω , stąd korzystając z twierdzenia La Hire wnioskujemy, że prosta BD jest biegunową punktu Q względem ω . Analogicznie prosta AC jest biegunową punktu R względem ω . Z twierdzenia 1.3 wynika, że prosta PQ jest biegunową punktu R względem ω , zatem punkty Q , A , C muszą być współliniowe.

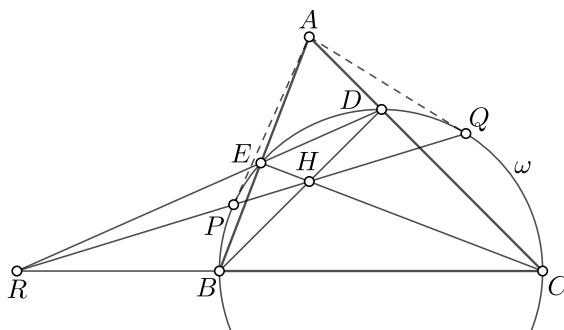
Wiemy, że punkty A , P , C leżą na biegunowej punktu R względem ω , natomiast punkty D , P , B leżą na biegunowej punktu Q względem ω . Zatem z twierdzenia 1.3 punkt P leży na przecięciu prostych EG i HF , co kończy dowód.



Zauważmy, że na mocy twierdzenia La Hire prosta AD jest biegunową punktu S względem ω (ponieważ S leży na biegunowej punktu A , czyli A leży na biegunowej punktu S , a to oznacza, że prosta AD jest biegunową punktu S względem okręgu ω), zatem $SI \perp AD$.



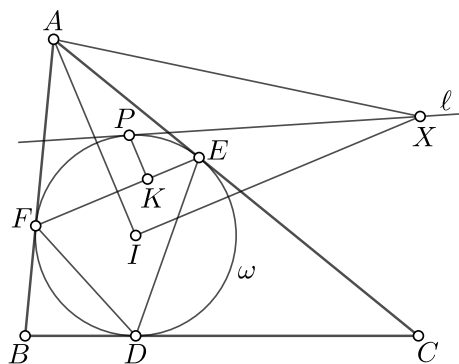
Niech BD i CE będą wysokościami trójkąta ABC . Oczywiście czworokąt $BCDE$ jest wpisany w okrąg ω . Przyjmijmy, że proste ED i BC przecinają się w punkcie R . Wówczas prosta RH jest biegunową punktu A względem ω , jednakże na tej prostej leżą również punkty P i Q , co kończy dowód.



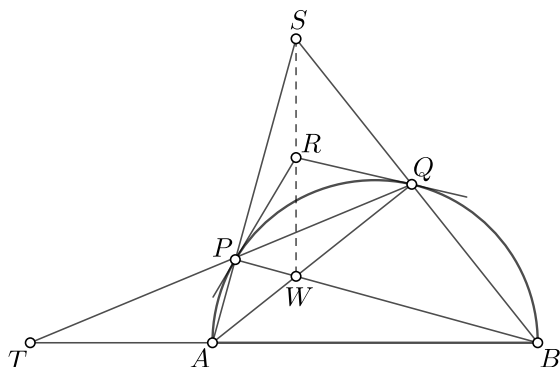
Oznaczmy okrąg wpisany w trójkąt ABC przez ω . Niech ω będzie styczny do prostej ℓ oraz boków BC , CA i AB w punktach odpowiednio P , D , E , F . Korzystając z lematu 1.2 zauważamy, że wystarczy pokazać współliniowość biegunów prostych AX , BY i CZ względem okręgu ω .

Rozpatrzmy rzuty prostokątne punktu P na proste EF , FD , DE otrzymując punkty odpowiednio K , L , M . Pokażemy, że punkty K , L , M są odpowiednio biegunami prostych AX , BY i CZ względem okręgu ω . Ponieważ punkty K , L i M leżą na jednej prostej - prostej Simsona punktu P względem trójkąta DEF - to dowód będzie zakończony.

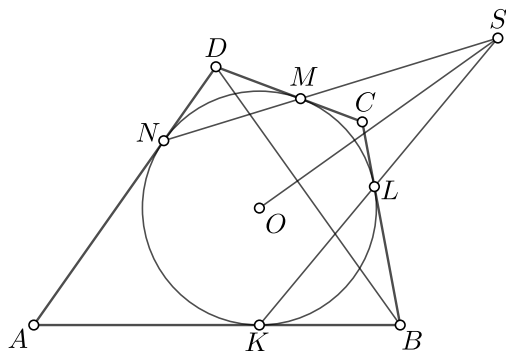
Zauważmy, że $PK \perp EF \perp AI \perp IX$, czyli $PK \perp IX$. Prosta PK jest zatem biegunową punktu X względem ω (PX jest styczna do ω). Ponadto wiadomo, że prosta EF jest biegunową punktu A . Stąd punkt K , będący punktem przecięcia biegunowych punktów A i X względem okręgu ω , jest biegunem prostej AX względem ω (z twierdzenia La Hire). Podobnie punkty L i M są biegunami odpowiednio prostych BY i CZ , co kończy dowód.



Jeżeli $AB \parallel PQ$ teza zadania jest oczywista. Przyjmijmy zatem, że proste AB i PQ oraz BP i AQ przecinają się odpowiednio w punktach T i W . Korzystając z twierdzenia La Hire oraz twierdzenia 1.3 wnioskujemy, że punkty S , R i W leżą na biegunowej punktu T względem ω . Zatem $RS \perp AB$, co kończy rozwiązanie.



Na podstawie twierdzenia La Hire uzyskujemy, że punkty B i D leżą na prostej biegunowej punktu S względem okręgu ω . Zatem prosta BD jest biegunową punktu S względem okręgu ω , czyli proste BD i OS są prostopadłe, co kończy dowód.



Przyjmijmy, że okrąg ω przecina prostą CD w punktach X i Y , przy czym punkt X leży między punktem D i Y . Niech N będzie środkiem odcinka AB . Teza jest równoważna temu, że prosta CD , która przechodzi przez punkty D, X, Y, C jest biegunową punktu N względem okręgu ω .

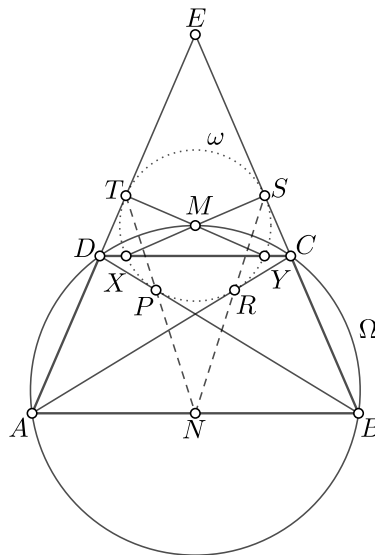
Oznaczmy $E = AD \cap BC$. Zauważmy, że ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt ACE . Istotnie, M leży na dwusiecznej kąta CAE , ponieważ M jest środkiem łuku CD , na którym nie leży punkt A . Ponadto EM jest dwusieczną kąta $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle AEC$, ponieważ trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg, czyli $\sphericalangle DAB = 180^\circ - \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC$, co oznacza, że trójkąt EAB jest równoramienny oraz M leży na symetralnej odcinka AB . W takim razie M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACE , co oznacza, że ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt ACE . Analogicznie pokazujemy, że ω jest okręgiem wpisanym w trójkąt BDE .

Przyjmijmy, że ω jest styczna do odcinków BD, AC, BE i EA odpowiednio w punktach P, R, S, T . Pokażemy, że punkty T, P, N są współliniowe. Nietrudno zauważyć, że $AN = NB$. Ponadto z najmocniejszego twierdzenia planimetrii oraz symetrii

$$PD = DT \quad \text{oraz} \quad BP = BS = TA.$$

Zatem $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BP}{PD} \cdot \frac{DT}{TA} = 1$, czyli na mocy twierdzenia Menelaosa dla trójkąta ABD punkty T, P, N są współliniowe. Podobnie pokazujemy, że punkty S, R, N są współliniowe.

Zauważmy, że prosta TP jest biegunową punktu D względem okręgu ω . Ponieważ punkt N leży na prostej TP , biegunowej punktu D , to na mocy twierdzenia La Hire punkt D leży na biegunowej punktu N względem okręgu ω . Analogicznie punkt C leży na biegunowej punktu N względem okręgu ω . Zatem prosta CD jest biegunową punktu N względem okręgu ω . Oznacza to w szczególności, że NX jest styczna do okręgu ω , co kończy dowód.



Niech P będzie środkiem odcinka AB ; skoro P ma tę samą potęgę punktu względem okręgów ω_1 i ω_2 , to leży on na osi potęgowej tych dwóch okręgów - tj. na XY .

Z symetrii KY jest styczne do ω_1 , co oznacza, że XY jest biegunową punktu K względem okręgu ω_1 . Ponieważ jednak P leży na XY , to z twierdzenia La Hire biegunowa punktu P względem okręgu ω_1 przechodzi przez punkt K . Jednakże biegunowa punktu P względem okręgu ω_1 przechodzi też przez punkt A . Oznacza to, że prosta AK jest biegunową punktu P względem okręgu ω_1 . W takim razie PN jest styczne do ω_1 . Analogicznie PM jest styczne do ω_2 .

Zatem punkty A, B, M, N leżą na jednym okręgu o środku w punkcie P oraz $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANP = 90^\circ$. Niech A' będzie punktem antypodycznym do punktu A na okręgu ω_1 , a B' punktem antypodycznym do punktu B na okręgu ω_2 . Prosta BN przechodzi przez punkt A' , a prosta AM przez punkt B' . Zauważmy, że $AA'BB'$ jest trapezem, a O_1, O_2 są środkami odpowiednio jego podstaw. Zatem $A'B, B'A, O_1O_2$ przecinają się w jednym punkcie, co kończy dowód.

Spis treści

Wstęp	3
Treści zadań	12
Zawody indywidualne grupy młodszej	12
Zawody indywidualne grupy starszej	14
Zawody indywidualne elity	16
Mecz matematyczny grupy młodszej	18
Mecz matematyczny grupy starszej	20
Rozwiązania	22
Zawody indywidualne grupy młodszej	22
Zawody indywidualne grupy starszej	29
Zawody indywidualne elity	36
Mecz matematyczny grupy młodszej	43
Mecz matematyczny grupy starszej	50
Referaty	55
Maciej Dziuba & Kamil Galewski - Podwójne zliczanie	55
Maciej Dziuba & Kamil Galewski - Wielomiany	58
Maciej Dziuba & Kamil Galewski - Podobieństwo (spiralne) trójkątów . .	62
Jakub Węgrecki - Równania diofantyczne	65
Jan Fornal - Algorytmy	67
Jan Fornal - Probabil	71
Jan Fornal - Wielomiany	76
Radomił Baran - Równania funkcyjne	80
Radomił Baran - Inwersja	85
Radomił Baran - Metoda poruszania punktów	95
Piotr Kubaty - Z ortocentrami	110
Jakub Adamek - Wprowadzenie do dwustosunku	118