V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

---

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Rabka Zdrój 2017

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Rabka Zdrój 2017

DW Karabela
Rabka Zdrój

Skład tekstu:

Dominik Burek
Jacek Dymel
Jędrzej Kula
Jakub Węgrecki
Artur Zubilewicz

Wstęp

Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Liczby $1, 2, \cdots, 200$ zostały rozstawione w wierzchołkach dwustukąta foremnego. Dla każdej liczby n spośród kolejnych 99 liczb stojących bezpośrednio za tą liczbą oraz kolejnych 99 stojących bezpośrednio przed tą liczbą znajduje się taka sama liczba liczb mniejszych od n. Wyznaczyć liczbę, jaka stoi naprzeciw 111.

2. W trójkącie ostrokątnym poprowadzono trzy wysokości. Wykazać, że z trzech wysokości oraz trzech boków można zbudować dwa trójkąty.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $x, y > 0$ zachodzi nierówność:

$$x^2 + xy + y^2 \leqslant 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$

4. Niech n będzie liczbą parzystą, $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, $(a + b)|(a^n + b^n)$. Wyznaczyć a i b.

5. Na stole w stosie leży 2017 monet. Chowamy do kieszeni jedną monetę i stos rozdzielamy na dwie części (nie muszą być równe). Następnie z dowolnego stosu mającego więcej dwie monety znów chowamy jedną, a resztę rozdzielamy na dwie części itd. Czy można doprowadzić do sytuacji, że na stole zostaną wyłącznie stosy zawierające po 5 monet?

6. Niech AD i BE będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt P – punktem przecięcia prostej DE z łukiem BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego nie należy punktu A . Udowodnić, że dwusieczna kata BCP odcina z kąta DPB trójkąt równoramienny.

7. Wzdłuż okręgu napisanych zostało n dodatnich liczb naturalnych. Między każdymi dwoma sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik. Potem wyjściowe n liczb wycieramy, a z otrzymanymi postępujemy analogicznie. Udowodnij, ze po pewnej liczbie kroków wszystkie liczby na okręgu będą jednakowe.

8. Rozważmy równania kwadratowe postaci $x^2 + kx + n = 0$, gdzie k i n są liczbami całkowitymi. Podać przykład doboru współczynników k i n tak, aby

dla każdej liczby całkowitej nieujemnej m równanie $x^2+(k+m)x+(n+m)=0$ miało dokładnie dwa różne rozwiązania całkowite.

9. W trójkącie ABC poprowadzone środkowe z wierzchołków A i B przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach odpowiednio D i E. Na boku AC wybrano punkt P, a na boku BC punkt Q spełniające warunki: $AP = 2 \cdot PC$, $BQ = 2 \cdot QC$. Wykazać, że kąty APE i BQD są równe.

10. Rozwiązać równanie $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = -1$.

11. Udowodnić, że

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$$

12. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a i b, dla których liczby $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ i $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ są liczbami całkowitymi.

13. W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego na tym trójkącie oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.

Zawody indywidualne grupy średniej

1. Dany jest trójkąt ABC. Odcinek AD jest cięciwą okręgu opisanego na ABC. Punkt E jest przecięciem AD oraz dwusiecznej $\sphericalangle ABC$. Okrąg przechodzący przez punkt B i styczny do odcinka AD w punkcie E przecina BC w punkcie F oraz okrąg opisany na ABC w punkcie G. Wykaż, że G, F, D są współliniowe.

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na jeden z k kolorów. Wykazać, że istnieją cztery parami różne liczby całkowite a, b, c, d jednego koloru, spełniające następujące warunki:

$$ad = bc,\ \tfrac{c}{a} = 2017^n,\ \tfrac{b}{a} = 2018^m$$

gdzie m, n są pewnymi liczbami całkowitymi dodatnimi.

3. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb całkowitych a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a + d = b + c \\ a^3 + 46d^3 = c^3 \\ b^3 + 46c^3 = d^3 \end{cases}$$

4. Dane są takie liczby całkowite a, b, że ab jest dzielnikiem $a^2 - b^2$. Wykaż, że $|a| = |b|$.

5. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB. Punkt E jest środkiem CD. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$ to $AC = CD$.

6. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej pary liczb wymiernych a, b liczby $P(a)$ oraz $P(b)$ są różne. Rozstrzygnąć, czy wynika z tego, że dla dowolych liczb rzeczywistych x, y liczby $P(x)$ oraz $P(y)$ są różne.

7. Wyznaczyzystkie pary liczb rzeczywistych x, y takich, e:

$$x^2 + y^2 + 2x + xy + 4 = 2y$$

8. Niech $f(n)$ oznacza liczbzwizanania $x^2 + y^2 = n$ w liczbach cakowitych x, y. Pokazae $f(n) = f(2n)$

9. Rozstrzygnzy istniej takie rozczne zbiory 2017-elementowe A, B, e $S(A) = S(B)$ oraz $S_2(A) = S_2(B)$, gdzie $S(X)$ to suma elementioru X oraz $S_2(X)$ to suma kwadratementioru X.

10. Kady punkt paszczyzny naley pomalowa pewien kolor w taki sposby kada prosta bya jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest najwiza moliwa liczba kolorth mona uy pomalowania punktj paszczyzny? Odpowied uzasadnij.

11. Znalezystkie funkcje f okrelone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych rch od zera, przyjmujce wartoci w tym samym zbiorze i speniajce rnie funkcyjne:

$$f(xyf(x + y)) = f(x) + f(y)$$

dla kadej pary liczb rzeczywistych rch od 0, takich, e $x + y$ te jest r od 0.

12. Dany jest czworokt wypuky $ABCD$, w kt boki AB i CD nie s rlege. Rozwaamy okrg, przechodzcy przez punkty A i B, styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrg, przechodzcy przez punkty C, D styczny do prostej AB w punkcie Q Zakadamy, e punkty P i Q le na odcinkach CD i AB oraz e wsp ciwa tych okrw przechodzi przez rodek odcinka P Q. Udowodnie proste AD i BC s rlege.

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Pokazać, że dowolna liczba całkowita dodatnia jest sumą liczb postaci $2^i 3^j$, gdzie i, j są liczbami całkowitymi nieujemne, oraz żaden składnik nie jest dzielnikiem innego.

2. Dane są liczby całkowite $1 < k < n$. Zbiór $\mathcal{S}$ składa się z n liczb rzeczywistych takich, że średnia arytmetyczna dowolnych k z nich jest liczbą całkowitą. Pokazać, że dowolny element zbioru $\mathcal{S}$ jest liczbą całkowitą.

3. Niech KL i KN będą styczny do okręgu ω w punktach L i N. Punkt M jest taki, że K, N, M leżą na jednej prostej, w tej kolejności. Okrąg opisany na trójkącie KLM przecina okrąg ω w punkcie P. Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu N na prostą ML. Pokazać, że $\sphericalangle MPQ = 2\sphericalangle KML$.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta wewnętrznego CAB. Udowodnić, że proste BE i CD przecinają się w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta zewnętrznego $\sphericalangle CAB$.

5. Dana jest liczba całkowita dodatnia a taka, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4(a^n + 1)$ jest sześcianem liczby całkowitej dodatniej. Pokazać, że $a = 1$.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ spełniające dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich x i y warunek

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

7. Wyznaczyć wszystkie wielomiany rzeczywiste stopnia 2017, które można przedstawić jako sumę 2017 funkcji okresowych.

8. Pokazać, że dla dowolnego zbioru n punktów na płaszczyźnie istnieje co najwyżej $cn\sqrt{n}$ par punktów, których odległość jest równa 1, dla pewnej stałej $c > 0$.

9. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$m^2 - 1 \mid 3^m + (n! - 2)^m.$$

10. W tablicy

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

takiej, że $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ dla $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, każda liczba całkowita dodatnia występuje w niej dokładnie 2017 razy. Pokazać, że dla pewnej pary $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ zachodzi nierówność $a_{m,n} > mn$.

11. Dany jest niepusty podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunek: Jeśli $x \in X$ to $4x \in X$ oraz $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \in X$. Pokazać, że $X = \mathbb{N}$.

12. Punkty O, I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC. Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego z bokiem BC, a punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia prostych AI i AO z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Proste FI i ED przecinają się w punkcie S, proste SC i BE — w M, a proste AC i BF — w N. Udowodnić, że punkty M, I, N sa współliniowe.

Zawody indywidualne super grupy

1. Liczba całkowita dodatnia N jest n-dobra jeśli posiada co najmniej n różnych dzielników pierwszych oraz istnieją dzielniki $1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczby N, których suma jest równa N. Pokazać, że istnieją liczby n-dobre dla dowolnego n.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych liczb x, y zachodzi równość

$$f(y)f(x + f(y)) = f(x)f(xy).$$

4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dane są liczby rzeczywiste $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1 + a_2 + \cdots a_n} \leqslant \max\left\{\frac{b_1}{1}, \frac{b_1 + b_2}{2}, \ldots, \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right\}.$$

5. W trójkącie ostrokątnym ABC ($\sphericalangle A < \min\{\sphericalangle B, \sphericalangle C\}$) punkt P leży na odcinku BC. Punkty D i E leżą na bokach AB i AC tak, że $BP = PD$ oraz $CP = PE$. Pokazać, że przy zmieniającym się położeniu punktu P na odcinku BC, okręgi opisane na trójkątach ADE mają punkt wspólny różny od A.

6. Niech p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Wyznaczyć liczbę takich trójek (x, y, z), że $x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ oraz

$$p \mid x + y + z \quad \text{oraz} \quad p \mid xyz - 1.$$

7. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$m^2 - 1 \mid 3^m + (n! - 2)^m.$$

8. Wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ są liczbami całkowitymi dodatnimi i każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz. Ponadto

$$a_{n+1} \in \{a_n - 1, 4a_n - 1\} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrazu a_{2017}.

9. Dane są liczby całkowite dodatnie k i n i zbiór A taki, że

$$\#A \leqslant \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Dla $i = 1, 2, \ldots, n+1$ niech A_i oznaczają zbiory n-elementowe takie, że

$$\#(A_i \cap A_j) \leqslant k \quad \text{dla } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$$

oraz

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i.$$

Wyznaczyć liczbę elementów zbioru A.

10. Dany jest niepusty podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunek: Jeśli $x \in X$ to $4x \in X$ oraz $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \in X$. Pokazać, że $X = \mathbb{N}$.

11. Okrąg wpisany o środku w punkcie I jest wpisany w trójkąt ABC i jest styczny do BC w punkcie D. Odcinek AK jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt L jest taki, że $AL \perp BC$ oraz $IL \perp AD$. Pokazać, że KL połowi odcinek ID.

12. Niech $d \geqslant 2$ i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że dla dowolnego niestałego wielomianu f o współczynnikach rzeczywistych stopnia mniejszego od n, liczby $f(0), f(1), \ldots, f(d^n - 1)$ można podzielić na d rozłącznych grup takich, że suma liczb w każdej grupie jest taka sama.

Zadania trudniejsze

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA = 90^\circ.$$

Niech P^* będzie punktem izogonalnie sprzężonym do P względem trójkąta ABC. Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PP^*.

2. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniają równości

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Pokazać, że

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \leqslant n.$$

3. Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Oznaczmy przez $\mathcal{G}$ graf, którego wierzchołkami są liczby całkowite dodatnie i który nie zawiera pełnego grafu dwudzielnego $B_{k,k}$. Pokazać, że istnieje dowolnie długi ciąg arytmetyczny w $\mathbb{Z}^+$ w którym nie ma dwóch wyrazów połączonych przez krawędź $\mathcal{G}$.

4. Pokazać, że istnieje liczba naturalna n taka, że każdy dzielnik pierwszy liczby $2^n - 1$ jest mniejszy niż $2^{\frac{n}{2017}} - 1$.

5. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $\pi(n)$ dzieli n, gdzie $\pi(n)$ jest liczbą liczb pierwszych mniejszych od n.

6. Dodatnie liczby całkowite k i n spełniają nierówność $k \geqslant (n-1)!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będące odpowiednio dzielnikami liczb $k+1, k+2, \ldots, k+n$.

7. Dla liczby całkowitej dodatniej n, niech $S(n)$ oznacza sumę wszystkich dzielników pierwszych liczby n (np. $S(1) = 0$, $S(2) = 2$, $S(45) = 8$). Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodanie n takie, że $S(n) = S(2^n + 1)$.

8. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje nierozkładalny wielomian stopnia n, o współczynnikach całkowitych taki, że wszystkie jego wartości w liczbach całkowitych są złożone.

9. Wyznaczyć wszystkie wielomiany o współczynnikach całkowitych dodatnich takich, że: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby pierwszej p takiej, że n jest resztą kwadratową modulo p, liczba $P(n)$ jest również resztą kwadratową modulo p.

10. Dany jest zbiór $\mathcal{S}$ składający się z $2^k+1 \geqslant 3$ liczb naturalnych. Pokazać, że nie istnieje k-elementowy zbiór liczb pierwszych $\mathcal{P}$ taki, że dzielniki pierwsze wszystkich liczb ze zbioru

$$S + S := \{a + b \colon a, b \in S\}$$

należą do $\mathcal{P}$.

11. Danych jest n punktów na prostej takich, że dowolna odległość między punktami występuję co najwyżej dwa razy. Pokazać, że liczba odległości między punktami występujących dokładnie jeden raz jest nie mniejsza niż $\lfloor n/2 \rfloor$.

12. Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ taki, że $a_1 = 1$ oraz dla dowolnej liczby pierwszej p, liczby w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ dają wszystkie możliwe reszty przy dzieleniu przez p. Pokazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 1.$$

Mecz matematyczny grupy młodszej

1. Niech x_0 będzie rzeczywistym rozwiązaniem równania

$$x^3 + px + q = 0,$$

gdzie p i q są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $4qx_0 \leqslant p^2$.

2. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < 10.$$

Pokazać, że z odcinków o długościach a, b i c można zbudować trójkąt.

3. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi podzielność

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że

$$\phi(n) = \frac{n}{3},$$

gdzie $\phi(n)$ jest liczbą liczb względnie pierwszych z n i mniejszych od n.

5. Liczby całkowite dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a+b+c+1$.

6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n różnych liczb naturalnych takich, że suma każdych dwóch spośród tych liczb jest podzielna przez ich różnicę.

7. Niech $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ będzie rodziną podzbiorów n-elementowego zbioru $\mathcal{A}$ spełniającą warunek: Dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in \mathcal{A}$ istnieje podzbiór $A_i \in \mathcal{F}$ zawierający dokładnie jeden z nich. Pokazać, że $2^k \geqslant n$.

8. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następujacej własnosci: Po usunieciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

9. W 4034 pól tablicy $\mathcal{A}$ o wymiarach 2017×2017 wpisano liczby rzeczywiste. Pokazać, że dla pewnej liczby całkowitej $k > 1$ istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ wpisane w pewne pola tablicy $\mathcal{A}$ w taki sposób, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ liczby a_{2i-1} i a_{2i} są w tym samym wierszu, natomiast liczby a_{2i} oraz a_{2i+1} leżą w tej samej kolumnie (przyjmujemy, że $a_{2k+1} := a_1$).

10. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Przedłużenia boków AD i BC wzdłuż punktów A i B przecinają się w punkcie F. Niech G będzie takim punktem, że czworokąt $ECGD$ jest równoległobokiem. Punkt H obrazem punktu E w symetrii względem prostej AD. Pokazać, że punkty D, H, F i G leżą na jednym okręgu.

11. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany w punkcie $R \neq A$, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkty K i L są środkami boków odpowiednio BC i AC. Pokazać, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Wyznaczyć maksymalną możliwą wartość k dla której nierówność

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant k \cdot \max\left((a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c.

2. Alicja i Bartosz grają w następującą grę: każde z nich wybiera ciąg dwóch wyników rzutu monetą, następnie rzucają monetą aż do pojawienia się jednego z tych ciągów. Grę wygrywa osoba, której ciąg pojawił się pierwszy. Bartosz wybrał 'OO'. Alicja odkryła że moneta jest nieuczciwa: z prawdopodobieństwem 2/3 pojawia się orzeł. Jaki ciąg powinna wybrać Alicja i jakie będzie wtedy prawdopodobieństwo jej wygranej?

3. Dane jest 42 liczb rzeczywistych z przedziału $[1, 10^6]$. Dowieść, że można wybrać cztery z nich, tak że dla każdej permutacji (a, b, c, d) tej czwórki zachodzi

$$25(ab+cd)(ad+bc) \geqslant 16(ac+bd)^2$$

4. Danych jest $n \geqslant 5$. Rozważmy wszystkie ciągi $(e_1, \ldots e_n)$, gdzie $e_i \in \{-1, 1\}$. Na ciągach można wykonywać następującą operację: wybrać pięć kolejnych wyrazów i zmienić ich znaki. Powiemy że dwa ciągi są podobne, jeśli za pomocą tych operacji można zamienić jeden w drugi. Znajdź maksymalną liczbę parami niepodobnych ciągów długości n.

5. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, $AC = BD$. Przekątne AC i BD przecinają się w P. Niech ω_1 będzie okręgiem opisanym na ABP, a O_1 jego środkiem. Podobnie ω_2 i O_2 niech będą okręgiem opisanym na CDP i jego środkiem. Odcinek BC przecina ω_1, ω_2 ponownie w punktach S, T. Niech M i N będą odpowiednio środkami łuków SP (nie zawierającego B) i TP (nie zawierającego C). Dowieść że $MN || O_1O_2$.

6. Rozważmy ciąg $2^{2^1}+1, 2^{2^2}+1, \ldots 2^{2^n}+1, \ldots$ oraz dowolny rosnący ciąg arytmetyczny (nieskończony). Dowieść, że te dwa ciągi mają albo nieskończenie wiele, albo najwyżej jeden wspólny element.

7. W mieście żyje n ludzi, a każdy z nich ma 1000 przyjaciół. Dowieść, że można utworzyć pewną grupę osób S taką, że co najmniej $n/2017$ osób z S ma dokładnie dwóch przyjaciół w S.

8. Dowieść, że równanie

$$n! = (4^k - 1)(7^l - 1)$$

ma skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych n, k, l.

9. Dwa okręgi Γ_1 i Γ_2 z promieniami r_1 i r_2, $(r_2 > r_1)$, są styczne zewnętrznie. Prosta t_1 jest styczna do Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w punktach A i D. Prosta t_2 jest równoległa do t_1 i styczna do okręgu Γ_1, przecina Γ_2 w E i F. Prosta t_3 przechodzi przez punkt D i przecina prostą t_2 w B, okrąg Γ_2 w C. Dowieść że okrąg opisany na trójkącie ABC jest styczny do t_1.

10. Dany jest trójkąt ABC, opisany na nim okrąg ω. M i N to środki odcinków AB i AC. T jest środkiem łuku BC nie zawierającego A. Punkty X i Y to odpowiednio przecięcia okręgów opisanych na AMT i ANT z symetralnymi odcinków AC i AB, przy czym X i Y leżą wewnątrz trójkąta ABC. Wreszcie, niech K będzie przecięciem prostych MN i XY. Dowieść że $KA = KT$.

11. Wielomian P spełnia równość

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

Dowieść, że jeśli P ma pierwiastek rzeczywisty, to jest tożsamościowo równy zero.

Rozwiązania

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Liczby $1, 2, \cdots, 200$ zostały rozstawione w wierzchołkach dwustukąta foremnego. Dla każdej liczby n spośród kolejnych 99 liczb stojących bezpośrednio za tą liczbą oraz kolejnych 99 stojących bezpośrednio przed tą liczbą znajduje się taka sama liczba liczb mniejszych od n. Wyznaczyć liczbę, jaka stoi naprzeciw 111.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeżeli liczba n jest parzysta, to liczb mniejszych od n jest nieparzysta liczba. Zatem naprzeciw liczby parzystej n stoi liczba mniejsza od n.

To oznacza, że na przeciw liczby 2 stoi 1 (bo jest to jedyna liczba mniejsza od 2). Zatem naprzeciw liczby 4 musi być 3. Analogicznie naprzeciw 6 stoi 5 itd. Wobec tego naprzeciw liczby 111 znajduje się liczba 112.

2. W trójkącie ostrokątnym poprowadzono trzy wysokości. Wykazać, że z trzech wysokości oraz trzech boków można zbudować dwa trójkąty.

Rozwiązanie:

Niech trójkąt ABC będzie trójkątem ostrokątnym o bokach długości $BC = a, AC = b, AB = c$. Niech h_a, h_b, h_c będą długościami wysokości opuszczonych odpowiednio na boki BC, AC, AB.
Jeżeli z wysokości można zbudować trójkąt, to zadanie zostało rozwiązane.
Załóżmy, że jedna z wysokości np. h_c spełnia nierówność $h_a + h_b < h_c$. Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta ABC.
Odcinek o długości c jest dłuższy od każdego z odcinków h_a i h_b. W trójkącie AHB zachodzi nierówność $c < AH + HB$, a ponieważ $AH < h_a$ i $BH < h_b$, otrzymujemy $c < h_a + h_b$. Pierwszy trójkąt zbudujemy z boku c i wysokości h_a i h_b.

Wykażemy, że odcinków a, b, h_c zbudujemy drugi trójkąt. Zauważmy, że h_c jest mniejszy od a i b. Niech punkt D będzie spodkiem wysokości h_c na odcinek AB. Wówczas $a < h_c + BD$. Stąd i z nierówności $BD < c < BH + HA < h_a + h_b \leqslant h_c < b$ otrzymujemy, że $a < h_c + b$. Analogicznie dowodzimy $b < h_c + a$, a zatem z odcinków a, b, h_c można zbudować trójkąt.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $x, y > 0$ zachodzi nierówność:

$$x^2 + xy + y^2 \leqslant 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$

Rozwiązanie:

$$x^2 + xy + y^2 \leqslant 3x^2 + 3y^2 + 9xy - 6\sqrt{xy}y - 6\sqrt{xy}x$$
$$(x+y)^2 - 3\sqrt{xy}(x+y) + 2xy \geqslant 0$$
$$(x + y - 2\sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}) \geqslant 0$$
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{y} \right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt{y} \right) \geqslant 0$$

4. Niech n będzie liczbą parzystą, $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, $(a + b)|(a^n + b^n)$. Wyznaczyć a i b.

Rozwiązanie:

Skoro n jest parzyste różnicę potęg można rozpisać:

$$a^n - b^n = (a^2 - b^2)(a^{n-2} + a^{n-4}b^2 + \ldots + b^{n-2}).$$

Skoro $(a + b)|(a^2 - b^2)$, $a + b$ dzieli zarówno $2a^n$, jak i $2b^n$. Ale skoro a, b są względnie pierwsze $\mathrm{NWD}(2a^n, 2b^n) = 2$. W takim razie $(a + b)|2$, a więc $a = b = 1$. □

5. Na stole w stosie leży 2017 monet. Chowamy do kieszeni jedną monetę i stos rozdzielamy na dwie części (nie muszą być równe). Następnie z dowolnego stosu mającego więcej dwie monety znów chowamy jedną, a resztę rozdzielamy na dwie części itd. Czy można doprowadzić do sytuacji, że na stole zostaną wyłącznie stosy zawierające po 5 monet?

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w zadaniu suma liczby monet na stole i liczby stosów wynosi na początku 2018 i jest niezmiennikiem (w każdym ruchu ubywa jedna moneta, a przybywa jeden stos). Załóżmy, że można uzyskać wyłącznie stosy po 5 monet. Wtedy istnieje liczba k taka, że na stole jest k stosów po 5 monet każdy, czyli nasz niezmiennik wynosi $5k + k = 2018$. Jest to jednak niemożliwe, bo 2018 nie jest liczbą podzielną przez 6. □

6. Niech AD i BE będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt P – punktem przecięcia prostej DE z łukiem BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego nie należy punktu A . Udowodnić, że dwusieczna kata BCP odcina z kąta DPB trójkąt równoramienny.

Rozwiązanie:

Niech dwusieczna kąta BCP przecina okrąg opisany na ABC w punkcie Q oraz proste PD i PB w punktach odpowiednio X i Y. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Wprowadźmy oznaczenia: $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$, $\measuredangle BCQ = \measuredangle PCQ = \varepsilon$. Ponieważ $\measuredangle ACH = 90^\circ - \alpha$, więc $\measuredangle EHC = \alpha$. Na czworokącie $DHEC$ można opisać okrąg, ponieważ $\measuredangle HEC = \measuredangle HDC = 90^\circ$, a zatem $\measuredangle EDC = \alpha$. Wobec tego $\measuredangle PDC = 180^\circ - \alpha$, a zatem $\measuredangle DPC = \alpha - 2\varepsilon$. Ponieważ $\measuredangle BPC = 180^\circ - \alpha$, kąt BDC ma miarę $180^\circ - 2\alpha + 2\varepsilon$. Ponieważ $\measuredangle YXP = \measuredangle DXC = \alpha - \varepsilon$, kąt PYX ma miarę $180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 2\varepsilon) - (\alpha - \varepsilon) = \alpha - \varepsilon$. Stąd $\measuredangle PYX = \measuredangle PXY$, czyli trójkąt XYP jest równoramienny. $\square$

7. Wzdłuż okręgu napisanych zostało n dodatnich liczb naturalnych. Między każdymi dwoma sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik. Potem wyjściowe n liczb wycieramy, a z otrzymanymi postępujemy analogicznie. Udowodnij, ze po pewnej liczbie kroków wszystkie liczby na okręgu będą jednakowe.

Rozwiązanie:

Jako półniezmiennik rozważmy sumę wszystkich liczb napisanych wzdłuż okręgu. W wyniku danego działania wielkość ta zmniejsza się i może przyjąć tylko skończoną liczbę wartości. Gdyby chociaż dwie liczby różniły się wartością, to suma uległaby zmniejszeniu. Zatem wszystkie liczby muszą w pewnym momencie być parami równe.

8. Rozważmy równania kwadratowe postaci $x^2 + kx + n = 0$, gdzie k i n są liczbami całkowitymi. Podać przykład doboru współczynników k i n tak, aby dla każdej liczby całkowitej nieujemnej m równanie $x^2 + (k+m)x + (n+m) = 0$ miało dokładnie dwa różne rozwiązania całkowite.

Rozwiązanie:

Rozważmy równanie postaci $x^2 + (n+1)x + n$. Jego pierwiastkami są liczby $-n$ oraz -1. Wystarczy zatem wziąć $n \geqslant 2$ i każde równanie podanej postaci będzie spełniać warunki zadania (np. $x^2 + 3x + 2 = 0$).

9. W trójkącie ABC poprowadzone środkowe z wierzchołków A i B przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach odpowiednio D i E. Na boku AC wybrano punkt P, a na boku BC punkt Q spełniające warunki: $AP = 2 \cdot PC$, $BQ = 2 \cdot QC$. Wykazać, że kąty APE i BQD są równe.

Rozwiązanie:

Niech punktem M będzie punktem przecięcia środkowych. Punkt M dzieli środkowe w stosunku $2 : 1$ licząc od wierzchołka. Ponieważ $\frac{AP}{AC} = \frac{2}{3}$, odcinek MP jest równoległy do odcinka BC. Zatem $\measuredangle MPA = \measuredangle BCA$. Ponadto

$\measuredangle BEA = \measuredangle BCA$, ponieważ kąty BEA i BCA są wpisane i oparte na tym samym łuku. Wobec tego na czworokącie $AMPE$ można opisać okrąg, a stąd $\measuredangle APE = \measuredangle AME$. Analogicznie dowodzimy, że $\measuredangle BQD = \measuredangle BMD$. Ponieważ kąty BMD i AME są wierzchołkowe i mają równe miary, to $\measuredangle BQD = \measuredangle BMD = \measuredangle AME = \measuredangle APE$, co kończy dowód. **10.** Rozwiązać równanie

$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = -1.$

Rozwiązanie:

Sposób I

Podnieśmy obie strony do sześcianu:
$1 - x + 3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}\right) + 1 + x = -1$
Po pogrupowaniu i podstawieniu -1 wg wyjściowego równania:
$3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)} = 3$, czyli $\sqrt[3]{1-x^2} = 1$
Zatem $x = 0$.
Łatwo jednak sprawdzić, że $x = 0$ nie jest rozwiązaniem pierwszego równania. Czyli równanie nie ma rozwiązań.

Sposób II

Oznaczmy $a = \sqrt[3]{1-x}$, $b = \sqrt[3]{1+x}$.
Rozważmy wyrażenie $a^3 + b^3$:
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$$2 = (a+b)\left(\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right)$$
2 jest dodatnie, liczba przez którą przemnożone jest $a+b$ jest również dodatnia (mogłaby być 0 tylko dla $a = b = 0$, co jest niemożliwe), więc $a+b$ jest dodatnie, czyli nigdy nie przyjmie wartości -1.

11. Udowodnić, że
$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$$

Rozwiązanie:

Wystarczy zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej zachodzi równość $n^2+n+1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$ oraz $(n+2) - 1 = n+1$. Zatem po skróceniu pozostaje $\frac{(2-1)(3-1)(4-1)}{(2+1)(2^2-2+1)} = \frac{2}{3}$.

12. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a i b, dla których liczby $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ i $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że aby liczby z zadania były całkowite, liczniki muszą być nie mniejsze od mianowników. Rozwiązując nierówności $(a^2+b) \geqslant (b^2-a)$ i $(b^2+a) \geqslant (a^2-b)$, otrzymujemy $-1 \leqslant a-b \leqslant 1$. Zatem $a=b-1$ lub $a=b$ lub $a=b+1$.

Podstawiając $b=a$ otrzymujemy: $\frac{a^2+a}{a^2-a}$ jest liczbą całkowitą, czyli $\frac{a+1}{a-1}$ jest liczbą całkowitą. Wobec tego $a=b=2$ lub $a=b=3$.

Podstawiając $b=a+1$ otrzymujemy: $\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}$ i $\frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$ są liczbami całkowitymi. Stąd otrzymujemy, że $\frac{2a}{a^2-a-1}$ jest liczbą całkowitą. Zatem $a=0$ lub $a=1$ lub $a=2$.

Poszukiwanymi parami (a,b) są pary: $(2,2),(3,3),(2,1),(1,2),(3,2),(2,3)$.

13. W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego na tym trójkącie oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech M, N będą odpowiednio środkami boków AC i BC. Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na ABC. Z równości $\measuredangle CMO = \measuredangle CNO = 90^\circ$ wynika, że okrąg o opisany na trójkącie MNO przechodzi przez punkt C. Średnicą tego okręgu jest odcinek CO. Należy wykazać, że punkt I (środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC) leży na okręgu o. W tym celu wystarczy udowodnić, że $\measuredangle CIO = 90^\circ$. Niech D będzie punktem przecięcia prostej CI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy, że punkt I jest środkiem cięciwy CD. Korzystając kolejno z twierdzenia Ptolemeusza, twierdzenia o trójliściu oraz z danej w treści zadania równości otrzymujemy

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD =$$

$$= AC \cdot DI + BC \cdot DI = (AC + BC) \cdot DI = 2AB \cdot DI,$$

skąd $CD = 2DI$. Równość ta oznacza właśnie, że punkt I jest środkiem odcinka CD, co kończy rozwiązanie zadania.

Zawody indywidualne grupy średniej

1. Dany jest trójkąt ABC. Odcinek AD jest cięciwą okręgu opisanego na ABC. Punkt E jest przecięciem AD oraz dwusiecznej $\sphericalangle ABC$. Okrąg przechodzący przez punkt B i styczny do odcinka AD w punkcie E przecina BC w punkcie F oraz okrąg opisany na ABC w punkcie G. Wykaż, że G, F, D są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech Punkt G' będzie przecięciem okręgu opisanego na BFE z prostą DF. Czworokąt $BFEG'$ jest cykliczny, czyli $\sphericalangle FBE = \sphericalangle EBA = \sphericalangle DG'E = \sphericalangle FED$. Ponadto $\sphericalangle G'EF = 180 - \sphericalangle FBG' = 180 - 2\sphericalangle EBF - \sphericalangle ABG'$. Czyli sumując kąty w trójkącie $G'ED$ mamy $\sphericalangle G'DE = \sphericalangle G'BA$. Czyli czworokąt $AG'BD$ jest cykliczny, ale A, B, D leżą na okręgu opisanym na ABC, czyli G' też na nim leży. Ale G' leży na okręgu opisanym na BFE, czyli $G' = G$, co kończy dowód.

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na jeden z k kolorów. Wykazać, że istnieją cztery parami różne liczby całkowite a, b, c, d jednego koloru, spełniające następujące warunki:

$$ad = bc,\ \tfrac{c}{a} = 2017^n,\ \tfrac{b}{a} = 2018^m$$

gdzie m, n są pewnymi liczbami całkowitymi dodatnimi.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący Każdy punkt kratowy układu współrzędnych pomalowano na jeden z k kolorów. Wówczas istnieje prostokąt o wierzchołkach jednego koloru z bokami równoległymi do osi układu.

Dowód. Weźmy prostą l_i o stałym $y = i$. Wówczas wśród punktów $(i, 1), (i, 2), \ldots, (i, k+1)$ na tej prostej dwa punkty mają ten sam kolor. Wynika to z zasady szufladkowej Dirichleta. Rozpatrzmy zatem proste $l_1, l_2, \ldots, l_{k^{k+1}+1}$. Wówczas z zasady szufladkowej Dirichleta dwie prostej mają ten sam układ kolorów punktów o x z przedziału $[1, k+1]$, bo wszystkich układów jest k^{k+1}. A zatem, skoro na każdej z tych dwóch prostych dwa punkty mają ten sam kolor, więc mamy cztery punkty tego samego koloru, które tworzą prostokąt. $\square$

Rozważmy teraz układ współrzędnych. Każdemu punktowi kratowemu (x, y) przyporządkujmy liczbę $f(x, y) = 2017^x \cdot 2018^y$ oraz kolor taki, jaki ma ta liczba. Na mocy lematu istnieje prostokąt jednokolorowy. Biorąc liczby, które są przypisane jego wierzchołkom sprawdzamy, że spełniają one warunki zadania. A zatem faktycznie, takie liczby istnieją. $\square$

3. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb całkowitych a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a + d = b + c \\ a^3 + 46d^3 = c^3 \\ b^3 + 46c^3 = d^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Z pierwszego równania dostajemy: $a - b = c - d$ oraz odejmując od drugiego równania trzecie dostajemy: $a^3 - b^3 = 47(c^3 - d^3)$ co daje równoważnie: $a^2 + ab + b^2 = 47(c^2 + cd + d^2)$. Lemat: jeśli $47|x^2 + xy + y^2$ to $47|x$ oraz $47|y$. Na mocy lematu dostajemy $47|a$ oraz $47|b$, czyli $47^2|a^2 + ab + b^2$ czyli $47|c^2 + cd + d^2$ czyli $47|c$ oraz $47|d$. Podstawiając $a = 47a_1, b - 47b_1, c = 47c_1, d = 47d_1$ dostajemy równanie: $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = 47(c_1^2 + c_1d_1 + d_1^2)$. Niech czwórka (a, b, c, d) będzie rozwiązaniem o najmniejszym dodatnim module liczby a. Wówczas czwórka $(\frac{a}{47}, \frac{b}{47}, \frac{c}{47}, \frac{d}{47})$ również spełnia równanie, ale moduł $\frac{a}{47}$ jest mniejszy od modułu a, czyli sprzeczność. Zatem $a = 0$. Wstawiając do równania dostajemy $46d^3 = c^3$, z czego otrzymujemy $c = d = 0$, czyli jedyną czwórką liczb całkowitych spełniających równanie jest $a = b = c = d = 0$.

4. Dane są takie liczby całkowite a, b, że ab jest dzielnikiem $a^2 - b^2$. Wykaż, że $|a| = |b|$. *Rozwiązanie:*

Podstawiając $a = dx$, $b = dy$, gdzie $d = NWD(a, b)$ oraz $NWD(x, y) = 1$ mamy $xy|x^2 - y^2$, czyli $x|x^2 - y^2$ czyli $x|y^2$, ale $NWD(x, y^2) = 1$, czyli $|x| = 1$. Analogicznie $|y| = 1$, czyli $|x| = |y| = |d|$.

5. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB. Punkt E jest środkiem CD. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$ to $AC = CD$.

Rozwiązanie:

Niech F to środek AC. Wówczas DF jest równoległe to BC, czyli $\sphericalangle FDA = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CAE$, czyli $FEDA$ jest cykliczny. Ale jest on też trapezem, bo FD to prosta łącząca środki. Czyli jest trapezem równoramiennym, czyli $FA = ED$, co prowadzi do $AC = CD$.

6. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej pary liczb wymiernych a, b liczby $P(a)$ oraz $P(b)$ są różne. Rozstrzygnąć, czy wynika z tego, że dla dowolych liczb rzeczywistych x, y liczby $P(x)$ oraz $P(y)$ są różne.

Rozwiązanie:

Rozważmy $P(x) = x^3 - 2x$. Wówczas $P(0) = P(\sqrt{2})$. Ponadto weźmy wymierne a, b takie, że $P(a) = P(b)$. Udowodnimy, że $a = b$. $0 = P(a) - P(b) = (a-b)(a^2+ab+b^2-2)$, co daje, że $a = b$ lub. $a^2+b^2+ab = 2$. Przypuśćmy zatem, że $a^2 + ab + b^2 = 2$. Niech $v_2(x)$ dla liczby całkowitej x oznacza maksymalny wykładnik z jakim 2 dzieli x, a dla liczby wymiernej $v2(\frac{p}{q}) = v_2(p) - v_2(q)$. Zatem $1 = v_2(2) = v_2(a^2 + b^2 + ab) = min(2v_2(a), 2v_2(b), v_2(a) + v_2(b))$ jeśli $v_2(a)$ jest różne od $v_2(b)$. Zauważmy, że to minimum wynosi $2v_2(a)$ lub $2v_2(b)$, więc jest zawsze parzyste, czyli sprzeczność, Zatem $v_2(a) = v_2(b)$, ale wówczas $1 = v_2(a^2+b^2+ab) \leqslant 2v_2(a)$, czyli $v_2(a) = 0-v_2(b)$, czyli $v_2(a^2+b^2+ab) = 0$, czyli sprzeczność. Czyli $a = b$, więc implikacja z treści zadania jest fałszywa.

7. Wyznaczyzystkie pary liczb rzeczywistych x, y takich, e:

$$x^2 + y^2 + 2x + xy + 4 = 2y$$

Rozwiązanie:

Rwanie $(x-y)^2+(x+2)^2+(y-2)^2 = 0$ wi x=2 $oraz$ y = -2 $.Jesttojedynaparaspeniajc$

8. Niech $f(n)$ oznacza liczbzwizanania $x^2 + y^2 = n$ w liczbach cakowitych x, y. Pokazae $f(n) = f(2n)$

Rozwiązanie:

Zauwamy, e jeli $x^2 + y^2 = n$ to $(x - y)^2 + (x + y)^2 = 2n$, czyli $f(n)$ jest mniejsze lub r $f(2n)$. Ponadto jeli $X^2+y^2 = 2n$ to $(\frac{x-y}{2})^2+(\frac{x+y}{2})^2 = n$. Zatem $f(2n)$ jest mniejsze lub r $f(n)$, czyli $f(n) = f(2n)$.

9. Rozstrzygnzy istniej takie rozczne zbiory 2017-elementowe A, B, e $S(A) = S(B)$ oraz $S_2(A) = S_2(B)$, gdzie $S(X)$ to suma elementioru X oraz $S_2(X)$ to suma kwadratementioru X.

Rozwiązanie:

Takie zbiory istniej. Niech a_i to elementy zbioru A. Wemy $a_{2017} = -S(A2017)$ oraz $a_i = i$. Natomiast okrelmy zbi $jako$ b$_i = -a_i$. Takie zbiory speniaj warunki zadania, co mona atwo sprawdzi

10. Kady punkt paszczyzny naley pomalowa pewien kolor w taki sposby kada prosta bya jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest najwiza moliwa liczba kolorth mona uy pomalowania punktj paszczyzny? Odpowied uzasadnij.
Rozwiązanie:

Wykaemy, e najwiza moliwa liczba kolorth mona uy pomalowania punktj paszczyzny, jest r 3. Przypu, e paszczyznna pomalowazy uyciu czterech koloraki sposby kada prosta bya jednokolorowa lub dwukolorowa. Wybierzmy cztery

punkty rch kolorC$czerwony$,Z$zielony$,N$niebieskiorazP$$pomarawy.Moliwesdwaprzypad$

(1)$Proste$CZiNP$niesrlege.Oznaczmyprzez$X$punktichprzecia.Was,skoropunkt$X$leyna$

(2)$Proste$CZiNP$srlege.Waspunkty$C,Z,N,P$swierzchokamitrapezu.Przyjmijmy,dlau$

11. Znalezystkie funkcje f okrelone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych rch od zera, przyjmujce wartoci w tym samym zbiorze i speniajce rnie funkcyjne:

$$f(xyf(x+y)) = f(x) + f(y)$$

dla kadej pary liczb rzeczywistych rch od 0, takich, e $x+y$ te jest r od 0.

Rozwiązanie:

Ustalmy liczbeczywist a i przyjmijmy $b = \frac{1}{f(a)}$. Za, e a jest r od b. Moemy was podstawiodanym rniu $x = b$, $y = a?b$ otrzymujc zwizek $f(b(a?b)f(a)) = f(b)+f(a?b)$. Ale $bf(a) = 1$, wiiczba po lewej stronie jest r $f(a?b)$. Prawa strona ma inn wartokoro $f(b)$ jest r od 0 (wartoci funkcji f s z zaoenia niezerowe). Sprzecznowodzi, e $a = b$, czyli $f(a) = \frac{1}{a}$. Z dowolnoci a mamy: $f(x) = \frac{1}{x}$.

12. Dany jest czworokt wypuky $ABCD$, w kt boki AB i CD nie s rlege. Rozwaamy okrg, przechodzcy przez punkty A i B, styczny do prostej CD w punkcie P oraz okrg, przechodzcy przez punkty C, D styczny do prostej AB w punkcie Q Zakadamy, e punkty P i Q le na odcinkach CD i AB oraz e wsp ciwa tych okrw przechodzi przez rodek odcinka P Q. Udowodnie proste AD i BC s rlege.

Rozwiązanie:

Niech M - rodek PQ, R - drugi punkt przecia prostej PQ z okrem opisanym na DQC, S - drugi punkt przecia prostej PQ z okrem opisanym na ABP, Was na mocy potwego kryterium wsprwoci mamy:

$$PM \cdot MS = O_1M \cdot O_2M = QM \cdot MR$$

gdzie O_1O_2 to wsp ciwa obu tych okrw.

Skoro M to rodek PQ to mamy, e: $QS = PR$. Ponownie na mocy potwego kryterium wsprwoci mamy:

$$DP \cdot PC = RP \cdot PM = SQ \cdot PM = AQ \cdot QB$$

Czyli $k = \frac{QB}{DP} = \frac{PC}{AS}$.

Niech F to punkt przecia AP, DQ oraz G to punkt przecia CQ, BP. $\sphericalangle DRQ = \sphericalangle DCQ = \sphericalangle AQD = x$ (czworokt cykliczny i styczna) i styczn. Analogicznie $\sphericalangle QRC = \sphericalangle QDC = \sphericalangle CQB$.

Podobnie: $\sphericalangle PSB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle CPB = \alpha$ oraz $\sphericalangle ASP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle APD$. Czyli trty, na mocy cechy podobiea kt - kt - kt, DPF, QBG s podobne, ale z wczeniejszych rozwaaika, e s podobne w skali k. Podobnie trty ASF, PCG s podobne w skali k. Czyli $GQ = k \cdot DF$, $PG = k \cdot AF$, $k \cdot FP = BG$, $QF \cdot k = CG$.

Zatem skoro $\sphericalangle BQC = \sphericalangle PDQ$ to DPQ, QBC, s podobne na mocy cechy podobiea bok-kt-bok. Wynika to ze wszeniej wyliczonych proporcji - podobieo w skali k.

Analogicznie trty PCQ, AQD s podobne. A zatem: $\sphericalangle PDA = y + \sphericalangle ADQ = y + \sphericalangle CQP$ oraz $\sphericalangle PCB = x + \sphericalangle DQP$ czyli $\sphericalangle PCB + \sphericalangle PDA = x + y + \sphericalangle DQC = 180$ gdy jest to suma ktrcie DQC. A zatem $AD || BC$, co byo do pokazania.

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Pokazać, że dowolna liczba całkowita dodatnia jest sumą liczb postaci $2^i 3^j$, gdzie i, j są liczbami całkowitymi nieujemne, oraz żaden składnik nie jest dzielnikiem innego.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne. Nazwijmy liczbę dobrą, jeśli jest postaci $2^i 3^j$, gdzie i, j są liczbami całkowitymi dodatnimi. Jeżeli $n = 2k$, to na podstawie założenia indukcyjnego możemy zapisać $k = s_1 + s_2 + \ldots + s_l$, gdzie s_i są liczbami dobrymi. Wtedy $n = 2s_1 + 2s_2 + \ldots + 2s_l$ i łatwo widzimy, że $2s_i$ jest również dobra.

Jeżeli n jest nieparzyste, to znajdujemy taką liczbę naturalną m, że $3^m \leqslant n < 3^{m+1}$. Wtedy liczba $n' = n - 3^m$ jest parzysta i na podstawie założenia indukcyjnego możemy zapisać

$$\frac{n - 3^m}{2} = \frac{n'}{2} = w_1 + w_2 + \ldots + w_r,$$

gdzie w_j sa dobre. Jednakże wtedy

$$n = 2w_1 + 2w_2 + \ldots + 2w_r + 3^m.$$

□

2. Dane są liczby całkowite $1 < k < n$. Zbiór $\mathcal{S}$ składa się z n liczb rzeczywistych takich, że średnia arytmetyczna dowolnych k z nich jest liczbą całkowitą. Pokazać, że dowolny element zbioru $\mathcal{S}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Niech $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Istnieją liczby całkowite z_2, z_3, $\ldots$, z_{k+1} takie, że

$$\sum_{i=1}^{k} = kz_{k+1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{k+1} = kz_k, \ldots, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{k+1} = kz_2.$$

Dodając powyższe równości dostaniemy

$$ka_1 + (k-1)(a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}) = k(z_2 + z_3 + \ldots + z_{k+1}),$$

jednakże istnieje $z_1 \in \mathbb{Z}$ takie, że $\sum_{i=2}^{k+1} = kz_1$, więc

$$a_1 = z_2 + z_3 + \ldots + z_{k+1} - (k-1)z_1 \in \mathbb{Z}.$$

Analogicznie dowodzimy całkowitość pozostałych elementów zbioru $\mathcal{S}$. □

3. Niech KL i KN będą styczny do okręgu ω w punktach L i N. Punkt M jest taki, że K, N, M leżą na jednej prostej, w tej kolejności. Okrąg opisany na trójkącie KLM przecina okrąg ω w punkcie P. Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu N na prostą ML. Pokazać, że $\sphericalangle MPQ = 2\sphericalangle KML$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez R drugi punkt przecięcia okręgu ω z prostą LM. Zachodzą równości:

$$\sphericalangle MPK = \sphericalangle MLK = \sphericalangle RLK = \sphericalangle RPL.$$

W takim razie $\sphericalangle MPR = \sphericalangle KPL = \sphericalangle KML$. Wobec tej równości okrąg przechodzący przez punkty M, P, R jest styczny do prostej KM. Oznaczmy przez S punkt wspólny prostych PR i MN. Prosta PR jest osią potęgową okręgu ω i okręgu opisanego na trójkącie MPR. Wobec tego $SN \cdot SN = SP \cdot SR = SM \cdot SM$, więc S jest środkiem odcinka MN. Wobec tego S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym MQR, zatem trójkąt MSQ jest równoramienny, czyli

$$\sphericalangle MQS = \sphericalangle QMS = \sphericalangle LMK = \sphericalangle MPR = \sphericalangle MPS,$$

więc punkty M, P, Q, S leżą na okręgu. W takim razie:

$$\sphericalangle MPQ = \sphericalangle MPS + \sphericalangle SPQ = \sphericalangle MQS + \sphericalangle SMQ = 2\sphericalangle SMQ = 2\sphericalangle KML.$$

□

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta wewnętrznego CAB. Udowodnić, że proste BE i CD przecinają się w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta zewnętrznego $\sphericalangle CAB$.

Rozwiązanie:

Proste BE i CD przecinają się (gdyby bowiem były one równoległe, to $BDCE$ byłby równoległobokiem, być może zdegenerowanym, i dwusieczna kąta $\sphericalangle BAC$ połowiłaby bok BC, w sprzeczności z założeniem $AB \neq AC$). Oznaczmy $F = BE \cap CD$; stosując twierdzenie Talesa oraz korzystając z podobieństwa trójkątów ABD i ACE dostajemy

$$\frac{FC}{FD} = \frac{CE}{BD} = \frac{AE}{AD}.$$

Stąd wynika, że $FA \parallel CE$, a więc $FA \perp AD$, co jest równoznaczne z tezą. □

5. Dana jest liczba całkowita dodatnia a taka, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4(a^n + 1)$ jest sześcianem liczby całkowitej dodatniej. Pokazać, że $a = 1$.

Rozwiązanie:

Skoro $4(a^3+1)$ i $4(a^9+1)$ są sześcianami liczb całkowitych, to ich iloraz równy a^6-a^3+1 również. Jeśli $a>1$, to $a^6-a^3+1<(a^2)^3$, więc $a^6-a^3+1\leqslant(a^2-1)^3$, stąd $(a-1)(3a^3-2a^2-1)+1\leqslant 0$ — sprzeczność. Zatem $a=1$. $\square$

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ spełniające dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich x i y warunek

$$f(x^2+f(y))=xf(x)+y.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $C=f(1)+1$. Podstawiając $x=y=1$ otrzymujemy $f(C)=C$. Wykażemy indukcyjnie, że zachodzi $f(kC)=kC$ oraz $f(kC+1)=kC+f(1)$. Początek indukcji: istotnie $f(C)=C$; podstawiając $x=1, y=C$ otrzymujemy $f(1+C)=f(1)+C$. Krok indukcyjny: podstawiając $x=1$ oraz $y=kC$ otrzymujemy $f(1+kC)=f(1)+kC$. Podstawiając $x=1, y=kC+1$ otrzymujemy

$$f((k+1)C)=f(1+kC+f(1))=f(1+f(kC+1))=f(1)+kC+1=(k+1)C.$$

Zatem teza indukcji została udowodniona. Pokażemy teraz, że $f(1)=1$. Można to zrobić na różne sposoby. Zauważmy, że funkcja f jest różnowartościowa, gdyż jeśli $f(a)=f(b)$, to

$$xf(x)+a=f(x^2+f(a))=f(x^2+f(b))=xf(x)+b.$$

Podstawiając $x=C, y=1$ mamy

$$f(C^2+f(1))=Cf(C)+1=C^2+1.$$

Dla $x=C^2+f(1), y=1$ dostajemy

$$f((C^2+f(1))^2+f(1))=(C^2+f(1))(C^2+1)+1.$$

Podobnie podstawiając $x=C^2+1, y=1$ mamy

$$f((C^2+1)^2+f(1))=(C^2+1)(C^2+f(1))+1,$$

czyli z różnowartościowości otrzymujemy

$$(C^2+f(1))^2+f(1)=(C^2+1)^2+f(1),$$

a co za tym idzie $f(1)=1$. Zatem $C=2$ i przedstawiony wyżej dowód indukcyjny pokazuje, że musi zachodzić $f(n)=n$ dla dowolnego $n\in\mathbb{Z}^+$. $\square$

7. Wyznaczyć wszystkie wielomiany rzeczywiste stopnia 2017, które można przedstawić jako sumę 2017 funkcji okresowych.

Rozwiązanie:

Dowiedziemy indukcyjnie, że wielomian stopnia n nie jest suma n funkcji okresowych. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech zatem $n > 1$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i$, gdzie P jest wielomianem stopnia n, a f_i jest okresowa o okresie t_i. Zatem

$$P(x + t_n) - P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (f(x + t_n) - f(x))$$

ale po lewej stronie mamy wielomian stopnia $n - 1$, a po prawej sumę $n - 1$ funkcji okresowych. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem indukcyjnym, która dowodzi tezy zadania. $\square$

8. Pokazać, że dla dowolnego zbioru n punktów na płaszczyźnie istnieje co najwyżej $cn\sqrt{n}$ par punktów, których odległość jest równa 1, dla pewnej stałej $c > 0$.

Rozwiązanie:

Niech wyjściowy zbiór punktów składa się z punktów oznaczonych przez przez P_i, dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Skonstruujmy okręgu C_i o środkach w tych punktach i promieniu 1. Niech a_i będzie liczbą punktów na każdym z okręgów C_i. Chcemy ograniczyć sumę

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Policzmy na dwa sposoby liczbę trójek (P_i, A, B), gdzie A, B leżą na okręgu C_i. Liczba par (A, B) na okręgu C_i jest równa $\binom{a_i}{2}$, więc liczba trójek jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2}.$$

Z drugiej strony $AP_i = BP_i = 1$, więc P_i leży na przecięciu okręgów o środkach w punktach A i B i promieniu 1. Ponieważ każde dwa okręgi przecinają się w dwóch punktach, to liczba par (A, B) jest równa $\binom{n}{2}$, stąd liczba trójek jest nie większa niż $n(n - 1)$.

Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2} \leqslant n(n - 1).$$

Funkcja $\binom{x}{2}$ jest wypukła, więc na podstawie nierówności Jensena mamy nierówność

$$\frac{S(2S - n)}{n^2} \leqslant n(n - 1),$$

która prowadzi do nierówności kwadratowej $2S^2 - nS - n^2(n-1) \leqslant 0$, więc

$$S \leqslant \frac{n + n\sqrt{8n-7}}{4}.$$

$\square$

9. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$m^2 - 1 \mid 3^m + (n! - 2)^m.$$

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $n > 2$. Wtedy m nie może być nieparzyste, gdyż 8 dzieliłoby $m^2 - 1$ podczas, gdy $3^m + (n! - 2)^m$ jest nieparzyste. Zatem m jest parzyste. Wtedy $m^2 - 1 \equiv -1 \pmod 4$, więc istnieje liczba pierwsza $p \equiv -1 \pmod 4$ taka, że $p \mid m^2 - 1$. Wówczas $p \mid 3^m + (n! - 2)^m$ i jako, że m jest parzyste, mamy, że p dzieli 3 i $n! - 2$ (p jest postaci $4l + 3$), stąd $3 \mid n! - 2$ — sprzeczność z założeniem n¿2.

Wobec tego możemy założyć, że $n = 1$ lub $n = 2$. Jeśli $n = 1$, to albo $m^2 - 1$ dzieli $3^m + 1$, gdy m jest parzyste, albo $m^2 - 1 \mid 3^m - 1$, gdzie m nieparzyste. W pierwszym przypadku dostajemy sprzeczność podobnie jak wyżej (wybierając liczbę pierwszą postaci $4l + 3$ dzielącą $m^2 - 1$). W drugim zaś nie może zajść, gdyż $3^m - 1$ nie jest wielokrotnością 8, gdy m jest nieparzyste.

Zatem $n = 2$, stąd $m^2 - 1 \mid 3^m$. Istnieje k całkowite dodatnie takie, że $(m-1)(m+1) = 3^k$. Wtedy $m-1$ i $m+1$ muszą być potęgami liczby 3różniącymi się o 2, więc $m - 1 = 1$ czyli $m = 2$. Ostatecznie łatwo sprawdzamy, że para $(2, 2)$ spełnia warunki zadania. $\square$

10. W tablicy

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

takiej, że $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ dla $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, każda liczba całkowita dodatnia występuje w niej dokładnie 2017 razy. Pokazać, że dla pewnej pary $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ zachodzi nierówność $a_{m,n} > mn$.

Rozwiązanie:

Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n rozważmy następujący zbiór $A_n = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid kl \leqslant n\}$. Łatwo zauważyć, że

$$\#A_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Zatem

$$\#A_n \geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}-1\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}-1\right) = n\left(-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

Dobrze znanym faktem jest rozbieżność ciągu harmonicznego, innymi słowy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty.$$

Zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ dostaniemy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > 2013 \Longrightarrow \#A_n > 2013n.$$

Na podstawie warunków zadania

$$\#X = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{k,l} \leqslant n\} = 2017n,$$

gdyż $a_{k,l} \in \{1,2,\ldots,n\}$ dla $(k,l) \in X$ oraz każda z liczb $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ występuje dokładnie 2017 razy w tablicy.

A ponieważ $\#A_n > 2017n$ dla odpowiednio dużych n to musi istnieć para $(k,l) \in A_n$ taka, że

$$a_{k,l} > n \geqslant kl.$$

□

11. Dany jest niepusty podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunek: Jeśli $x \in X$ to $4x \in X$ oraz $\lfloor\sqrt{x}\rfloor \in X$. Pokazać, że $X = \mathbb{N}$.

Rozwiązanie:

Niech m będzie najmniejszym elementem zbioru X. Wtedy z nierówności $m \leqslant \lfloor\sqrt{m}\rfloor$ wnioskujemy, że $m = 1$. Łatwo widzimy, że $\forall k \in \mathbb{N},\ \ 4^k \in X$, stąd $2^k = \lfloor\sqrt{4^k}\rfloor \in X$. Przypuśćmy, że $t \notin X$, wtedy równanie $t = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ nie ma rozwiązania w zbiorze X. Oznacza to, że jeśli $t^2 \leqslant m < (t+1)^2$ to $m \notin X$.

Pokażemy indukcyjnie, że gdy $k \geqslant 1$ to tego, że $t^{2^k} \leqslant m < (t+1)^{2^k}$ wynika, że $m \notin X$. Przypadek $k = 1$ został pokazany wyżej. Przypuśćmy, że stwierdzenie zachodzi dla liczb nie większych niż k. Weźmy m takie, że $t^{2^{k+1}} \leqslant m < (t+1)^{2^{k+1}}$, jeśli $m \in X$ to $\lfloor\sqrt{m}\rfloor \in X$, stąd $t^{2^k} \leqslant \lfloor\sqrt{m}\rfloor \leqslant \sqrt{m} < (t+1)^{2^k}$, więc na mocy założenia indykcyjnego $m \notin X$. Sprzeczność.

12. Punkty O, I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC. Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego z bokiem

BC, a punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia prostych AI i AO z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Proste FI i ED przecinają się w punkcie S, proste SC i BE — w M, a proste AC i BF — w N. Udowodnić, że punkty M, I, N sa współliniowe.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Niech $T \neq F$ będzie punktem przecięcia prostej FI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, a L i K niech będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami AC i AB. Mamy wówczas równości

$$\sphericalangle ITA = \sphericalangle FTA = 90^\circ = \sphericalangle ILA = \sphericalangle IKA,$$

skąd wynika, że punkty T, L, K, A leżą na okręgu o średnicy AI. A zatem $\sphericalangle TLA = \sphericalangle TKA$, co pociąga za sobą $\sphericalangle TLC = \sphericalangle TKB$. Mamy też

$$\sphericalangle TCL = \sphericalangle TCA = \sphericalangle TBA = \sphericalangle TBK,$$

a stąd trójkąty TCL i TBK są podobne. Zachodzą więc następujące równości

$$\frac{CT}{BT} = \frac{CL}{BK} = \frac{CD}{BD}.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że prosta TD jest dwusieczną kąta CTB. Przechodzi zatem przez środek łuku CB, czyli punkt E. A więc proste ED i FI przecinają się w T skąd już wynika, że punkty S i T pokrywają się. Aby zakończyć dowód zastosujmy twierdzenie Pascala do samoprzecinającego się sześciokąta $AEBFTC$ wpisanego w okrąg. Dostajemy wówczas, że przecięcie prostych AE i FT (punkt I), przecięcie prostych EB i TC (punkt M) oraz przecięcie prostych BF i CA (punkt N) są współliniowe, co kończy dowód. $\square$

Zawody indywidualne super grupy

1. Liczba całkowita dodatnia N jest n-dobra jeśli posiada co najmniej n różnych dzielników pierwszych oraz istnieją dzielniki $1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczby N, których suma jest równa N. Pokazać, że istnieją liczby n-dobre dla dowolnego n.

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że jeśli n jest k-dobra, to $n(n+1)$ jest liczbą $(k+1)$ dobrą. $\square$

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że punkty K i H są symetryczne względem prostej BC (jest to standardowy fakt).

Jednokładność o skali $-\frac{1}{2}$ i środku w punkcie S, który jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, przekształca punkt A na środek M boku BC oraz punkt H na punkt O. Wynika stąd równość $OM = AH$, co w efekcie daje $OD = AH$. Ponadto proste AH i OM są równoległe, więc czworokąt $AHDO$ jest równoległobokiem. Stąd wniosek, że symetria względem środka odcinka OH przeprowadza odcinek DH, zawierający punkt P, na odcinek AO. W efekcie proste AQ i AO pokrywają się.

Trójkąt POR jest równoramienny, gdyż

$$\sphericalangle OPR = \sphericalangle DPR = \sphericalangle BPH = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PRO.$$

Zatem z prostopadłości $OM \perp BC$ otrzymujemy, że punkt M jest środkiem odcinka PR. Wynika stąd teza zadania. $\square$

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych liczb x, y zachodzi równość

$$f(y)f(x + f(y)) = f(x)f(xy).$$

Rozwiązanie:
Niech $P(x,y)$ oznacza wyjściowe równanie funkcyjne. Wtedy

$$P(1,y) \to f(1+f(y)) = f(1).$$

Porównując $P(x,1)$ i $P(x,1+f(y))$, mamy

$$f(x) = f((1+f(y))x)$$

Weźmy odpowiednio dużą liczbę naturalną n taką, że $(1+f(y))^n = k > 2$,wtedy

$$f(x) = f(kx)$$

na podstawie powyższych równości.
Zauważmy teraz, że

$$f(y)f(kx+f(y)) = f(kx)f(kxy) = f(x)f(xy) = f(y)f(x+f(y))$$

Weźmy $x = a$takie, że $ka + f(y) = 2(a+f(y))$. Porównując $P(x, a+f(y))$ i $P(x, ka+f(y))$ dostajemy $f(x) = f(2x)$
Ponadto $P(1,y) \to f(x+f(1)) = \frac{f(x)^2}{f(1)}$. Zatem powyższe rezultaty implikują, że

$$\frac{f(x)^2}{f(1)} = f(x+f(1)) = f(2x+2f(1)) = \frac{f(2x)^4}{f(1)^3} = \frac{f(x)^4}{f(1)^3},$$

co oznacza, że $f(x) = f(1)$, więc f jest stała. □

4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dane są liczby rzeczywiste $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1 + a_2 + \cdots a_n} \leqslant \max\left\{\frac{b_1}{1}, \frac{b_1+b_2}{2}, \ldots, \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że dla pewnego n, istnieją dodatnie liczby rzeczywiste $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ takie, że istnieją b_1, b_2, …, b_n, że

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1 + a_2 + \cdots a_n} > \max\left\{\frac{b_1}{1}, \frac{b_1+b_2}{2}, \cdots, \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right\}$$

Ponieważ nierówność jest niezmienna na przesunięcie w b_i możemy założyć, że $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = 0$. Wtedy $B_j := b_1 + b_2 + \cdots + b_j < 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

$$0 = \sum a_j b_j = B_n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) < 0$$

co jest sprzeczne z założenie. $\square$

5. W trójkącie ostrokątnym ABC ($\sphericalangle A < \min\{\sphericalangle B, \sphericalangle C\}$) punkt P leży na odcinku BC. Punkty D i E leżą na bokach AB i AC tak, że $BP = PD$ oraz $CP = PE$. Pokazać, że przy zmieniającym się położeniu punktu P na odcinku BC, okręgi opisane na trójkątach ADE mają punkt wspólny różny od A.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że wszystkie okręgi przechodzą przez ortocentrum H trójkąta ABC. Niech CX i BY będą wysokościami. Jeśli M jest środkiem boku BC, to $MB = MX = MY = MC$. Bez szkody załóżmy, że P leży między B i M. Wtedy D jest między B i X a E między A i Y. Czworokąt $AXHY$ jest cykliczny, gdyż $\sphericalangle AXH = \sphericalangle AYH$. Z twierdzenia sinusów mamy $\frac{XH}{YH} = \frac{\cos B}{\cos C}$. Ponadto $DX = BX - BD = BC \cos B - 2BP \cos B$. Podobnie $EY = EC - CY = 2BP \cos C - BP \cos C$, więc

$$\frac{DX}{EY} = \frac{BC - 2BP \cos B}{PC - BC \cos C} = \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{XH}{YH},$$

więc trójkąty DHX i EHY są podobne, stąd czworokąt $ADHE$ jest cykliczny. $\square$

6. Niech p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Wyznaczyć liczbę takich trójek (x, y, z), że $x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ oraz

$$p \mid x + y + z \quad \text{oraz} \quad p \mid xyz - 1.$$

Rozwiązanie:

Niech S będzie zbiorem trójek, o jakich mowa w treści zadania, i niech

$$S_k := \{(x, y, z) \in S \colon y \equiv kx \pmod{p}\} \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Wtedy zbiory $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ są parami rozłączne, zaś ich sumą jest zbiór S. Ustalmy wartość k i wybierzmy dowolnie trójkę $(x, y, z) \in S_k$. Wówczas $z \equiv -(k+1)x \pmod{p}$, co daje $xyz \equiv -k(k+1)x^3 \pmod{p}$, czyli mamy

$$-k(k+1)x^3 \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1}$$

Stąd w szczególności wynika, że $x \neq 0$ oraz $k \notin \{0, p-1\}$. Podnosząc warunek 1 do potęgi $\frac{p-2}{3}$, a następnie mnożąc obustronnie przez x otrzymujemy kongruencję

$$(k(k+1))^{\frac{p-2}{3}} \equiv x \pmod{p}, \tag{2}$$

gdzie po drodze korzystamy z małego twierdzenia Fermata. Zatem x jest wyznaczone jednoznacznie przez k. Odwrotnie, jeśli $k \notin \{0, p-1\}$ i spełniona jest kongruencja (2) – co, jak wiemy, ma miejsce dla dokładnie jednej wartości $x \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ – to zachodzi relacja $(x, kx \pmod{p}, (k+1)x \pmod{p}) \in S_k$. Zatem $\#S_0 = \#S_{p-1} = 0$ oraz $\#S_k = 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, p-2$, i w rezultacie

$$\#S = \#S_1 + \#S_2 + \ldots + \#S_{p-2} = p - 2.$$

□

7. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich takie, że

$$m^2 - 1 \mid 3^m + (n! - 2)^m.$$

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $n > 2$. Wtedy m nie może być nieparzyste, gdyż 8 dzieliłoby $m^2 - 1$ podczas, gdy $3^m + (n! - 2)^m$ jest nieparzyste. Zatem m jest parzyste. Wtedy $m^2 - 1 \equiv -1 \pmod{4}$, więc istnieje liczba pierwsza $p \equiv -1 \pmod{4}$ taka, że $p \mid m^2 - 1$. Wówczas $p \mid 3^m + (n! - 2)^m$ i jako, że m jest parzyste, mamy, że p dzieli 3 i $n! - 2$ (p jest postaci $4l + 3$), stąd $3 \mid n! - 2$ — sprzeczność z założeniem n¿2.

Wobec tego możemy założyć, że $n = 1$ lub $n = 2$. Jeśli $n = 1$, to albo $m^2 - 1$ dzieli $3^m + 1$, gdy m jest parzyste, albo $m^2 - 1 \mid 3^m - 1$, gdzie m nieparzyste. W pierwszym przypadku dostajemy sprzeczność podobnie jak wyżej (wybierając liczbę pierwszą postaci $4l + 3$ dzielącą $m^2 - 1$). W drugim zaś nie może zajść, gdyż $3^m - 1$ nie jest wielokrotnością 8, gdy m jest nieparzyste.

Zatem $n = 2$, stąd $m^2 - 1 \mid 3^m$. Istnieje k całkowite dodatnie takie, że $(m-1)(m+1) = 3^k$. Wtedy $m-1$ i $m+1$ muszą być potęgami liczby 3różniącymi się o 2, więc $m - 1 = 1$ czyli $m = 2$. Ostatecznie łatwo sprawdzamy, że para $(2, 2)$ spełnia warunki zadania. □

8. Wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ są liczbami całkowitymi dodatnimi i każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz. Ponadto

$$a_{n+1} \in \{a_n - 1, 4a_n - 1\} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrazu a_{2017}.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy dowolny wyraz a_n danego ciągu. Jeżeli liczba $a_n - 1$ występuje wśród wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ albo jest równa 0, to na mocy warunków zadania wyraz a_{n+1} nie może być równy $a_n - 1$. W tym przypadku zachodzi więc równość $a_{n+1} = 4a_n - 1$. Przypuśćmy z kolei, ze liczba $a_n - 1$ jest dodatnia i nie występuje wśród wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wtedy musimy mieć $a_{n+1} = a_n - 1$; w przeciwnym razie byłoby bowiem $a_i = a_n - 1$ przy pewnym $i > n + 1$, gdyż każda liczba naturalna jest wyrazem danego ciągu. Jednak patrząc na ciąg $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{i-1}, a_i$ widzimy, że dowolny wyraz w wypisanym ciągu jest albo większy od poprzedniego, albo o 1 mniejszy od poprzedniego, zatem wobec nierówności $a_i < a_n < a_{n+1}$ musielibyśmy mieć $a_j = a_n$ dla pewnego wskaźnika $n + 1 < j < i$, wbrew założeniom zadania.

Udowodniliśmy więc, że każdy odcinek początkowy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wyznacza jednoznacznie a_{n+1} według wzoru

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & \text{jeśli } a_n > 1 \text{ oraz } a_n - 1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \\ 4a_n - 1, & \text{jeśli } a_n = 1 \text{ lub } a_n - 1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}. \end{cases} \tag{3}$$

W szczególności wartość a_1 jednoznacznie wyznacza cały ciąg $a_1, a_2, \ldots$.

Jeżeli $a_1 = m$, to ze wzoru (3) otrzymujemy $a_2 = m - 1, a_3 = m - 2, \ldots, a_m = 1, a_{m+1} = 3$. Liczba 3 nie może wystąpić w danym ciągu dwukrotnie, więc $m \leqslant 2$. Zatem $a_1 \in \{1, 2\}$.

Dla $a_1 = 1$ otrzymujemy ciąg 1,3,2,7,6,5,4,15,14, ... Przez prostą indukcję widzimy, że

$$a_n = 3 \cdot 2^k - 1 - n \quad \text{dla } 2^k \leqslant n < 2^{k-1}.$$

Ponieważ $2^{10} < 2017 < 2^{11}$, to $a_{2017} = 3 \cdot 2^{10} - 2018 = \mathbf{1054}$.

Dla $a_1 = 2$ mamy ciąg 2,1,3,11,10,9,8,7,6,5,4,15,14,13,12,47, ..., który możemy wyrazić wzorem (również indukcja):

$$a_n = \begin{cases} 4^{k+1} - 1 - n, & \text{dla } 4^k \leqslant n < 3 \cdot 4^k, \\ 7 \cdot 4^{k+1} - 1 - n, & \text{dla } 3 \cdot 4^k \leqslant n < 4^{k+1}. \end{cases}$$

Ponadto $4^5 < 2007 < 3 \cdot 4^5$, więc $a_{2017} = 4^6 - 2018 = \mathbf{2078}$. □

9. Dane są liczby całkowite dodatnie k i n i zbiór A taki, że

$$\#A \leqslant \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Dla $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ niech A_i oznaczają zbiory n-elementowe takie, że

$$\#(A_i \cap A_j) \leqslant k \quad \text{dla } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$$

oraz

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i.$$

Wyznaczyć liczbę elementów zbioru A.

Rozwiązanie:

Niech a_x będzie liczbą takich zbiorów A_i, które zawierają element x. Zauważmy, że

$$\sum_{x \in A_j} a_x = \sum_{i=1}^{n+1} \#(A_i \cap A_j) = n + \sum_{i \neq j} \#(A_i \cap A_j).$$

Zatem $\sum_{x \in A_j} a_x \leqslant n(k+1)$. Dodając te nierówności po wszystkich $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ dostajemy, że

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{x \in A_j} a_x = \sum_{x \in A} \sum_{x \in A_j} 1 = \sum_{x \in A} a_x^2.$$

Jednakże z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\sum_{x \in A} a_x^2 \geqslant \#A \left(\frac{\sum_{x \in A} a_x}{\#A} \right)^2 = \frac{1}{\#A} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \#(A_i) \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{\#A}.$$

Z drugiej strony $\sum_{x \in A} a_x^2 \leqslant n(n+1)(k+1)$, skąd

$$\frac{n^2(n+1)^2}{\#A} \leqslant n(n+1)(k+1),$$

więc

$$\#A \geqslant \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Wobec tego zbiór A ma $\dfrac{n(n+1)}{k+1}$ elementów. $\square$

10. Dany jest niepusty podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunek: Jeśli $x \in X$ to $4x \in X$ oraz $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \in X$. Pokazać, że $X = \mathbb{N}$.

Rozwiązanie:

Niech m będzie najmniejszym elementem zbioru X. Wtedy z nierówności $m \leqslant \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ wnioskujemy, że $m = 1$. Łatwo widzimy, że $\forall k \in \mathbb{N}, \ \ 4^k \in X$, stąd $2^k = \lfloor \sqrt{4^k} \rfloor \in X$. Przypuśćmy, że $t \notin X$, wtedy równanie $t = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ nie ma rozwiązania w zbiorze X. Oznacza to, że jeśli $t^2 \leqslant m < (t+1)^2$ to $m \notin X$.

Pokażemy indukcyjnie, że gdy $k \geqslant 1$ to tego, że $t^{2^k} \leqslant m < (t+1)^{2^k}$ wynika, że $m \notin X$. Przypadek $k = 1$ został pokazany wyżej. Przypuśćmy, że

stwierdzenie zachodzi dla liczb nie większych niż k. Weźmy m takie, że $t^{2^{k+1}} \leqslant m < (t+1)^{2^{k+1}}$, jeśli $m \in X$ to $\lfloor\sqrt{m}\rfloor \in X$, stąd $t^{2^k} \leqslant \lfloor\sqrt{m}\rfloor \leqslant \sqrt{m} < (t+1)^{2^k}$, więc na mocy założenia indykcyjnego $m \notin X$. Sprzeczność. $\square$

11. Okrąg wpisany o środku w punkcie I jest wpisany w trójkąt ABC i jest styczny do BC w punkcie D. Odcinek AK jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt L jest taki, że $AL \perp BC$ oraz $IL \perp AD$. Pokazać, że KL połowi odcinek ID.

Rozwiązanie:

Niech okrąg wpisany ω będzie styczny do BC, CA, AB w punktach D, E, F, odpowiednio. Wówczas proste IL, EF, BC przecinają się X (biegun prostej AD względem ω). Niech M będzie środkiem odcinka XD. Prosta MA przecina okrąg opisany o na trójkącie ABC w punkcie G. Prosta GK przecina ID, BC w J, N. Łatwo zauważyć, że $(B, C; D, X) = 1$, więc $MD^2 = MB \cdot MC = MG \cdot MA$ stąd $\sphericalangle MGD = \sphericalangle MDA$. Czworokąt $MGJD$ jest cykliczny, więc $\sphericalangle MJD = \sphericalangle MGD = \sphericalangle MDA = \sphericalangle XID$ oznacza to, że $MJ \parallel XI$, więc J jest środkiem ID.

Niech AH będzie wysokością w trójkącie ABC, wtedy $GANH$ jest cykliczny, więc $MH \cdot MN = MG \cdot MA = MX^2 = MD^2$. Wobec tego $(H, N; D, X) = 1$, stąd pęk $L(J, H, D, X)$ jest harmoniczny ale $ID \parallel LH$ więc LN połowi odcinek ID, stąd LN przechodzi przez J — co implikuję tezę zadania. $\square$

12. Niech $d \geqslant 2$ i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że dla dowolnego niestałego wielomianu f o współczynnikach rzeczywistych stopnia mniejszego od n, liczby $f(0), f(1), \ldots, f(d^n - 1)$ można podzielić na d rozłącznych grup takich, że suma liczb w każdej grupie jest taka sama.

Rozwiązanie:

Zdefiniujmy następujące zbiory dla $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$

$$A_i(n) := \{x \in [0, d^n - 1] \colon s_d(x) \equiv i \pmod{d}\},$$

gdzie $s_d(x)$ jest sumą cyfr liczby x w zapisie o podstawie d. Pokażemy, że suma $\sum\limits_{x \in A_i(n)} f(x)$ jest niezależna od i.

Niech $z \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $1 + z + z^2 + \ldots + z^{d-1} = 0$ oraz niech

$$\Delta_a f(X) = f(X) + zf(X + a) + z^2 f(X + 2a) + \ldots + z^{d-1} f(X + (d-1)a).$$

Wtedy $\deg(\Delta_a f) < \deg(f)$. Rozpatrzmy sumę

$$A(z) := \sum_{k=0}^{d-1} z^k \left(\sum_{X \in A_k(n)} f(X) \right).$$

Łatwo zauważyć, że

$$A(z) = \Delta_{d^{n-1}} \Delta_{d^{n-2}} \ldots \Delta_d \Delta_1 f(X).$$

Jednakże $\deg(f) < r$, więc $\deg(\Delta_{d^{n-1}} \Delta_{d^{n-2}} \ldots \Delta_d \Delta_1 f) < 0$, stąd $A(z) = 0$. Ponieważ zachodzi to dla dowolnego pierwiastka wielomianu $1 + X + X^2 + \ldots + X^{d-1}$, to współczynniki przy z^i w $A(z)$ są równe. $\square$

Zadania trudniejsze

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA = 90^\circ.$$

Niech P^* będzie punktem izogonalnie sprzężonym do P względem trójkąta ABC. Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PP^*.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez X, Y i Z punkty będące rzutami punktu P na proste BC, CA i AB, odpowiednio. Niech proste AP, BP i CP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach odpowiednio A', B' i C'. Widzimy, że trójkąty XYZ i $A'B'C'$ są jednokładne. Istotnie: Niech $B'C'$ przecina AC w punkcie U. Wówczas

$$\sphericalangle AUC' = \sphericalangle CAB + AB'C' = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA$$

i

$$\sphericalangle AYZ = 90^\circ - \sphericalangle PYZ = 90^\circ - \sphericalangle PAB.$$

Ponieważ $\sphericalangle PAB \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCA = 90^\circ$, to $\sphericalangle AYZ = \sphericalangle AUC'$. Zate $B'C' \parallel YZ$. Podobnie wykazujemy, że $C'A' \parallel ZX$ i $A'B' \parallel XY$.

Niech H będzie środkiem jednokładności $A'B'C'$ i XYZ. Znanym faktem jest, że prostopadłe opuszczone z punktów A, B, C do prostych XY, ZX i XY przecinają się w punkcie P'. W szczególności trójkąty ABC i $A'B'C'$ są ortologiczne. Jednym środkiem ortologiczności jest P', oznaczmy przez Q drugi środek. Wówczas z Twierdzenia Sondata P, P' i Q są współliniowe. Ponadto $QA' \parallel PX$, $QB' \parallel PY$, $QC' \parallel PZ$, więc H, P, Q są współliniowe. Ponadto P' jest symetryczny do P względem środka okręgu opisanego na trójkącie XYZ (znany fakt), więc prosta przechodząca przez punkty H, P i P' przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$ — co kończy dowód zadania. $\square$

2. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniają równości

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Pokazać, że

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \leqslant n.$$

Rozwiązanie:

Niech $a_i = x_i \sum_{j=1}^{n} x_j + y_i \sum_{j=1}^{n} y_j$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 + 2x_i y_i \sum_{k=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} y_k + y_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Wobec tego na mocy nierówności Schwarza mamy

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i = n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2,$$

co daje żądaną nierówność

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \leqslant n. \tag{4}$$

□

3. Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Oznaczmy przez $\mathcal{G}$ graf, którego wierzchołkami są liczby całkowite dodatnie i który nie zawiera pełnego grafu dwudzielnego $B_{k,k}$. Pokazać, że istnieje dowolnie długi ciąg arytmetyczny w $\mathbb{Z}^+$ w którym nie ma dwóch wyrazów połączonych przez krawędź $\mathcal{G}$.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw następujący lemat:

Lemat. *Niech $a \geqslant 2$. Istnieje stała $c > 0$ taka, że w grafie o n wierzchołkach bez grafu postaci $K_{a,a}$ jest co najwyżej $cn^{2-\frac{1}{a}}$ krawędzi.*

Dowód. Niech G będzie dowolnym grafem o wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Niech $d_i = \deg(v_i)$. Wtedy liczba par $(v_i, \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_a})$, gdzie v_{i_k} dla $k \in \{1, 2, \ldots a\}$ są różnymi wierzchołkami połączonymi z v, jest równa $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{a}$. Jednakże liczba ta jest nie większa od $(a-1)\binom{n}{a}$, więc

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{a} \leqslant (a-1)\binom{n}{a}.$$

Niech $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x}{a} & \text{jeśli } x > a-1, \\ 0 & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant a-1. \end{cases}$$

Wówczas f jest wypukła, więc z nierówności Jensena mamy

$$(a-1)\binom{n}{a} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{a} \geqslant nf\left(\frac{2q}{n}\right),$$

gdzie q jest liczbą wierzchołków w grafie G (w szczególności $\sum d_i = 2q$.)

Łatwo zauważyć, że prowadzi ona do nierówności

$$an^a \geqslant n\left(\frac{2q}{n} - a + 1\right)^a,$$

która daję tezę lematu. □

Powróćmy do zadania i załóżmy, że dla ustalonego $m > 1$, spośród wszystkich m wierzchołków, które są należą do ciągu arytmetycznego, co najmniej dwa są połączone krawędzią $\mathcal{G}$.

Ustalmy liczbę naturalną N, rozważmy wszystkie ciągi arytmetyczne, który m wyrazów są wśród liczb $1, 2, \ldots, N$. Istnieje co najmniej

$$\sum_{a=1}^{N-1} \left\lfloor \frac{N-a}{m-1} \right\rfloor > \sum_{a=1}^{N-1} \left(\frac{N-a}{m-1} - 1\right) = \frac{N(N-1)}{2(m-1)} - N + 1$$

takich ciągów arytmetycznych, gdyż każdy jest jednoznacznie wyznaczony przez parę (a, d) liczb całkowitych dodatnich takich, że $a + (m-1)d \leqslant N$. Liczba po prawej stronie powyższej nierówności jest większa niż $c(m)N^2$, gdzie $c(m) > 0$ jest stałą zależną od m i $N >> 0$.

Z założenia każdy taki ciąg arytmetyczny produkuję krawędź $\mathcal{G}_N$ (zawężenia grafu $\mathcal{G}$) a ponieważ każdą taką krawędź liczby co najwyżej m^2 razy, to $\mathcal{G}_N$ ma co najmniej

$$\frac{c(m)}{m^2} N^2$$

krawędzi. Jednakże

$$\frac{c(m)}{m^2} N^2 > cN^{2-\frac{1}{k}}$$

dla odpowiednio dużych N, więc na podstawie powyższego lematu $\mathcal{G}_N$ zawiera graf $K_{k,k}$ — sprzeczność z warunkami zadania. □

4. Pokazać, że istnieje liczba naturalna n taka, że każdy dzielnik pierwszy liczby $2^n - 1$ jest mniejszy niż $2^{\frac{n}{2017}} - 1$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$2^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(2),$$

gdzie $\Phi_d(2)$ jest wielomianem cyklotomicznym. Łatwo widzimy, że

$$\Phi_d(2) = \prod_{\mathrm{nwd}(i,d)=1} (2 - \zeta_d^i) \leqslant \prod_{\mathrm{nwd}(i,d)=1} |2 - \zeta_d^i| \leqslant \prod_{\mathrm{nwd}(i,d)=1} 3 = 3^{\varphi(d)}.$$

Zatem wystarczy pokazać, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$3^{\varphi(n)} < 2^{\frac{n}{2017}} - 1.$$

Jednakże

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

biorąc teraz za n liczby bezkwadratowe i korzystając z tego, że

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \to +\infty,$$

możemy zadbać aby $\dfrac{\varphi(n)}{n}$ może być dowolnie małe. □

5. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $\pi(n)$ dzieli n, gdzie $\pi(n)$ jest liczbą liczb pierwszych mniejszych od n.

Rozwiązanie:
Pokażemy najpierw następujący

Lemat. *Dla dowolnego rosnącego ciągu liczb całkowitych dodatnich* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *takiego, że* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$, *ciąg* $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)_{n \geqslant 1}$ *zawiera wszystkie liczby całkowite dodatnie. W szczególności* a_n *dzieli* n *dla nieskończenie wielu liczb naturalnych* n.

Dowód. Niech $m \in \mathbb{N}$. Rozważmy, zbiór

$$A = \left\{ n \geqslant 1 \mid \frac{a_{mn}}{mn} \geqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

Widzimy, że $1 \in A$ oraz zbiór A jest ograniczony, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{mn}}{mn} = 0$. Posiada on więc element maksymalny k. Jeśli $\dfrac{a_{mk}}{mk} = \dfrac{1}{m}$, to m jest wyrazem ciągu $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)_{n \geqslant 1}$. W przeciwnym wypadku $a_{m(k+1)} \geqslant a_{mk} \geqslant k+1$, co pokazuje, że $k+1 \in A$, wbrew maksymalności liczby k. □

Na podstawie lematu wystarczy pokazać, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$. Najpierw pokażemy

Lemat. *Dla $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność*

$$\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[1,n]} p \leqslant 4^{n-1}.$$

Dowód. Indukcja. Dla małych wartości n jest to oczywiste. Załóżmy, że jest to prawda dla liczb naturalnych mniejszych niż n. Jeżeli n jest parzyste to

$$\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[1,n]} p \leqslant \prod_{p\in\mathbb{P}\cap[1,n-1]} p \leqslant 4^{n-2} < 4^{n-1}.$$

Przypuśćmy zatem, że $n = 2k+1$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że

$$2^{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i},$$

stąd

$$\binom{2k+1}{k} \leqslant 4^k.$$

Zatem na podstawie założenia indukcyjnego mamy

$$\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[1,n]} p \leqslant \prod_{p\in\mathbb{P}\cap[1,k+1]} p \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}\cap[k+2,2k+1]} p \leqslant 4^k \cdot \binom{2k+1}{k} \leqslant 4^k \cdot 4^k = 4^{n-1}.$$

□

Na mocy powyższego lematu widzimy, że dla $k \geqslant 1$ i odpowiednio dużych n zachodzi następująca nierówność

$$(n-1)\log 4 \geqslant \sum_{p\in\mathbb{P}\cap[k,n]} \log p \geqslant (\pi(n) - \pi(k))\log k,$$

stąd

$$\pi(n) \leqslant \pi(k) + \frac{(n-1)\log 4}{\log k} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0.$$

□

6. Dodatnie liczby całkowite k i n spełniają nierówność $k \geqslant (n-1)!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będące odpowiednio dzielnikami liczb $k+1, k+2, \ldots, k+n$.

Rozwiązanie:

Niech $X = \{k+1, k+2, \ldots, k+n\}$ oraz Y będzie zbiorem dzielników pierwszych elementów ze zbioru X. Skonstruujmy graf dwudzielny G, którego pierwszym zbiorem jest X, drugim Y oraz krawędzie w grafie G łączą element z X z jego dzielnikiem pierwszym, który oczywiście leży w Y. Wówczas łatwo widzimy, że teza zadania sprowadza się do znalezienia skojarzenia w tym grafie.

Wybierzmy, więc dowolny $X' \subset X$, $X' = \{k+i_1, \ldots, k+i_l\}$. Na mocy twierdzenia Halla musimy pokazać, że elementy z X' są połączone z co najmniej l różnymi elementami zbioru Y. Załóżmy przeciwnie, czyli liczby z X' są połączone z liczbami $p_1, p_2, \ldots, p_m$, gdzie $m < l$. Wtedy dla każdego p_i dla $i = 1, 2, \ldots, m$ rozważmy liczbę z X', która jest podzielna przez p_i w najwyższej możliwej potędze. Ze względu na założenie $m < l$, któryś element z X' nie został wybrany, załóżmy, że jest to element $k+i_m$. Widzimy, że wtedy zachodzi podzielność

$$k + i_m \mid (k+i_1)(k+i_2) \cdot \ldots \cdot (k+i_{m-1}).$$

Stąd

$$0 \equiv (k+i_1) \cdot \ldots \cdot (k+i_{m-1}) \equiv (i_1 - i_m) \cdot \ldots \cdot (i_{m-1} - i_m) \pmod{k+i_m},$$

jednakże

$$0 < |(i_1 - i_m) \cdot \ldots \cdot (i_{m-1} - i_m)| \leqslant (n-1)! < k + i_m,$$

łącząc powyższe dwie nierówności dostajemy sprzeczność. $\square$

7. Dla liczby całkowitej dodatniej n, niech $S(n)$ oznacza sumę wszystkich dzielników pierwszych liczby n (np. $S(1) = 0$, $S(2) = 2$, $S(45) = 8$). Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodanie n takie, że $S(n) = S(2^n + 1)$.

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że jedynym rozwiązaniem dla $n \leqslant 3$ jest 3, gdyż $S(2^3+1) = S(9) = 3 = S(3)$.

Niech $n \geqslant 4$. Wtedy $S(n) \geqslant n$, z równością zachodzącą wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą. Istotnie: jeśli n jest liczbą pierwszą to równość trywialnie. Jeśli $n = p^\alpha$, gdzie $\alpha > 1$, to $S(n) = p < p^\alpha = n$. W przypadku, gdy $n = \prod_{i=1}^{k} p_k^{\alpha_k}$, gdzie $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ a α_i to liczby całkowite dodatnie rozumujemy indukcyjnie

$$S(n) = p_1 + \ldots + p_n < 2(p_2 + \ldots + p_n) \leqslant p_1(p_2 \ldots + p_n) < p_1^{\alpha_1} \left(\prod_{i=2}^{k} p_k^{\alpha_k} \right) = n,$$

gdzie w przedostatniej nierówności wykorzystaliśmy założenie indykcyjne.

Z twierdzenia Zsigmondy'ego, dla $n \geqslant 4$ i $n \neq 6$ istnieje liczba pierwsza $p > 2$ taka, że $p \mid 2^{2n} - 1$ i $p \nmid 2^n - 1$ dla wszystkich $2n - 1 \geqslant m \geqslant 1$. W

szczególności $p \mid 2^n + 1$, więc $S(2^n + 1) \geqslant p$ (z równością wtedy i tylko wtedy, gdy 2^n+1 jest liczbą pierwszą). Jednakże, jeśli $p \leqslant 2n$, to $2^{p-1}-1$ jest podzielne przez p, wbrew twierdzeniu Zsigmondy'ego. Zatem $p \geqslant 2n + 1$, stąd

$$S(2^n + 1) \geqslant p \geqslant 2n + 1 > n \geqslant S(n),$$

sprzeczność. Ostatecznie jedynym rozwiązaniem równania jest $n = 3$. □

8. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje nierozkładalny wielomian stopnia n, o współczynnikach całkowitych taki, że wszystkie jego wartości w liczbach całkowitych są złożone.

Rozwiązanie:
Weźmy wielomian

$$f(X) = X(X - (n! + 1))(X - 2(n! + 1)) \dots (X - (n - 1)(n! + 1)) + n!.$$

Łatwo pokazać, że dla $n = 3$ wielomian f jest nierozkładalny (dobre zadanie maturalne). Weźmy teraz rozkład $f(X) = g(X) \cdot h(X)$, gdzie $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ są wielomianami nie trywialnych stopni. Wtedy dla wszystkich $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ mamy

$$g(i(n! + 1))h(i(n! + 1)) = n!,$$

w szczególności $-n! \leqslant g(i(n! + 1)) \leqslant n!$. Ponadto $i(n! + 1) \mid g(i(n! + 1)) - g(0)$ dla dowolnych i, więc $g(i(n! + 1)) = g(0)$ dla $2 \leqslant i \leqslant n - 1$, gdyż $g(i(n! + 1)) \in [-n!, n!]$.

Podobnie rozpatrując podzielność $(i - 1)(n! + 1) \mid g(i(n! + 1)) - g(n! + 1)$ dostajemy, że $g(n! + 1) = g(i(n! + 1))$ dla $i \geqslant 3$. Zatem $g(i(n! + 1)) = g(0)$ dla $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, jednakże g jest wielomianem co najwyżej $n - 1$ stopnia, więc jest stały. Oznacza to, że f musi być nierozkładalny. Oczywiście $f(X)$ jest złożone dla dowolnego $X \in \mathbb{Z}$. □

9. Wyznaczyć wszystkie wielomiany o współczynnikach całkowitych dodatnich takich, że: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby pierwszej p takiej, że n jest resztą kwadratową modulo p, liczba $P(n)$ jest również resztą kwadratową modulo p.

Rozwiązanie:
W rozwiązaniu wykorzystamy dwa dobrze znane lematy:

Lemat. *Jeśli a jest liczbą całkowitą nie będącą kwadratem liczby całkowitej, to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.*

Lemat. *Jeśli $f \in \mathbb{Z}[X]$ oraz $\sqrt{f(n)} \in \mathbb{Z}$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej, to istnieje wielomian $g \in \mathbb{Z}[X]$ taki, że $f = g^2$.*

Załóżmy teraz, że $P(X) = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ ma własność z zadania. Z lematu 1 wiemy, że $P(m^2)$ jest kwadratem liczby całkowite, dla dowolnej liczby całkowitej m. Wobec tego z lematu 2 wielomian $P(X^2)$ jest kwadratem wielomianu g o współczynnikach całkowitych.

Niech $g(X) = b_d X^d + \ldots + b_1 X + b_0$. Porównując współczynniki w równości $P(X^2) = g(X)^2$ mamy, że jeśli $d = 2k$, to $b_{d-1} = b_{d-3} = \ldots = b_1 = 0$ i

$$P(X) = g(\sqrt{X})^2 = (b_{2k} X^k + b_{2k-2} X^{k-1} + \ldots + b_2 X + b_0)^2.$$

Jeśli $d = 2k+1$, to $b_{d-1} = b_{d-3} = \ldots = b_0 = 0$ i

$$P(X) = X(b_{2k+1} X^k + b_{2k-1} X^{k-1} + \ldots + b_3 X + b_1)^2.$$

Łatwo stwierdzamy wielomiany postaci $Q(X)^2$ i $XQ(X)^2$ takie, że $Q(X)^2$ ma współczynniki całkowite dodatnie. $\square$

10. Dany jest zbiór $\mathcal{S}$ składający się z $2^k+1 \geqslant 3$ liczb naturalnych. Pokazać, że nie istnieje k-elementowy zbiór liczb pierwszych $\mathcal{P}$ taki, że dzielniki pierwsze wszystkich liczb ze zbioru

$$S + S := \{a + b \colon a, b \in S\}$$

należą do $\mathcal{P}$.

Rozwiązanie:

Jeśli $p \geqslant 3$, to w dowolnym zbiorze $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ istnieje podzbiór B (p-prosty) mający co najmniej $\frac{n}{2}$ elementów i taki, że

$$v_p(a+b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\} \quad \text{dla } a, b \in B, \neq B.$$

Istotnie, niech $a_i = p^{\alpha_i} b_i$, gdzie $p \nmid b_i$ i niech $b_i \equiv r_i \pmod p$. Wówczas $I_0 := \{i \colon r_i > \frac{p}{2}\}$ i $I_1 := \{i \colon r_i < \frac{p}{2}\}$ są takie, że $I_0 \cup I_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wybierając teraz zbiór I o większej mocy spośród I_0 i I_1 widzimy, że zbiór $B := \{a_i \colon i \in I\}$ spełnia warunki powyższego stwierdzenia.

Załóżmy, że każda z $\frac{n(n-1)}{2}$ liczb zbioru $S+S$ ma rozkład na czynniki składający się z potęg liczb pierwszych $2, p_2, \ldots, p_k$ (S ma co najmniej 3 elementy, więc jedną z liczb pierwszych jest 2). Wówczas na mocy powyższej uwagi, zbiór $S_k := S$ zawiera podzbiór p_k-prosty S_k mający $2^{k-1}+1$ elementów. Iterując to rozumowanie, stwierdzamy, że S posiada podzbiór p_i-prosty $\{a_1, a_2, a_3\}$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Możemy zatem zapisać układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_k^{h_k} \\ a_2 + a_3 = 2^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_k^{i_k} \\ a_3 + a_1 = 2^{j_1} p_2^{j_2} \ldots p_k^{j_k} \end{cases}$$

Wtedy a_1 i a_2 są podzielne przez $p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k}$ oraz $v_2(a_1) = v_2(a_2)$ (gdyż w przeciwnym wypadku biorąc za $g := \min\{v_2(a_1), v_2(a_2)\}$ stwierdzamy, że liczba

$$2^{g-h_1} = \frac{a_1}{2^g p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k}} + \frac{a_2}{2^g p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k}}$$

jest nieparzysta.) Wobec tego $v_2(a_1) = v_2(a_3)$, podobnie $v_2(a_2) = v_2(a_3)$, więc

$$v_2(a_1) = v_2(a_2) = v_2(a_3) = g.$$

Biorąc teraz $b_i = \frac{a_i}{2^g}$ widzimy, że są to liczby nieparzyste takie, że

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 2^{h'} p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k} \\ b_2 + b_3 = 2^{i'} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k} \\ b_3 + b_1 = 2^{j'} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k} \end{cases}$$

gdzie $h' = h - g$, $i' = i - g$, $j' = j - g$ są nieujemny. Zauważmy, że $h' \geqslant 2$, gdyż liczby

$$\frac{b_1}{p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k}} \quad \text{oraz} \quad \frac{b_2}{p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k}}$$

są różnymi liczbami nieparzystymi sumującymi się do $2^{h'}$. Podobnie i', $j' \geqslant 2$. Wobec tego b_1, b_2, b_3 są liczbami nieparzystymi, które sumując parami dają liczby podzielne przez 4. Sprzeczność. $\square$

11. Danych jest n punktów na prostej takich, że dowolna odległość między punktami występuję co najwyżej dwa razy. Pokazać, że liczba odległości między punktami występujących dokładnie jeden raz jest nie mniejsza niż $\lfloor n/2 \rfloor$.

Rozwiązanie:

Niech $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ będą liczbami rzeczywistymi na osi liczbowej, które odpowiadają sytuacji z zadania. Dla $1 \leqslant i \leqslant n$ niech A_i będzie zbiorem odległości p_i od punktów po prawej stronie tzn. $A_i = \{p_j - p_i \colon i < j\}$. Oczywiście $\#A = n - i$.

Pokażemy, że $\#(A_i \cap A_j) \leqslant 1$ dla dowolnych $i < j$. Istotnie, weźmy $v, w \in A_i \cap A_j, u \neq v$ i niech $u = p_{k_1} - p_i = p_{k_2} - p_j$ i $v = p_{m_1} - p_i = p_{m_2} = p_j$. Wtedy odległość

$$p_j - p_i = p_{k_2} - p_{k_1} = p_{m_2} - p_{m_1}$$

występuje trzy razy, sprzeczność.

Wobec tego

$$\begin{aligned} &\#(A_i - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1})) = \\ &= \#(A_i - ((A_i \cap A_1) \cup (A_i \cap A_2) \cup \dots \cup (A_i \cap A_{i-1}))) = \\ &= \#A_i - \#((A_i \cap A_1) \cup (A_i \cap A_2) \cup \dots \cup (A_i \cap A_{i-1})) \geqslant \\ &\geqslant n - i - (i - 1) = n - 2i + 1. \end{aligned}$$

Zatem

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \bigcup_{k=3}^{n} (A_k - (A_1 \cup \ldots A_{k-1})) \geqslant$$
$$\geqslant n - 1 + n - 3 + n - 5 + \ldots + n - 2\lfloor n/2 \rfloor + 1,$$

więc

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geqslant \begin{cases} n^2/4 & \text{gdy } 2 \mid n, \\ (n^2-1)/4 & \text{gdy } 2 \nmid n \end{cases}$$

Jeśli teraz d_1 i d_2 oznaczają liczbę odległości występujących raz i dwa razy, odpowiednio, to oczywiście

$$d_1 + 2d_2 = \binom{n}{2},$$

oraz

$$d_1 + d_2 \geqslant \begin{cases} n^2/4 & \text{gdy } 2 \mid n, \\ (n^2-1)/4 & \text{gdy } 2 \nmid n \end{cases}.$$

Zatem łącząc powyższe zależności dostajemy tezę zadania. □

12. Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ taki, że $a_1 = 1$ oraz dla dowolnej liczby pierwszej p, liczby w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ dają wszystkie możliwe reszty przy dzieleniu przez p. Pokazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 1.$$

Rozwiązanie:

Niech $p_1, p_2, \ldots$ będą kolejnymi liczbami pierwszymi. Pokażemy indukcyjnie, że dla dowolnego n, liczby a_k, gdzie $k \in (p_n, p_{n+1}]$ są permutacją liczbą całkowitych w zbiorze $(p_n, p_{n+1}]$. Istotnie, dla $n = 1$ jest to prawdą, gdyż łatwo zauważyć, że $a_2 = 2$ oraz $a_3 = 3$.

Załóżmy, że teza zadania jest prawdziwa dla n. Wówczas $\{a_1, a_2, \ldots a_{p_n}\} = \{1, 2, \ldots, p_n\}$. Weźmy $k \in (p_n, p_{n+1}]$. Na podstawie postulatu Bertranda wiemy, że $p_{n+1} < 2p_n$. Wobec tego liczby $a_k - m$, gdzie $1 \leqslant m \leqslant p_n$ mają dzielniki pierwsze nie większe niż p_n. Wobec tego $\binom{a_k - 1}{p_n}$ ma dzielniki pierwsze nie większe od p_n.

Jeżeli $a_k \in (p_{n+1}, p_n + p_{n+1}]$ to ten współczynnik dwumianowy byłby podzielny przez p_{k+1} — sprzeczność. Jeśli $a_k > p_n + p_{n+1} \geqslant 2p_n + 1$, to z twierdzenia Sylwestra, współczynnik dwumianowy ma dzielnik większy od p_n i mamy ponownie sprzeczność.

Wobec tego $p_n < a_k \leqslant p_{n+1}$ dla $k \in (p_n, p_{n+1}]$. Ponieważ wszystkie liczby a_k są różne z warunków zadania, to dowód indukcyjny jest zakończony.

Teza zadania wynika z twierdzenia o liczbach pierwszych. □

Mecz matematyczny grupy młodszej

1. Niech x_0 będzie rzeczywistym rozwiązaniem równania

$$x^3 + px + q = 0,$$

gdzie p i q są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $4qx_0 \leqslant p^2$.

Rozwiązanie:

Rozważmy równanie

$$x_0x^2 + px + q = 0.$$

Ponieważ x_0 jest rozwiązaniem rzeczywistym tego równania to jego wyróżnik musi być nieujemny, czyli

$$4qx_0 \leqslant p^2.$$

□

2. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < 10.$$

Pokazać, że z odcinków o długościach a, b i c można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $c \geqslant a+b$. Wówczas

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)\left(\frac{4}{a+b}+\frac{1}{c}\right) = 5 + \frac{4c}{a+b} + \frac{a+b}{c} \geqslant$$

$$\geqslant 5 + 5\sqrt[5]{\frac{c^4}{(a+b)^4}\cdot\frac{a+b}{c}} \geqslant 5+5 = 10,$$

gdzie po drodze korzystamy z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną.

Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkami zadania, a to oznacza, że $a+b > c$. Analogicznie dowodzimy pozostałe dwie nierówności: $b+c > a$ oraz $c+a > b$. □

3. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi podzielność

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

Rozwiązanie:
Ustalmy $n \in \mathbb{N}_+$ i podstawmy za $m := f(n)$, dostajemy

$$f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \Longrightarrow f(n) \mid n \Longrightarrow f(n) \leqslant n \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

Z powyższej nierówności widzimy, że $f(1) = 1$.

W wyjściowej podzielności podstawmy teraz $m := n$, otrzymujemy

$$n^2 + f(n) \mid nf(n) + n \Longrightarrow n^2 + f(n) \leqslant nf(n) + n \Rightarrow n^2 - n \leqslant (n-1)f(n),$$

stąd $f(n) \geqslant n$ dla $n \geqslant 2$, co w połączeniu z nierównością $n \leqslant f(n)$ dla $n \geqslant 1$ i równością $f(1) = 1$ daje nam jedyne rozwiązanie:

$$f(n) = n \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

□

4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że

$$\phi(n) = \frac{n}{3},$$

gdzie $\phi(n)$ jest liczbą liczb względnie pierwszych z n i mniejszych od n.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że ciąg liczb $\{2 \cdot 3^n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunki zadania. Istotnie,

$$\phi(2 \cdot 3^n) = 2 \cdot 3^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 3^{n-1} = \frac{2 \cdot 3^n}{3}.$$

□

5. Liczby całkowite dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

Rozwiązanie:
Warunek jest równoważny następującemu

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3abc.$$

Korzystając z dobrze znanej równości

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

widzimy, że zachodzi równość

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc(a + b + c + 1).$$

Oznacza to, że liczba $a + b + c + 1$ dzieli liczbę $a^3 + b^3 + c^3$, gdyby dodatkowo dzieliła liczbę $a^3+b^3+c^3+1$ uzyskalibyśmy, że 1 jest podzielne przez $a+b+c+1$ - co jest niemożliwe. $\square$

6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n różnych liczb naturalnych takich, że suma każdych dwóch spośród tych liczb jest podzielna przez ich różnicę.

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba $a + b$ jest podzielna przez liczbę $a - b$, więc liczba $2a$ jest podzielna przez ab. Ciag złożony z dwóch liczb 1, 2 spełnia warunki zadania. Niech ciąg liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełnia warunki zadania. Wtedy liczba $2x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ jest podzielna przez różnicę każdych dwóch liczb z ciagu $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Niech $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Wówczas ciąg złożony z $n+1$ liczb $p+x_1$, $p+x_2$, $\ldots, p + x_n$, p spełnia warunki zadania. $\square$

7. Niech $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ będzie rodziną podzbiorów n-elementowego zbioru $\mathcal{A}$ spełniającą warunek: Dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in \mathcal{A}$ istnieje podzbiór $A_i \in \mathcal{F}$ zawierający dokładnie jeden z nich. Pokazać, że $2^k \geqslant n$.

Rozwiązanie:

Każdemu elementowi $x \in A$ przyporządkujmy zbiór $S_x = \{j \in \{1, 2 \ldots, k\} \mid x \in A_j\}$. Łatwo zauważyć, że z warunków zadania wynika, iż odwzorowanie

$$\phi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \ni x \to S_x \in \{\text{podzbiory zbioru } \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

jest różnowartościowe, stąd liczba n — moc zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest nie większa niż liczba podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$ czyli 2^k. $\square$

8. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następujacej własnosci: Po usunieciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

Rozwiązanie:

Wypełnijmy pola danej szachownicy liczbami w następujacy sposób:

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Wówczas każdy klocek przykrywa pola o łącznej sumie 2. Wobec tego suma liczb wpisanych w pola przykryte przez 21 klocków wynosi 42, zaś suma liczb we wszystkich polach jest równa 44. Zatem jedynymi polami o zadanej własności mogą być tylko cztery pola z liczba 2. W istocie maja one taką własność: każde z nich jest środkiem pewnej szachownicy 5×5 i po jego usunięciu można ja pokryć 8 klockami; pozostała część wyjściowej szachownicy rozpada się na prostokąty 3×5 i 3×8, które oczywiście również można pokryć klockami. $\square$

9. W 4034 pól tablicy $\mathcal{A}$ o wymiarach 2017×2017 wpisano liczby rzeczywiste. Pokazać, że dla pewnej liczby całkowitej $k > 1$ istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ wpisane w pewne pola tablicy $\mathcal{A}$ w taki sposób, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ liczby a_{2i-1} i a_{2i} są w tym samym wierszu, natomiast liczby a_{2i} oraz a_{2i+1} leżą w tej samej kolumnie (przyjmujemy, że $a_{2k+1} := a_1$).

Rozwiązanie:

Rozważmy graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$, gdzie V_1 i V_2 są zbiorami odpowiednio wierszy i krawędzi w tablicy $\mathcal{A}$, natomiast zbiór E jest zbiorem krawędzi grafu G zdefiniowanych następująco: wiersz $R \in V_1$ oraz kolumna $C \in V_2$ są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy w polu $R \cap C$ jest wpisana liczba rzeczywista.

Łatwo zauważyć, że powstał w ten sposób graf G który ma 4034 wierzchołków i 4034 krawędzi, stąd zawiera pewien cykl. Wystarczy teraz zauważyć, że istnienie takiego cyklu jest równoważne tezie zadania. $\square$

10. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Przedłużenia boków AD i BC wzdłuż punktów A i B przecinają się w punkcie F. Niech G będzie takim punktem, że czworokąt $ECGD$ jest równoległobokiem. Punkt H obrazem punktu E w symetrii względem prostej AD. Pokazać, że punkty D, H, F i G leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że czworokąty $AFBE$ oraz $DFCG$ są podobne, gdyż na czworokącie można opisać okrąg oraz czworokąt $DECG$ jest równoległobokiem, stąd

$\sphericalangle DFG = \sphericalangle EFC$. Oznaczmy przez Z punkt przecięcia się prostych FG i EC, wówczas

$$\begin{aligned}\sphericalangle DHF = 180^\circ - \sphericalangle HFD - \sphericalangle FDH = 180^\circ - \sphericalangle DFE - \sphericalangle BDA = \\ = \sphericalangle GFC - \sphericalangle BCA = \sphericalangle GZC = 180^\circ - \sphericalangle FGD\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

11. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany w punkcie $R \neq A$, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkty K i L są środkami boków odpowiednio BC i AC. Pokazać, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ - pole figury $\mathcal{F}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle KPR = 180^\circ - \sphericalangle CPK = 90^\circ + \sphericalangle BCR = \\ = 180^\circ - \sphericalangle LQC = \sphericalangle RQL,\end{aligned}$$

również

$$\begin{aligned}\sphericalangle RBP = \sphericalangle RBA + \sphericalangle ABP = \sphericalangle RCA + \sphericalangle ABP = \\ = \sphericalangle CBP + \sphericalangle QBP = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ARC\end{aligned}$$

a ponieważ $BR = RA$ oraz $\sphericalangle BPR = \sphericalangle RQA$ to trójkąty BPR i RQA są przystające. Zatem

$$\frac{[KPQ]}{[LQR]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot KP \cdot PR \sin KPR}{\frac{1}{2} \cdot LQ \cdot QR \sin RQL} = \frac{KP \cdot PR}{LQ \cdot QR} = \frac{KP \cdot CQ}{LQ \cdot CP} = \frac{KP}{LQ} \cdot \frac{CQ}{KP} = 1,$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z powyższych spostrzeżeń oraz podobieństwa trójkątów KPC i CQL. □

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Wyznaczyć maksymalną możliwą wartość k dla której nierówność

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant k \cdot \max\left((a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c.

Rozwiązanie:

Bez szkody załóżmy, że $a \geqslant b \geqslant c$ i niech $u = a - c, v = a - b$, gdzie $u \geqslant v \geqslant 0$. Wówczas

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{9} =$$
$$\frac{3u^2+(u-2v)^2}{18} \geqslant \frac{u^2}{6} = \frac{1}{6}\max\left((a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right),$$

więc $k = \frac{1}{6}$ z równością zachodzącą wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 2v$, czyli gdy a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny. □

2. Alicja i Bartosz grają w następującą grę: każde z nich wybiera ciąg dwóch wyników rzutu monetą, następnie rzucają monetą aż do pojawienia się jednego z tych ciągów. Grę wygrywa osoba, której ciąg pojawił się pierwszy. Bartosz wybrał 'OO'. Alicja odkryła że moneta jest nieuczciwa: z prawdopodobieństwem 2/3 pojawia się orzeł. Jaki ciąg powinna wybrać Alicja i jakie będzie wtedy prawdopodobieństwo jej wygranej?

Rozwiązanie:

Alicja ma trzy możliwości: 'OR', 'RO', 'RR'. Cokolwiek wybierze, Bartosz ma przynajmniej 4/9 szans na zwycięstwo (gdy po prostu pierwsze dwa rzuty dadzą orły). Jeśli Alicja wybierze 'RO', to jej zwycięstwo jest pewne w każdym innym przypadku: jeśli reszka pojawiła się w pierwszym lub drugim rzucie, to po niej nastąpi ciąg reszek pewnej długości, a następnie orzeł, co da zwycięstwo Alicji. Czyli optymalna strategia to wybranie 'RO' i daje ona 5/9 szans na wygraną. □

3. Dane jest 42 liczb rzeczywistych z przedziału $[1, 10^6]$. Dowieść, że można wybrać cztery z nich, tak że dla każdej permutacji (a, b, c, d) tej czwórki zachodzi

$$25(ab+cd)(ad+bc) \geqslant 16(ac+bd)^2$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy te liczby $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots x_{42}$. Dla pewnego k zachodzi $x_{2k+1}x_{2k+2} \leqslant 4x_{2k-1}x_{2k}$, bo w przeciwnym razie byłoby

$$x_{41}x_{42} > 4x_{39}x_{40} > \cdots > 4^{20}x_1x^2 > 10^{12}.$$

Twierdzimy, że czwórka $(w, x, y, z) = (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}$ spełnia żądane warunki. Z faktu że $w \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ wynikają nierówności $wx + yz \geqslant wy + xz \geqslant wz + xy$. Wystarczy więc sprawdzić

$$25(wy + xz)(wz + xy) \geqslant 16(wx + yz)^2.$$

Skoro $wx \leqslant yz \leqslant 4wx$, to $(4wx - yz)(4yz - wx) \geqslant 0$, co daje po przekształceniu $25wxyz \geqslant 4(wx + yz)^2$. Czyli

$$25(wy + xz)(wz + xy) \geqslant 100wxyz \geqslant 16(wx + yz)^2,$$

gdzie pierwsza nierówność to po prostu nierówność między średnimi. □

4. Danych jest $n \geqslant 5$. Rozważmy wszystkie ciągi $(e_1, \ldots e_n)$, gdzie $e_i \in \{-1, 1\}$. Na ciągach można wykonywać następującą operację: wybrać pięć kolejnych wyrazów i zmienić ich znaki. Powiemy że dwa ciągi są podobne, jeśli za pomocą tych operacji można zamienić jeden w drugi. Znajdź maksymalną liczbę parami niepodobnych ciągów długości n.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że każdy ciąg da się sprowadzić do takiej postaci, że $e_5 = \cdots = e_n = 1$ - idziemy od końca, zmieniamy znak e_n na dodatni za pomocą operacji na przedziale $[n-4, n]$, następnie zmieniamy znak e_{n-1} na dodatni za pomocą operacji na przedziale $[n-5, n-1]$ i tak dalej. Pozostają więc ciągi postaci spełniające $e_5 = \cdots = e_n = 1$. Załóżmy że po pewnej sekwencji ruchów na jednym z takich ciągów znowu jest $e_5 = \cdots = e_n = 1$. Twierdzimy że w takim wypadku musieliśmy wrócić do początkowego ciągu. Zauważmy że kolejność wykonywanych ruchów nie ma znaczenia. Dla $i \in [1, n-4]$ niech d_i oznacza liczbę operacji wykonanych na przedziale $[i, i+4]$, oraz $d_{n-3} = d_{n-2} = d_{n-1} = dn = 0$. Wtedy po wykonaniu wszystkich operacji e_i zamieni się w $e_i \cdot (-1)^{d_i + d_{i+1} + d_{i+2} + d_{i+3} + d_{i+4}}$. Rozważając elementy od końca, otrzymujemy że $d_{n-4} \equiv \cdots \equiv d_1 \equiv 0 \pmod 2$. Zatem jest 16 niepodobnych ciągów, niezależnie od n. □

5. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, $AC = BD$. Przekątne AC i BD przecinają się w P. Niech ω_1 będzie okręgiem opisanym na ABP, a O_1 jego

środkiem. Podobnie ω_2 i O_2 niech będą okręgiem opisanym na CDP i jego środkiem. Odcinek BC przecina ω_1, ω_2 ponownie w punktach S, T. Niech M i N będą odpowiednio środkami łuków SP (nie zawierającego B) i TP (nie zawierającego C). Dowieść że $MN || O_1O_2$.

Rozwiązanie:

Niech Q będzie drugim przecięciem okręgów ω_1 i ω_2. Zachodzą równości $\sphericalangle QCA = \sphericalangle QDB$ i $\sphericalangle QAC = \sphericalangle QBD$. Razem z założeniem $AC = BD$ to daje przystawanie trójkątów ACQ i BDQ. Zatem PQ jest dwusieczną $\sphericalangle CPB$ (wystarczy poprowadzić wysokości z Q w obu trójkątach). Czyli PQ, CN, BM to dwusieczne w trójkącie PBC, oznaczmy ich przecięcie przez I. Niech ω_3 będzie okręgiem opisanym na PBC, X drugim przecięciem PI z ω_3. I leży na prostej potęgowej ω_1 i ω_2, więc $IN \cdot IC = IM \cdot IB$, więc B, M, N, C są cykliczne. Czyli proste MN, BC są antyrównoległe względem $\sphericalangle BIC$, więc $MN \perp IX$. Mamy też $O_1O_2 \perp PQ$, stąd teza.

6. Rozważmy ciąg $2^{2^1}+1, 2^{2^2}+1, \ldots 2^{2^n}+1, \ldots$ oraz dowolny rosnący ciąg arytmetyczny (nieskończony). Dowieść, że te dwa ciągi mają albo nieskończenie wiele, albo najwyżej jeden wspólny element.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $F_n = 2^{2^n}+1$. Przypuśćmy że pewien ciąg arytmetyczny $(a_n)_{n\geqslant 1}$ z różnicą $d > 0$ ma dokładnie $2 \leqslant a < +\infty$ wspólnych elementów z $(F_n)_{n\geqslant 1}$. Ostatnie dwa wspólne wyrazy ciągów to $a_k = 2^{2^j}+1$ i $a_l = 2^{2^m}+1$, $k < l$, $j < m$. Wtedy $d | a_l - a_k = 2^{2^j}(2^{2^m-2^j}-1)$. Gdyby $d = 2^b$, $b \leqslant 2^n$, to widać że $d | F_{m+1} - F_m$ i mamy sprzeczność.

Zatem istnieje nieparzyste $d_0 > 1$, $d_0 | d$. Czyli $2^{2^m-2^j} \equiv 1 \pmod{d_0} \Rightarrow (2^{2^m-2^j})^{2^{m-j}} \equiv 1 \pmod{d_0}$. Zatem $d_0 | 2^{2^m}(2^{2^{2m-j}-2^m}-1) \Leftrightarrow d | F_{2m-j} - F_m$. Ponownie otrzymaliśmy większy wspólny wyraz ciągów, zatem przypuszczenie było błędne. $\square$

7. W mieście żyje n ludzi, a każdy z nich ma 1000 przyjaciół. Dowieść, że można utworzyć pewną grupę osób S taką, że co najmniej $n/2017$ osób z S ma dokładnie dwóch przyjaciół w S.

Rozwiązanie:

Niech $d = 1000$ i $p \in (0, 1)$. Utwórzmy zbiór S losowo, tak że każda osoba jest wybierana do S z prawdopodobieństwem p. Szansa że dana osoba zostanie wybrana do S i będzie miała dokładnie dwóch przyjaciół w S to

$$q = \binom{d}{2} p^3 (1-p)^{d-2}$$

Dla $p = \frac{3}{d+1}$ (to jest p które maksymalizuje powyższą wartość) $q > 1/2017$. Zatem oczekiwana liczba "dobrych" osób to więcej niż $\frac{n}{2017}$. Zatem musi istnieć wybór S dla którego będzie przynajmniej $\frac{n}{2017}$ "dobrych" osób. $\square$

8. Dowieść, że równanie

$$n! = (4^k - 1)(7^l - 1)$$

ma skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych n, k, l.

Rozwiązanie:
Wiadomo że

$$\nu_3(n!) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{9} \rfloor + \cdots \geqslant \frac{n}{3} + 2,$$

gdzie ostatnia nierówność zachodzi dla dostatecznie dużych n. Ponadto z LTE mamy

$$\nu_3((4^k - 1)(7^l - 1)) = 2 + \nu_3(k) + \nu_3(l)$$

Zatem zachodzi $\nu_3(k) + \nu_3(l) \geqslant \frac{n}{3}$. Czyli $\nu_3(k) \geqslant \frac{n}{6}$ lub $\nu_3(l) \geqslant \frac{n}{6}$. Przypuśćmy że zachodzi pierwsza możliwość; wtedy $3^{\frac{n}{6}} | k$, zatem

$$n! = (4^k - 1)(7^k - 1) \geqslant 4^{3^{\frac{n}{6}}} - 1$$

co daje sprzeczność dla dużych n, taką samą sprzeczność otrzymalibyśmy w drugim przypadku. $\square$

9. Dwa okręgi Γ_1 i Γ_2 z promieniami r_1 i r_2, $(r_2 > r_1)$, są styczne zewnętrznie. Prosta t_1 jest styczna do Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w punktach A i D. Prosta t_2 jest równoległa do t_1 i styczna do okręgu Γ_1, przecina Γ_2 w E i F. Prosta t_3 przechodzi przez punkt D i przecina prostą t_2 w B, okrąg Γ_2 w C. Dowieść że okrąg opisany na trójkącie ABC jest styczny do t_1.

Rozwiązanie:
$\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDA = \sphericalangle FED$ oraz $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ECD$. Czyli D jest środkiem łuku EF, oraz $DB \cdot DC = DE^2$. Wystarczy udowodnić że $DE = DA$. Rozważmy inwersję o środku D i promieniu DE. Wtedy $E' = E$, $F' = F$, $\Gamma_2' = t_2$, $t_2' = \Gamma_2$, $t_1' = t_1$. Okrąg Γ_1 jest jedynym okręgiem stycznym do t_2, t_1, Γ_2. Po inwersji przeszedł na okrąg styczny do obiektów $t_2' = \Gamma_2$, $t_1' = t_1$, $\Gamma_2' = t_2$, czyli $\Gamma_1' = \Gamma_1$. Zatem również $A' = A$. $\square$

10. Dany jest trójkąt ABC, opisany na nim okrąg ω. M i N to środki odcinków AB i AC. T jest środkiem łuku BC nie zawierającego A. Punkty X i Y to odpowiednio przecięcia okręgów opisanych na AMT i ANT z symetralnymi

odcinków AC i AB, przy czym X i Y leżą wewnątrz trójkąta ABC. Wreszcie, niech K będzie przecięciem prostych MN i XY. Dowieść że $KA = KT$.

Rozwiązanie:

Niech O będzie środkiem ω, czyli $O = MY \cap NX$. Niech ℓ będzie symetralną AT. Oznaczmy przez r symetrię względem ℓ. AT jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$, więc $r(AB)||AC$. Skoro $OM \perp AB$ i $ON \perp AC$, to $r(OM)$ jest prostopadłe do ON i przechodzi przez O. Zatem mamy równość prostych $r(OM) = ON$. Okrąg γ opisany na AMT jest symetryczny względem ℓ, więc $r(\gamma) = \gamma$. Czyli $r(M) = r(\gamma \cap OM) = \gamma \cap ON = X$. Podobnie $r(N) = Y$. Czyli $r(MN) = XY$, więc K, jako przecięcie MN i XY, leży na ℓ. $\square$

11. Wielomian P spełnia równość

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

Dowieść, że jeśli P ma pierwiastek rzeczywisty, to jest tożsamościowo równy zero.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy że P ma pierwiastki rzeczywiste, oraz niech x_0 będzie pierwiastkiem o największej wartości bezwzględnej. Wtedy

$$P(2x_0^3 + x_0) = P(2x_0^2)P(x_0) = P(2x_0^2) \cdot 0 = 0$$

Zatem $2x_0^3 + x_0$ jest pierwiastkiem, oraz $|2x_0^3 + x_0| > |x_0|$ jeśli $x_0 \neq 0$. Zatem jedynym pierwiastkiem rzeczywistym P jest 0, możemy więc napisać $P(x) = x^n Q(x)$, Q nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy

$$x^n 2x^{2n} Q(x)Q(2x^2) = (2x^3 + x)^n Q(2x^3 + x)$$

i widać, że lewa strona dzieli się przez x^{3n}, a prawa jedynie przez x^n, co daje sprzeczność. $\square$

Spis treści

Treści zadań **3**
Zawody indywidualne grupy młodszej 3
Zawody indywidualne grupy średniej 5
Zawody indywidualne grupy starszej 7
Zawody indywidualne super grupy 9
Zadania trudniejsze 11
Mecz matematyczny grupy młodszej 13
Mecz matematyczny grupy starszej 15

Rozwiązania **17**
Zawody indywidualne grupy młodszej 17
Zawody indywidualne grupy średniej 22
Zawody indywidualne grupy starszej 27
Zawody indywidualne super grupy 34
Zadania trudniejsze 42
Mecz matematyczny grupy młodszej 52
Mecz matematyczny grupy starszej 57