V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

---

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Rabka Zdrój, 5-9 grudnia 2016

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Rabka Zdrój, 5 - 9 grudnia 2016

Kadra:
Dominik Burek
Maciej Gawron
Michał Seweryn
Michał Zając
Artur Zubilewicz

Wstęp

Lista uczestników obozu

Rozkład punktów

Rozkład punktów grupy młodszej

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	4	0	2	13
2.	6	0	0	13
3.	1	0	0	18
4.	1	0	2	16
5.	2	0	1	16
6.	5	2	2	10
7.	0	0	1	18
8.	2	0	0	17
9.	11	1	0	7
10.	9	0	1	9
11.	6	0	1	12
12.	0	0	0	19

Rozkład punktów grupy starszej

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	2	0	0	2
2.	3	1	0	0
3.	2	0	0	2
4.	0	0	3	1
5.	0	0	0	4
6.	0	0	3	1
7.	1	0	0	3
8.	1	0	0	3
9.	0	0	0	4
10.	1	0	0	3
11.	1	0	0	3
12.	0	0	0	4

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z(x+y) = 2 \\ y^2 + z^2 - x(y+z) = 4 \\ z^2 + x^2 - y(z+x) = 8 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

2. Danych jest m trzyelementowych podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_m$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Przy czym każde dwa dane podzbiory mają co najwyżej jeden element wspólny. Udowodnić, że da się wybrać podzbiór B zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, który nie zawiera żadnego z danych $A_1, A_2, \ldots, A_m$ oraz spełnia nierówność $|B| \geqslant \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że istnieje dokładnie jedna taka liczba całkowita $0 \leqslant a < n!$, że spełniona jest podzielność

$$n! \mid a^n + 1.$$

1. Liczby dodatnie a, b, x, y spełniają równości $a^2 + x = b^2 + y$ oraz $a + x^2 = b + y^2$, a także nierówność $a + b + x + y < 2$. Pokazać, że $a = b$ oraz $x = y$.

2. Niech KL i KN będą stycznymi do okręgu ω w punktach L i N. M jest takim punktem, że K, N, M leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Okrąg opisany na trójkącie KLM przecina okrąg ω w punkcie P. Punkt Q jest rzutem prostokątnym N na prostą ML. Udowodnić, że $\sphericalangle MPQ = 2\sphericalangle KML$.

3. Mikołaj ma pewien zbiór prezentów oraz zbiór dzieci, którym chce rozdać prezenty. Każdemu dziecku chce dać co najwyżej jeden prezent (może nie dać prezentu, tylko rózgę). Każde dziecko wysłało Mikołajowi niepustą listę prezentów, z których będzie zadowolone. Dziecko nazwiemy *mało wybrednym*, jeżeli żadne inne dziecko nie ma dłuższej listy. Prezent nazwiemy *popularnym*, jeżeli żaden inny prezenet nie znajduje się na większej liczbie list. Załóżmy, że każdy popularny prezent znajduje się na d listach, oraz, że każde mało wybredne dziecko ma d prezentów na swojej liście. Udowodnić, że Mikołaj może tak rozdać prezenty, aby jednocześnie każde mało wybredne dziecko dostało prezent oraz każdy popularny prezent został rozdany.

1. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Udowodnić, że wielomian

$$W(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x}{1!} + 1,$$

nie ma pierwiastków wymiernych.

2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ oraz taki punkt P w jego wnętrzu, że spełnione są warunki: $AB \perp DP$, $BC \perp EP$, $CD \perp AP$, $DE \perp BP$. Wykazać, że proste EA oraz CP są prostopadłe.

3. Na płaszczyźnie znajduje się n współliniowych punktów. Dla każdej dwójki $\{X, Y\}$ z tych punktów narysowano okrąg o średnicy XY. Chcemy przypisać tym okręgom kolory w taki sposób, by okręgi, które przecinają się w dokładnie dwóch punktach zawsze dostały różne kolory. Ilu co najmniej kolorów musimy użyć?

1. Czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$, jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD. Udowodnić, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD.

2. Dany jest wielokąt foremny o nieparzystej liczbie wierzchołków n. Udowodnić, że można tak przyporządkować liczby $1, 2, \ldots, 2n$ do wierzchołków oraz środków boków, aby sumy trzech liczb przypisanych do każdego boku były równe.

3. Liczba $4^n + 2^n + 1$ jest pierwsza. Udowodnić, że n jest potęgą trójki.

Zawody indywidualne super grupy

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych $a, b, c, d, e \in [-2, 2]$ układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10 \end{cases}.$$

2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dana jest szachownica $n \times n$ oraz n wież. Rozstawiamy wieże w polach szachownicy tak, aby żadne dwie się nie szachowały. Następnie rysujemy ścieżkę złożoną z $2n$ krawędzi pól szachownicy łączącą lewy górny róg z prawym dolnym, przy czym wszystkie wieże znajdują się po jednej stronie ścieżki. Na ile sposobów można tego dokonać?

3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $c > 0$ istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że $\varphi(\sigma(n)) > cn$. ($\varphi(n)$ oznacza liczbę liczb nie większych od n względnie pierwszych z n, zaś $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników liczby n).

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych x, y zachodzi równość

$$f(x+y)+f(1)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(1+xy).$$

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że wielomian $W(x) = 4x^2 + n$ przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi dla $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

3. Dany jest trójkąt ABC, przy czym $|AB| > |AC|$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Oznaczmy przez N i M odpowiednio środki boków AB i AC. Punkty D i E leżą odpowiednio na prostych AC i AB przy czym $BD||IM$ oraz $CE||IN$. Punkt P leży na prostej BC przy czym $DE||IP$. Oznaczmy przez Q rzut prostokątny punktu P na prostą AI. Udowodnić, że punkty A, B, Q, C leżą na jednym okręgu.

4. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ oraz wielokąt wypukły o wierzchołkach w punktach kratowych, leżący wewnątrz kwadratu o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,n)$, $(n,0)$ i (n,n). Udowodnić, że liczba wierzchołków wielokąta jest mniejsza niż $100n^{2/3}$.

1. Na płaszczyźnie znajduje się n współliniowych punktów. Dla każdej dwójki $\{X, Y\}$ z tych punktów narysowano okrąg o średnicy XY. Chcemy przypisać tym okręgom kolory w taki sposób, by okręgi, które przecinają się w dokładnie dwóch punktach zawsze dostały różne kolory. Ilu co najmniej kolorów musimy użyć?

2. Odcinek AB jest średnicą półokręgu ω_1. Punkt C leży na odcinku AB, natomiast punkt D leży na ω_1, przy czym $DC = DA$. Niech ω_2 będzie okręgiem o średnicy BC a ω_3 okręgiem o środku w punkcie I stycznym do ω_1, ω_2 oraz do CD. Pokazać, że $\sphericalangle ICB = 90°$.

3. Wielomiany p, q o współczynnikach rzeczywistych spełniają równość $p(p(x)) = q(x)^2$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Udowodnić, że istnieje wielomian r o współczynnikach rzeczywistych taki, że $p(x) = r(x)^2$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

4. Niech A będzie niepustym zbiorem liczb całkowitych dodatnich. Dla $S \subset A$ oznaczamy przez $\mathrm{nwd}(S)$ największy wspólny dzielnik elementów zbioru S, przy czym przyjmujemy $\mathrm{nwd}(\emptyset) = 0$. Udowodnić, że

$$\sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} \mathrm{nwd}(S) > 0.$$

1. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnić, że $p^2 \mid 2^p - 2$ wtedy, i tylko wtedy, gdy licznik ułamka

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(p-2)(p-1)}$$

w postaci nieskracalnej jest podzielny przez p.

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą nierówności

$$f(x)f(y) \geqslant f(xy),$$

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$$

dla dowolnych dodatnich liczb wymiernych x, y. Wykazać, że jeżeli $f(a) = a$ dla pewnej wymiernej liczby $a > 1$, to $f(x) = x$ dla wszystkich dodatnich liczb wymiernych x.

3. Niech AD, BE, CF będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Niech proste l_1, l_2, l_3 będą symetrycznymi obrazami prostych EF, FD, DE odpowiednio względem prostych LM, MK, KL. Udowodnić, że proste l_1, l_2, l_3 wyznaczają trójkąt, którego wierzchołki leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

4. Zbiór $\mathfrak{A}$ jest takim podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2\}^n$, że dla dowolnych różnych $a, b \in \mathfrak{A}$ istnieje takie $1 \leqslant i \leqslant n$, że $b_i \equiv a_i + 1 \pmod 3$. Wykazać, że $|\mathfrak{A}| \leqslant 2^n$.

Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 3$, że da się tak pokolorować przekątne i boki n-kąta foremnego używając n różnych kolorów, że dla dowolnych trzech parami różnych kolorów istnieje trójkąt o wierzchołkach w wierzchołkach wielokąta i bokach tych kolorów.

2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że wielomian

$$W_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty, gdy n jest liczbą nieparzystą i nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdy n jest liczbą parzystą.

3. Alicja i Bob grają w grę na szachownicy $n \times n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Alicja stawia kółka, a Bob krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym jest krzyżyk. Zaczyna Alicja. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gdy gracz nie może wykonać ruchu, to traci go. Gra kończy się, gdy żaden z graczy nie może wykonać ruchu. Grę wygrywa ten gracz, który wykonał więcej ruchów. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywającą.

4. Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a, b > n$ takie, że liczby $a, b, a + b$ są jednego koloru.

5.
Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

6. Dana jest dodatnia liczba parzysta n i niezerowe liczby całkowite $k_0, k_1, \ldots, k_n$ takie, że $k_0 + k_1 + \ldots + k_n \neq 0$. Rozstrzygnąć, czy zawsze jest możliwe wybranie takiej permutacji $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ciągu $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$, że wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ nie ma pierwiastków całkowitych.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieją parami różne liczby całkowite a, b, c takie, że

$$a^{2016} + b^{2016} = c^{2017}.$$

8. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że od pewnego momentu wszystkie wyrazy ciągu

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

dają tę samą resztę przy dzieleniu przez n.

9. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA, przy czym czworokąt $KLMN$ jest rombem. Udowodnić, że punkt O leży na prostej KM.

11. Wewnątrz wielokąta wypukłego $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że jego rzuty P_1, $P_2, \ldots, P_n$ odpowiednio na proste A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_nA_1$ znajdują się wewnątrz boków wielokąta. Dowieść, że dla dowolnych punktów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ leżących odpowiednio wewnątrz odcinków A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_nA_1$ zachodzi nierówność

$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geqslant 1.$$

Rozwiązania

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2-z(x+y)=2 \\ y^2+z^2-x(y+z)=4 \\ z^2+x^2-y(z+x)=8 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie:

Dodając stronami równania uzyskujemy równość

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=14. \tag{1}$$

Odejmując kolejne równania stronami dostajemy kolejno

$$\begin{cases} -2=x^2-z^2-zy+xy=(x-z)(x+y+z) \\ -4=y^2-x^2-xz+yz=(y-x)(x+y+z) \\ 6=z^2-y^2+zx-xy=(z-y)(x+y+z) \end{cases}.$$

Mnożąc stronami równanie (1) przez $(x+y+z)^2$ i podstawiając wyliczone wartości do równania otrzymujemy

$$14(x+y+z)^2=2^2+4^2+6^2=56.$$

Wynika stąd, że $|x+y+z|=2$. Zauważmy, że jeżeli trójka (x,y,z) spełnia układ równań to spełnia go również trójka $(-x,-y,-z)$. Wobec tego bez straty ogólności możemy przyjąć $x+y+z=2$. Stąd bez trudu wyliczamy $x-y=2$ oraz $x-z=-1$. Sumując te równania dostajemy $3x=3$ czyli $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

Ostatecznie uwzględniając wcześniejszą uwagę mamy dwa rozwiązania $(x,y,z)=(1,-1,2)$ oraz $(x,y,z)=(-1,1,-2)$.

2. Danych jest m trzyelementowych podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_m$ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Przy czym każde dwa dane podzbiory mają co najwyżej jeden element wspólny. Udowodnić, że da się wybrać podzbiór B zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, który nie zawiera żadnego z danych $A_1, A_2, \ldots, A_m$ oraz spełnia nierówność $|B| \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$.

Rozwiązanie:

Wybierzmy taki podzbiór B, że B nie zawiera żadnego z danych podzbiorów oraz moc B jest maksymalna możliwa. Udowodnimy, że $|B| \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$. Z maksymalności B wiemy, że jakikolwiek element x spoza B wybierzemy, to $B \cup \{x\}$ zawiera

któryś z danych podzbiorów. Oznaczmy wybrany z tych podzbiorów przez A_x oraz zdefiniujmy $L_x = A_x \setminus \{x\}$.

Zauważmy, że zbiory L_x są parami różne, dwuelementowe i zawierają się w B. Istotnie, gdyby $L_x = L_y$ to $|A_x \cap A_y| = 2$, co przeczy założeniom zadania. Każdemu elementowi zbioru $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ przyporządkowaliśmy pewien dwuelementowy podzbiór zbioru B w sposób różnowartościowy. Jeżeli oznaczymy $|B|$ przez k to spełniona jest nierówność

$$n - k \leqslant \binom{k}{2}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna $2n \leqslant k^2 + k < (k+1)^2$, stąd $k + 1 > \sqrt{2n}$ i ostatecznie $k \geqslant \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że istnieje dokładnie jedna taka liczba całkowita $0 \leqslant a < n!$, że spełniona jest podzielność

$$n! \mid a^n + 1.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $n \leqslant 2$ spełniają warunki zadania. Przypuśćmy, że $n \geqslant 4$ jest liczbą parzystą. Wówczas

$$4 \mid n! \mid a^n + 1,$$

jednak $2 \mid n$, więc $a^n + 1 \equiv 1, 2 \pmod 4$ i otrzymujemy sprzeczność.

Niech teraz n będzie liczbą nieparzystą. Udowodnimy, że teza zadania jest spełniona, gdy n jest liczbą pierwszą. Zauważmy po pierwsze, że liczba $a := n! - 1$ spełnia warunki zadania. Przypuśćmy, że n jest liczbą złożoną i wybierzmy minimalny dzielnik pierwszy p liczby n. Wówczas liczba $A = \frac{n!}{p} - 1$ również spełnia warunki zadania. Istotnie, korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona dostajemy ciąg kongruencji

$$\left(\frac{n!}{p} - 1\right)^n + 1 \equiv n \cdot \frac{n!}{p} - 1 + 1 \equiv 0 \pmod{n!}.$$

Niech teraz $n = p$ będzie liczbą pierwszą. Mamy następujące kongruencje

$$a^p \equiv -1 \pmod{p!}, \quad a^{\varphi(p!)} \equiv 1 \pmod{p!}.$$

Jeżeli przez k oznaczymy minimalną taką liczbę, że $a^k \equiv 1 \pmod{p!}$ to wiemy, że

$$k \mid 2p, \qquad \text{oraz} \quad k \mid \varphi(p!).$$

Ponieważ, $p \nmid \varphi(p!)$ to $k \mid 2$. Oznacza to, że $a^2 \equiv 1 \pmod{p!}$ oraz $a^p \equiv -1 \pmod{p!}$ z tych dwóch kongruencji wynika, że $a \equiv -1 \pmod{p!}$, czyli rozwiązanie jest jednoznaczne.

Ostatecznie $n = 1$ oraz n będące liczbą pierwszą spełnia warunki zadania.

1. Liczby dodatnie a, b, x, y spełniają równości $a^2 + x = b^2 + y$ oraz $a + x^2 = b + y^2$, a także nierówność $a + b + x + y < 2$. Pokazać, że $a = b$ oraz $x = y$.

Rozwiązanie:

Przekształćmy dane w zadaniu równości do postaci

$$(a-b)(a+b) = y-x, \qquad \text{oraz} \qquad (y-x)(y+x) = a-b.$$

Widzimy, że $(a-b) = 0$ jest równoważne $(x-y) = 0$. Przypuśćmy, że te równości nie są spełnione wówczas z nierówności między średnimi wynika, że

$$\frac{a+b+x+y}{2} = \frac{\frac{y-x}{a-b} + \frac{a-b}{y-x}}{2} \geqslant 1.$$

Otrzymana nierówność jest sprzeczna z założeniem $a+b+x+y < 2$. Oznacza to, że teza zadania jest spełniona.

2. Niech KL i KN będą stycznymi do okręgu ω w punktach L i N. M jest takim punktem, że K, N, M leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Okrąg opisany na trójkącie KLM przecina okrąg ω w punkcie P. Punkt Q jest rzutem prostokątnym N na prostą ML. Udowodnić, że $\sphericalangle MPQ = 2\sphericalangle KML$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez R drugi punkt przecięcia okręgu k z prostą LM. Zachodzą równości: $\sphericalangle MPK = \sphericalangle MLK = \sphericalangle RLK = \sphericalangle RPL$. W takim razie $\sphericalangle MPR = \sphericalangle KPL = \sphericalangle KML$. Wobec tej równości okrąg przechodzący przez punkty M, P, R jest styczny do prostej KM. Oznaczmy przez S środek odcinka MN. Punkt ten leży na osi potęgowej okręgu k i okręgu opisanego na trójkącie MPR, czyli na prostej PR. Trójkąt MSQ jest równoramienny, czyli $\sphericalangle MQS = \sphericalangle QMS = \sphericalangle MPS$ i punkty M, P, Q, S leżą na okręgu. W takim razie:

$$\sphericalangle MPQ = \sphericalangle MPS + \sphericalangle SPQ = \sphericalangle MQS + \sphericalangle SMQ = 2\sphericalangle SMQ = 2\sphericalangle KML.$$

$\square$

3. Mikołaj ma pewien zbiór prezentów oraz zbiór dzieci, którym chce rozdać prezenty. Każdemu dziecku chce dać co najwyżej jeden prezent (może nie dać prezentu, tylko rózgę). Każde dziecko wysłało Mikołajowi niepustą listę prezentów, z których będzie zadowolone. Dziecko nazwiemy *mało wybrednym*, jeżeli żadne inne dziecko nie ma dłuższej listy. Prezent nazwiemy *popularnym*, jeżeli żaden inny prezenet nie znajduje się na większej liczbie list. Załóżmy, że każdy popularny prezent znajduje się na d listach, oraz, że każde mało wybredne dziecko ma d prezentów na swojej liście. Udowodnić, że Mikołaj może tak rozdać prezenty, aby jednocześnie każde mało wybredne dziecko dostało prezent oraz każdy popularny prezent został rozdany.

Rozwiązanie:

Rozważmy graf dwudzielny, którego wierzchołkami po jednej stronie są prezenty, a po drugiej dzieci. Krawędź jest między dzieckiem a prezentem wtedy, i tylko wtedy, gdy dziecko ma dany prezent na swojej liście. Rozważmy maksymalne skojarzenie w tym grafie, które maksymalizuje również sumaryczną liczbę niewybrednych dzieci i

popularnych prezentów, które zostały skojarzone. Załóżmy, dla dowodu nie wprost, że w naszym skojarzeniu pewne niewybredne dziecko D nie otrzymało prezentu.

Będziemy szukali ścieżek alternujących zaczynających się w D. Oznaczmy zbiór dzieci na końcach takich ścieżek przez $\mathcal{D}$ zaś zbiór prezentów na końcach takich ścieżek przez $\mathcal{P}$. Gdyby pewno dziecko w $\mathcal{D}$ było wybredne to zmieniając wzdłuż ścieżki alternującej dostaniemy skojarzenie o tej samej liczności ale większej liczbie niewybrednych dzieci, które dostaną prezent. Zauważmy, że każde dziecko z $\mathcal{D}$ jest skojarzone z pewnym prezentem z $\mathcal{P}$ (gdyby tak nie było to mielibyśmy ścieżkę powiększającą). Oznacza to, że $|\mathcal{P}| = |\mathcal{D}|$. Jednak wszystkie prezenty znajdujące się na listach dzieci ze zbioru $\mathcal{D} \cup D$ są w $\mathcal{P}$. Jednak każde z tych dzieci jest niewybredne, zatem każde ma dokładnie d prezentów na liście, ponieważ $|\mathcal{D} \cup D| > |\mathcal{P}|$ to przynajmniej jeden prezent z $\mathcal{P}$ znajduje się na przynajmniej $d+1$ listach. Otrzymujemy sprzeczność, która dowodzi tezy zadania.

1. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Udowodnić, że wielomian

$$W(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x}{1!} + 1,$$

nie ma pierwiastków wymiernych.

Rozwiązanie:

Rozważmy wielomian $Q(x) = n!W(x)$ ma on współczynniki całkowite oraz współczynnik 1 przy najwyższej potędze, oznacza to, że jego pierwiastki wymierne są całkowite.

Oczywiście $Q(1) > 0$. Podobnie, gdy n jest liczbą parzystą to

$$Q(-1) = 1 + \left(-\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}\right) + \left(-\frac{n!}{(n-3)!} + \frac{n!}{(n-4)!}\right) + \ldots + \left(-\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{0!}\right),$$

widzimy, że wszystkie liczby w nawiasach są nieujemne, więc $Q(-1) > 0$. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą to podobnie:

$$Q(-1) = \left(-\frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!}\right) + \left(-\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-3)!}\right) + \ldots + \left(-\frac{n!}{2!} + \frac{n!}{1!}\right) + n!,$$

otrzymujemy, że $Q(-1) > 0$.

Przypuśćmy, że Q ma pierwiastek całkowity a. Wiemy, że $a \neq 1, 0, -1$, więc istnieje dzielnik pierwszy p liczby a. Udowodnimy, że dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$ maksymalne takie k, że $p^k \mid a^i \frac{n!}{i!}$ jest większe od maksymalnego takiego l, że $p^l \mid n!$. Skorzystamy tu z twierdzenia Legendre'a mówiącego, że wykładnik z jakim liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze $n!$ wynosi

$$\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \ldots = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

gdzie $s_p(n)$ to suma cyfr w zapisie przy podstawie p liczby n.

Wystarczy pokazać, że

$$i + \frac{n - s_p(n)}{p-1} - \frac{i - s_p(i)}{p-1} > \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

czyli

$$i > \frac{i - s_p(i)}{p-1}.$$

a ta nierówność jest oczywista. Wobec powyższych rozważań lewa strona równości

$$a^n + \frac{n!}{(n-1)!}a^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{1!}a = -n!$$

jest podzielna przez wyższą potęgę p niż prawa. Oznacza to, że nie mogą być równe.

2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ oraz taki punkt P w jego wnętrzu, że spełnione są warunki: $AB \perp DP$, $BC \perp EP$, $CD \perp AP$, $DE \perp BP$. Wykazać, że proste EA oraz CP są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\vec{AB} = \vec{PB} - \vec{PA}$. Warunek $AB \perp DP$ jest więc równoważny $\vec{PD} \circ \vec{PB} = \vec{PD} \circ \vec{PA}$. Analogicznie otrzymujemy

$$\vec{PE} \circ \vec{PC} = \vec{PE} \circ \vec{PB}, \quad \vec{PA} \circ \vec{PD} = \vec{PA} \circ \vec{PC}, \quad \vec{PB} \circ \vec{PE} = \vec{PB} \circ \vec{PD}.$$

Wynika stąd, że

$$\vec{PC} \circ \vec{PE} = \vec{PE} \circ \vec{PB} = \vec{PB} \circ \vec{PD} = \vec{PD} \circ \vec{PA} = \vec{PA} \circ \vec{PC},$$

czyli $0 = \vec{PC} \circ (\vec{PA} - \vec{PE}) = \vec{PC} \circ \vec{EA}$. Co jest równoważne z tezą.

3. Na płaszczyźnie znajduje się n współliniowych punktów. Dla każdej dwójki $\{X, Y\}$ z tych punktów narysowano okrąg o średnicy XY. Chcemy przypisać tym okręgom kolory w taki sposób, by okręgi, które przecinają się w dokładnie dwóch punktach zawsze dostały różne kolory. Ilu co najmniej kolorów musimy użyć?

Rozwiązanie:

Łatwo sprawdzić, że dla $n \leqslant 3$ wystarczy jeden kolor. W dalszej części rozwiązania rozważymy sytuację, gdy $n \geqslant 4$. Wykażemy, że wtedy minimalna liczba kolorów wynosi $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

O danych okręgach będziemy myśleć jako o parach indeksów (i, j) (dla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$), które odpowiadają parze punktów wyznaczających średnicę. Okręgi (i, j) oraz (s, t) przecinają się w dwóch punktach (dalej będziemy pisać dla uproszczenia po prostu, że się przecinają) wtedy i tylko wtedy, gdy $i < s < j < t$ lub $s < i < t < j$.

Rozważmy n postaci $2k + 1$. Przyjmijmy nie wprost, że wystarczy k kolorów. Rozważmy okręgi $(1, k+1), (2, k+2), \ldots, (k, 2k)$. Dowolne dwa z nich się przecinają, zatem muszą one dostać różne kolory – nazwijmy te kolory odpowiednio $1, 2, \ldots, k$.

Zwróćmy uwagę, że wykorzystaliśmy już wszystkie kolory. Okrąg $(k+1, 2k+1)$ przecina się ze wszystkimi poprzednio rozważanymi okręgami oprócz $(1, k+1)$, zatem jedyny kolor, jaki może dostać, to 1. Teraz rozważmy okręgi $(1, k+2), (2, k+3), \ldots, (k, 2k+1)$. Dowolne dwa z nich przecinają się, zatem muszą one użyć wszystkich dostępnych kolorów. Ale dowolny z tych okręgów przecina któryś z poprzednio zdefiniowanych okręgów o kolorze 1, co daje sprzeczność. Zatem do pokolorowania $2k+1$ okręgów potrzeba $k+1$ kolorów. Oczywiście tym bardziej do pokolorowania $2k+2$ okręgów potrzeba $k+1$ kolorów. Połączenie tych dwóch przypadków daje nam ograniczenie $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Teraz pokażemy konstrukcję odpowiedniego kolorowania. Załóżmy, że n jest postaci $2k$. Rozważmy kolorowanie, które przypisuje okręgowi (i, j) kolor $\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor \pmod k$. Weźmy dwa okręgi $(i, j), (s, t)$ takie, że $i < s < j < t$ i oszacujmy wartość $(s+t) - (i+j)$: $2 \leqslant (s-i) + (t-j) = (t-i) + (s-j) \leqslant (2k-1) - 1 = 2k-2$. Zatem $1 \leqslant \lfloor \frac{s+t}{2} \rfloor - \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor \leqslant k-1$, co dowodzi, że faktycznie kolorowanie jest poprawne. Dla n nieparzystego wystarczy rozważyć n większe o 1, rozważyć kolorowanie dla niego, a potem zapomnieć o dodatkowym wierzchołku.

1. Czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$, jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD. Udowodnić, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez K rzut punktu B na prostą CD. Wówczas punkty K, L i M leżą na jednej prostej (prosta Simsona punktu K). Łatwo zauważyć, że czworokąt $NKBD$ jest prostokątem, stąd teza. □

2. Dany jest wielokąt foremny o nieparzystej liczbie wierzchołków n. Udowodnić, że można tak przyporządkować liczby $1, 2, \ldots, 2n$ do wierzchołków oraz środków boków, aby sumy trzech liczb przypisanych do każdego boku były równe.

Rozwiązanie:

W co drugi wierzchołek wpisujemy liczby nieparzyste. Dzięki temu, że n jest nieparzyste wszystkie wierzchołki będą miały przypisaną liczbę. Licząc sumy kolejnych wpisanych liczb na bokach dostajemy liczby różniące się o 2. W granicznej sytuacji, gdy znajdujemy parę różniącą się o więcej niż 2, zaczynamy od niej wpisywanie liczb parzystych od najmniejszej do największej przeciwnie z ruchem wskazówek zegara. □

3. Liczba $4^n + 2^n + 1$ jest pierwsza. Udowodnić, że n jest potęgą trójki.

Rozwiązanie:

Oczywiście n jest liczbą nieparzystą, gdyż w przeciwnym razie $3 \mid 4^n + 2^n + 1$. Zapiszmy $n = 3^k(2m+1)$ tak, aby $2m+1$ nie było podzielne przez 3 i przypuśćmy, że $m \neq 0$. Mamy

$$4^n+2^n+1 = \frac{2^{3^{k+1}(2m+1)} - 1}{2^{3^k(2m+1)} - 1} = \frac{(2^{3^{k+1}} - 1)(2^{3^{k+1}\cdot 2m} - 2^{3^{k+1}\cdot(2m-1)} \pm \ldots - 2^{3^{k+1}} + 1)}{2^{3^k(2m+1)} - 1}$$

Zauważmy, że

$$\mathrm{nwd}(2^{3^k(2m+1)}-1, 2^{3^{k+1}}-1) = 2^{\mathrm{nwd}(3^k(2m+1),3^{k+1})}-1 = 2^{3^k}-1.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{2^{3^{k+1}}-1}{2^{3^k}-1} \mid 4^n+2^n+1.$$

Ponadto

$$\frac{2^{3^{k+1}}-1}{2^{3^k}-1} = 4^{3^k}+2^{3^k}+1 < 4^n+2^n+1.$$

Oznacza to, że liczba 4^n+2^n+1 nie jest pierwsza. Wynika stąd, że przypuszczenie $m \neq 0$ było fałszywe, czyli $m=0$ i n jest potęgą trójki.

Zawody indywidualne super grupy

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych $a, b, c, d, e \in [-2, 2]$ układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Możemy przyjąć $a = 2\cos x_1$, $b = 2\cos x_2$,..., $e = 2\cos x_5$. Korzystając ze wzoru

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x,$$

dostajemy

$$\sum_{i=1}^{5}(\cos 5x_i - 1) = 5 - 0 + 0 - 5 = 0.$$

Oznacza to, że $\cos 5x_i = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, 5$. W szczególności liczby a, b, c, d, e są pierwiastkami równania

$$0 = t^5 - 5t^3 + 5t - 2 = (t-2)(t^2+t-1)^2.$$

W szczególności $a, b, c, d, e \in \{2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$. Z równania $a+b+c+d+e=0$ wynika, że w multizbiorze $\{a, b, c, d, e\}$ musi być tyle samo elementów $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, co $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Ze zbiorów

$$\left\{2, 2, 2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\},$$

tylko ten drugi spełnia pierwsze równanie. Bez trudu sprawdzamy, że spełnia on pozostałe równania. Ostatecznie rozwiązania układu są postaci

$$\{a, b, c, d, e\} = \left\{2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dana jest szachownica $n \times n$ oraz n wież. Rozstawiamy wieże w polach szachownicy tak, aby żadne dwie się nie szachowały. Następnie rysujemy ścieżkę złożoną z $2n$ krawędzi pól szachownicy łączącą lewy górny róg z prawym dolnym, przy czym wszystkie wieże znajdują się po jednej stronie ścieżki. Na ile sposobów można tego dokonać?

Rozwiązanie:

Na $2 \cdot (2n-1)!!$ sposobów. Oznaczmy przez S_n liczbę sposobów na jakie możemy rozstawić wieże i narysować ścieżki, tak aby wieże znajdowały się pod ścieżką (poprawne rozstawienie wież i taką ścieżkę nazwiemy sytuacją). Oczywiście $S_1 = 1$. Udowodnimy, że $S_n = (2n-1)S_{n-1}$. Skonstruujmy następujące odwzorowanie pomiędzy sytuacjami dla n i sytuacjami dla $n-1$: Usuwamy dolny wiersz oraz kolumnę w której znajdowała się wieża w dolnym wierszu; poziome odcinki ścieżki łączymy w nową ścieżkę. Pokażemy, że takie odwzorwanie jest $2n-1$ do 1.

Rozważmy sytuację dla $n-1$ i niech ciąg $n-1 = c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_{n-1} \geqslant 1$ będzie ciągiem numerów najwyższych kwadratów których poziome krawędzie należą do ścieżki w kolejnych kolumnach. Wówczas możemy wstawić kolumnę przed pierwszą kolumną na 1 sposób, pomiędzy i-tą a $(i+1)$-wszą na $c_i - c_{i+1} + 1$ sposobów oraz za ostatnią kolumną na c_{n-1} sposobów. Łącznie na

$$1 + (c_1 - c_2 + 1) + (c_2 - c_3 + 1) + \ldots + (c_{n-2} - c_{n-1} + 1) + c_{n-1} = n + c_1 = 2n - 1$$

sposobów.

Oznacza to, że odwzorowanie jest rzeczywiście $2n-1$ do 1 i teza jest spełniona.

3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $c > 0$ istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że $\varphi(\sigma(n)) > cn$. ($\varphi(n)$ oznacza liczbę liczb nie większych od n względnie pierwszych z n, zaś $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników liczby n).

Rozwiązanie:

Niech $a \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną, zaś p przebiega zbiór liczb pierwszych. Udowodnimy, że

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\varphi\left(\frac{a^p-1}{a-1}\right)}{\frac{a^p-1}{a-1}} = 1.$$

Niech $\frac{a^p-1}{a-1} = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s}$, ze znanego lematu wynika, że $p \mid q_i - 1$ lub $q_i = p$ i $a \equiv 1 \pmod{p}$. Widzimy, że dla dostatecznie dużych p drugi przypadek jest wykluczony. Mamy

$$\frac{\varphi\left(\frac{a^p-1}{a-1}\right)}{\frac{a^p-1}{a-1}} = \prod_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{q_i}) \geqslant (1 - \frac{1}{p})^s.$$

Ponieważ $a^p > \frac{a^p-1}{a-1} = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s} > p^s$, to $\frac{s}{p} < \frac{\ln a}{\ln p}$. W szczególności

$$(1 - \frac{1}{p})^s \geqslant (1 - \frac{1}{p})^{p\frac{\ln a}{\ln p}} \to 1.$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Ustalmy liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_s$ tak, aby

$$\prod_{i=1}^{s} \frac{p_i}{p_i - 1} > 2c,$$

Jest to możliwe ponieważ

$$\prod_p \frac{p}{p-1} = \prod_p (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n} = \infty.$$

Niech $n = (p_1 p_2 \dots p_s)^{p-1}$ dla pewnego p, wówczas

$$\varphi(\sigma(n)) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^p - 1}{p_i - 1}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{s} \varphi\left(\frac{p_i^p - 1}{p_i - 1}\right).$$

Ustalmy ϵ tak, aby $(1-\epsilon)^{2s} > 0.5$. Korzystając z udowodnionego wcześniej faktu, możemy dobrać tak p, aby $\varphi\left(\frac{p_i^p-1}{p_i-1}\right) \geqslant (1-\epsilon)\frac{p_i^p-1}{p_i-1}$ oraz $\frac{p_i^p-1}{p_i^p} \geqslant (1-\epsilon)$. Wówczas

$$\varphi(\sigma(n)) \geqslant (1-\epsilon)^s \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^p - 1}{p_i - 1} \geqslant 0.5 \cdot \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^p}{p_i - 1} = 0.5n \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i}{p_i - 1} > cn.$$

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych x, y zachodzi równość

$$f(x+y) + f(1) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(1+xy).$$

Rozwiązanie:
Rozwiązanie zadania można znaleźć w pdfie
http://www.mit.edu/ evanchen/handouts/Monsters/Monsters.pdf

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że wielomian $W(x) = 4x^2 + n$ przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi dla $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Rozwiązanie:

Wstawiając $x = 0$ dostajemy, że $W(0) = n$ jest liczbą pierwszą. Bez trudu sprawdzamy, że spośród $n = 2, 3, 5, 7$ tezę spełniają $n = 3$ i $n = 7$. Będziemy odtąd rozważać $n \geqslant 11$.

Przypuśćmy, że istnieje taka liczba pierwsza $p > 2$, że $p \mid n+1$. Wówczas $-n \equiv 1 \pmod{p}$, czyli $p \mid (p-1)^2 + n = W(\frac{p-1}{2})$. Ponadto $(p-1)^2 + n > p$, więc $W(\frac{p-1}{2})$ nie jest pierwsze. Oznacza to, że $n+1$ jest potęgą dwójki.

Rozważmy liczbę $n+9$. Ponieważ $n+1 \geqslant 12$ i $n+1$ jest potęgą dwójki, to $n+9 \equiv 8 \pmod{16}$ i $n+9$ nie jest potęgą dwójki. Rozważmy czynnik pierwszy $p > 2$ liczby $n+9$. Mamy $p \mid (p-3)^2 + n = W(\frac{p-3}{2})$ i oczywiście $\frac{p-3}{2} < n$. Pozostaje pokazać, że $(p-3)^2 + n \neq p$, gdyby $p \neq n+9$, to $n > \frac{n+9}{2} \geqslant p$ i $(p-3)^2 + n > p$. Przypuśćmy, że $(p-3)^2 + n = p = n+9$, jednak wówczas $p = 6$ sprzeczność.

Ostatecznie jedynie $n = 3$ i $n = 7$ spełniają tezę zadania.

3. Dany jest trójkąt ABC, przy czym $|AB| > |AC|$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Oznaczmy przez N i M odpowiednio środki boków AB i AC. Punkty D i E leżą odpowiednio na prostych AC i AB przy czym $BD||IM$ oraz $CE||IN$. Punkt P leży na prostej BC przy czym $DE||IP$. Oznaczmy przez Q rzut prostokątny punktu P na prostą AI. Udowodnić, że punkty A, B, Q, C leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Rozwiązanie na stronie
http://artofproblemsolving.com/community/c6h379785p2101010

4. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ oraz wielokąt wypukły o wierzchołkach w punktach kratowych, leżący wewnątrz kwadratu o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,n)$, $(n,0)$ i (n,n). Udowodnić, że liczba wierzchołków wielokąta jest mniejsza niż $100n^{2/3}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy liczbę boków naszego wielokąta przez k. Po pierwsze zauważmy, że obwód S liczony w metryce miejskiej ($d(P,Q) = |P_x - Q_x| + |P_y - Q_y|$) naszego wielokąta jest ograniczony przez $4n$. Istotnie, przechodząc dookoła naszego wielokąta przechodzimy robimy najwyżej n kroków w górę, n kroków w dół, n kroków w prawo i n kroków w lewo.

Postaramy się oszacować S od dołu. Zauważmy, że żadne dwa boki naszego wielokąta nie mogą być równe jako skierowane wektory. Istotnie, gdyby tak było to wielkąt nie byłby wypukły. Zauważmy, że w metryce miejskiej istnieje dokładnie $4l$ wektory długości l. Niech d będzie taką liczbą, że $4(1+2+\ldots+d) \leqslant k < 4(1+2+\ldots+d+(d+1)) = 2(d+1)(d+2) < 4d^2$ (o ile $d > 4$, gdy $d \leqslant 4$ to $k < 100$ i teza jest spełniona). Minimalna suma długości w metryce miejskiej k różnych wektorów jest większa od

$$(4 \cdot 1) \cdot 1 + (4 \cdot 2) \cdot 2 + \ldots + (4d) \cdot d.$$

Mamy więc

$$4n \geqslant S \geqslant 4(1^2 + 2^2 + \ldots + d^2) = 4 \cdot \frac{d(d+1)(2d+1)}{6} > 4 \cdot \frac{d^3}{3} > 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{\frac{k}{2}})^3.$$

Stąd

$$n \geqslant \frac{1}{24} k^{3/2}.$$

1. Na płaszczyźnie znajduje się n współliniowych punktów. Dla każdej dwójki $\{X, Y\}$ z tych punktów narysowano okrąg o średnicy XY. Chcemy przypisać tym okręgom kolory w taki sposób, by okręgi, które przecinają się w dokładnie dwóch punktach zawsze dostały różne kolory. Ilu co najmniej kolorów musimy użyć?

Rozwiązanie:
Patrz rozwiązanie zadania 9 z zawodów grupy starszej.

2. Odcinek AB jest średnicą półokręgu ω_1. Punkt C leży na odcinku AB, natomiast punkt D leży na ω_1, przy czym $DC = DA$. Niech ω_2 będzie okręgiem o średnicy BC a ω_3 okręgiem o środku w punkcie I stycznym do ω_1, ω_2 oraz do CD. Pokazać, że $\sphericalangle ICB = 90°$.

Rozwiązanie:

Niech prosta równoległa do AD i przechodząca przez punkt C przecina ω_1 w punkcie F. Natomiast niech $E \neq D$ będzie punktem wspólnym ω_1 (uzupełniony do okręgu) i prostej CD. Łatwo zauważyć, że $BF = BC = BE$, więc środek okręgu wpisanego I' w trójkąt DEF leży na prostej BD. Jeżeli okrąg $(\omega_4, I")$ styczny wewnętrznie do ω_1 jest styczny do prostych CF i CD w punktach odpowiednio K i T, to na podstawie lematu z którego dowodzimy twierdzenie Saweyama-Taheboulta widzimy, że I' leży na prostej KT.

Łatwo zauważyć, że $\sphericalangle I"CB = 90°$ oraz $\sphericalangle BHC = 90°$, gdzie $H = CF \cap BD$. Niech $CI" \cap BD = G$. W trójkącie prostokątnym BGC punkt I' leży na odcinku BG oraz $BI' = BC$, ponadto CH jest wysokością, stąd CI' jest dwusieczną kąta GCH. Rozpatrując okrąg ω_2 opisany na trójkącie BCH (o średnicy BC) zauważamy, że CI' tnie go w środku M łuku CH, więc $CM = MH = MI'$, stąd M leży na osi potęgowej punktu C i okręgu ω_4, co na podstawie dobrze znanego lematu implikuje, że $\omega_4 = \omega_3$. $\square$

3. Wielomiany p, q o współczynnikach rzeczywistych spełniają równość $p(p(x)) = q(x)^2$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Udowodnić, że istnieje wielomian r o współczynnikach rzeczywistych taki, że $p(x) = r(x)^2$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeżeli wielomian $W(x)$ jest stopnia parzystego i ma dodatni współczynnik wiądacy to da się go zapisać w postaci $W(x) = A(x)^2 + B(x)$, gdzie $\deg B < \deg A$. Istotnie, jeżeli $W(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$, to wystarczy zdefiniować współczynniki wielomianu $A(x)$ wzorami

$$a_n = \sqrt{c_{2n}}, \quad a_{n-k} = \frac{1}{2a_n}\left(c_{2n-k} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{n-j}a_{n-(k-j)}\right), \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Przy tak zdefiniowanym $A(x)$ współczynniki $A(x)^2$ i $W(x)$ są takie same przy potęgach $n, n+1, \ldots, 2n$, dlatego $B(x) := W(x) - A(x)^2$ ma stopień mniejszy niż $n = \deg A$. Widzimy również, że jeżeli $W(x)$ jest kwadratem, to przy takim przedstawieniu musi zachodzić $B(x) = 0$, ponieważ $A(x)$ jest jedynym (z dokładnością do znaku) wielomianem stopnia n takim, że $W(x)$ i $A(x)^2$ mają te same współczynniki przy potęgach $n, n+1, \ldots, 2n$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Z warunku $p(p(x)) = q(x)^2$ dostajemy, że $p(x)$ ma stopień parzysty i dodatni współczynnik wiodący. Oznacza to, że $p(x) = a(x)^2 + b(x)$ dla pewnych wielomianów $a(x), b(x)$ przy czym $\deg a > \deg b$. Mamy

$$a(p(x))^2 + b(p(x)) = q(x)^2,$$

przy czym $\deg a(p(x)) = \deg a \cdot \deg p > \deg b \cdot \deg p = \deg b(p(x))$. Wobec powyższych rozważań $b(p(x)) = 0$, czyli $b(x) = 0$ i otrzymujemy tezę.

4. Niech A będzie niepustym zbiorem liczb całkowitych dodatnich. Dla $S \subset A$ oznaczamy przez $\mathrm{nwd}(S)$ największy wspólny dzielnik elementów zbioru S, przy

czym przyjmujemy $\mathrm{nwd}(\emptyset) = 0$. Udowodnić, że

$$\sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} \mathrm{nwd}(S) > 0.$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy ze znanej równości

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$

która zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n. Mamy

$$\sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} \mathrm{nwd}(S) = \sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} \sum_{d|\mathrm{nwd}(S)} \varphi(d).$$

Oznaczmy $M = \mathrm{nww}(A)$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ oraz [wyrażenie logiczne] jedynkę lub zero, w zależności od tego czy wyrażenie jest spełnione czy nie. Mamy kolejno

$$\begin{aligned}
\sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} \sum_{d|\mathrm{nwd}(S)} \varphi(d) &= \sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} \sum_{d|M} \varphi(d)[d \mid s_1][d \mid s_2] \ldots [d \mid s_k] \\
&= \sum_{d|M} \varphi(d) \sum_{S \subset A} (-2)^{|S|-1} [d \mid s_1][d \mid s_2] \ldots [d \mid s_k] \\
&= \sum_{d|M} \varphi(d) \frac{1 - (1 - 2[d \mid a_1])(1 - 2[d \mid a_2]) \ldots (1 - 2[d \mid a_n])}{2}.
\end{aligned}$$

Wyrażenia $\frac{1-(1-2[d|a_1])(1-2[d|a_2])\ldots(1-2[d|a_n])}{2}$ są oczywiście nieujemne, ponieważ każda liczba w nawiasie jest równa 1 lub -1. Ponadto, jeżeli a_n jest największą liczbą w zbiorze A, to dla $d = a_n$, wyrażenie przyjmuje, wartość 1 czyli nasza suma jest równa co najmniej $\varphi(a_n) > 0$.

1. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnić, że $p^2 \mid 2^p - 2$ wtedy, i tylko wtedy, gdy licznik ułamka

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(p-2)(p-1)}$$

w postaci nieskracalnej jest podzielny przez p.

Rozwiązanie:
Skorzystamy ze znanego lematu $\frac{1}{k} \equiv (-1)^{k-1}\binom{p}{k}\frac{1}{p} \pmod{p}$. Mamy

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{(2i-1)(2i)} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{(2i-1)} - \frac{1}{2i}\right) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \frac{1}{p} = \frac{2^p - 2}{p} \pmod{p}.$$

Stąd teza.

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą nierówności

$$f(x)f(y) \geqslant f(xy),$$

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$$

dla dowolnych dodatnich liczb wymiernych x, y. Wykazać, że jeżeli $f(a) = a$ dla pewnej wymiernej liczby $a > 1$, to $f(x) = x$ dla wszystkich dodatnich liczb wymiernych x.

Rozwiązanie:

Niech $\mathbb{Q}_{>0}$ i $\mathbb{Z}_{>0}$ oznaczają odpowiednio zbiór dodatnich liczb wymiernich i zbiór dodatnich liczb całkowitych. Oznaczmy pierwszą nierówność z treści przez (1), a drugą przez (2). Podstawiając do pierwszej nierówności $x = 1, y = a$ dostajemy $f(1) \geqslant 1$. Ponadto za pomocą prostego rozumowania indukcyjnego dla (2) dostajemy $f(nx) \geqslant nf(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. W szczególności zachodzi $f(n) \geqslant nf(1) \geqslant n$. Korzystając z (1) dostajemy $f(m/n)f(n) \geqslant f(m)$, więc $f(q) > 0$ dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Wobec tego, korzystając z warunku (2) wnioskujemy, że f jest ściśle rosnąca. Wobec tego dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ mamy $f(x) \geqslant f(\lceil x \rceil) \geqslant \lceil x \rceil > x - 1$ Dzięki prostej indukcji z warunku (1) dostajemy $f(x)^n \geqslant f(x^n)$, więc $f(x)^n \geqslant f(x^n) > x^n - 1$, zatem dla $x > 1$ mamy $f(x) \geqslant \sqrt[n]{x^n - 1}$. W granicy przy $n \to \infty$ dostajemy $f(x) \geqslant x$ dla $x > 1$. Teraz zauważmy, że $a^n \geqslant f(a)^n \geqslant f(a^n) \geqslant a^n$. Teraz do $x > 1$ dobierzmy liczbę całkowitą dodatnią n spełniającą $a^n - x > 1$. Wówczas $a^n = f(a^n) \geqslant f(x) + f(a^n - x) \geqslant x + (a^n - x) = a^n$ a zatem $f(x) = x$ dla $x > 1$. Wreszcie dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ i $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mamy $nf(x) = f(n)f(x) \geqslant f(nx) \geqslant nf(x)$, skąd dostajemy $f(nx) = nf(x)$. Stąd dla $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mamy $f(m/n) = f(m)/n = m/n$, co należało dowieść.

3. Niech AD, BE, CF będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Niech proste l_1, l_2, l_3 będą symetrycznymi obrazami prostych EF, FD, DE odpowiednio względem prostych LM, MK, KL. Udowodnić, że proste l_1, l_2, l_3 wyznaczają trójkąt, którego wierzchołki leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie http://artofproblemsolving.com/community/c6h56931p351094.

4. Zbiór $\mathfrak{A}$ jest takim podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2\}^n$, że dla dowolnych różnych $a, b \in \mathfrak{A}$ istnieje takie $1 \leqslant i \leqslant n$, że $b_i \equiv a_i + 1 \pmod 3$. Wykazać, że $|\mathfrak{A}| \leqslant 2^n$.

Rozwiązanie:

Dla każdego $a \in \mathfrak{A}$ określamy wielomian n zmiennych

$$f_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + 1 - x_i)$$

nad ciałem trzyelementowym. Zauważmy, że każdy z wielomianów f_a jest kombinacją liniową wielomianów postaci $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$. Wobec tego wymiar podprzestrzeni rozpiętej przez wektory f_a wynosi co najwyżej 2^n. Zauważmy jednak, że dla dowolnych $a, b \in \mathfrak{A}$, gdzie $a \neq b$ mamy $f_a(b) = 0$ oraz $f_a(a) \neq 0$. Stąd wielomiany f_a są liniowo niezależne, czyli jest ich nie więcej niż wymiar podprzestrzeni rozpiętej przez te wielomiany, czyli $|\mathfrak{A}| \leqslant 2^n$.

Mecz Matematyczny

1. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 3$, że da się tak pokolorować przekątne i boki n-kąta foremnego używając n różnych kolorów, że dla dowolnych trzech parami różnych kolorów istnieje trójkąt o wierzchołkach w wierzchołkach wielokąta i bokach tych kolorów.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że dla pewnego n mamy takie kolorowanie. Zauważmy, że jest $\binom{n}{3}$ możliwych trójkątów i $\binom{n}{3}$ możliwych zestawów kolorów, zatem każdy zestaw kolorów musi wystąpić dokładnie raz. Weźmy pewien konkretny kolor c. Jest $\binom{n-1}{2}$ zestawów kolorów, które go zawierają, więc musi być też tyle trójkątów które go zawierają. Każda krawędź w kolorze c generuje dokładnie $n-2$ trójkątów zawierających ten kolor, zatem musi być dokładnie $\frac{\binom{n-1}{2}}{n-2} = \frac{n-1}{2}$ krawędzi w tym kolorze. Dla n parzystego daje nam to od razu sprzeczność.

Rozważmy teraz n nieparzyste i nadajmy naszym wierzchołkom numery $0, 1, \ldots, n-1$. Rozważmy kolorowanie, które krawędzi (i, j) przypisuje kolor $i + j \pmod n$. Wykażemy, że to kolorowanie spełnia warunki zadania. Załóżmy, że pewne dwa trójkąty mają ten sam zestaw kolorów. Istnieją więc takie permutacje ich wierzchołków (x_1, x_2, x_3) oraz (y_1, y_2, y_3), że pary krawędzi (x_i, x_j) oraz (y_i, y_j) dla $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ mają ten sam kolor. Mamy więc $x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \pmod n$, $x_1 + x_3 \equiv y_1 + y_3 \pmod n$, $x_2 + x_3 \equiv y_2 + y_3 \pmod n$. Dodając dwie pierwsze z tych równości i odejmując trzecią, otrzymujemy $2x_1 \equiv 2y_1 \pmod n$. Wykorzystując nieparzystość n, dostajemy więc $x_1 \equiv y_1 \pmod n$. Analogicznie pokazujemy $x_2 \equiv y_2 \pmod n$ i $x_3 \equiv y_3 \pmod n$, zatem te dwa trójkąty muszą być równe.

2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że wielomian

$$W_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty, gdy n jest liczbą nieparzystą i nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdy n jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie Zauważmy, że $W'_{n+1}(x) = W_n(x)$. Tezę zadania udowodnimy indukcyjnie. Dla $n = 0$ teza jest prawdziwa. Dla $n > 0$, jest n jest nieparzyste, to z założenia indukcyjnego wiemy, że $W'_n(x) = W_{n-1}(x) > 0$, więc W_n jest ściśle rosnący, co oznacza, że ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Z kolei dla n parzystego, na mocy założenia indukcyjnego W_{n-1} ma jeden pierwiastek rzeczywisty - nazwijmy go x_0. Skoro $W'_n(x) = W_{n-1}(x)$, oraz W_{n-1} jest ściśle rosnący, to W_n jest malejący na przedziale $(-\infty, x_0]$ oraz rosnący na przedziale $[x_0, +\infty)$. Ale $W_n(x_0) = W_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} > 0$. Wobec tego $W_n(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

3. Alicja i Bob grają w grę na szachownicy $n \times n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Alicja stawia kółka, a Bob krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w

lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym jest krzyżyk. Zaczyna Alicja. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gdy gracz nie może wykonać ruchu, to traci go. Gra kończy się, gdy żaden z graczy nie może wykonać ruchu. Grę wygrywa ten gracz, który wykonał więcej ruchów. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Skoro n jest nieparzyste, to zawsze któryś z graczy wygrywa. Gdyby istniała strategia wygrywająca dla Boba, to Alicja mogłaby zapewnić sobie zwycięstwo kopiując strategię Boba, tzn. wykonując dowolny pierwszy ruch, a następnie ruchy wykonywać zgodnie ze strategią Boba, zapominając o pierwszym ruchu. Zatem strategię wygrywającą ma Alicja.

4. Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a, b > n$ takie, że liczby $a, b, a + b$ są jednego koloru.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy nie wprost, że nie istnieją takie liczby $a, b > n$, że a, b i $a + b$ są jednego koloru. Nazwijmy kolory czerwony i niebieski. Bez straty ogólności niech $n + 1$ będzie czerwone. Istnieją co najmniej 2 liczby czerwone większe od $2n + 2$, w przeciwnym wypadku od pewnego momentu wszystkie liczby byłyby niebieskie i teza byłaby spełniona. Niech $a > b$ będą liczbami czerwonymi i niech $b > 2n + 2$. Zatem liczby $b + a, b - (n + 1), (n + 1) + a$ są niebieskie i wszystkie różne. Jednak $(b - (n + 1)) + ((n + 1) + a) = b + a$, czyli istnieje niebieska trójka złożona z liczb większych od n. Sprzeczność.

5.

Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wyrażenie po lewej stronie jest funkcją wypukłą zmiennej a. Zatem aby je zmaksymalizować, wystarczy rozważyć przypadki $a = 0$ oraz $a = 1$. To samo dotyczy zmiennych b i c, co daje nam łącznie 8 przypadków do sprawdzenia. Pozostawiamy wytrwałemu czytelnikowi zweryfikowanie, że wszystkie działają.

6. Dana jest dodatnia liczba parzysta n i niezerowe liczby całkowite $k_0, k_1, \ldots, k_n$ takie, że $k_0 + k_1 + \ldots + k_n \neq 0$. Rozstrzygnąć, czy zawsze jest możliwe wybranie takiej permutacji $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ciągu $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$, że wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności, załóżmy, że współczynnik a_n ma największą wartość bezwzględną, tzn. $|k_n| \geqslant |k_i|$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Skoro $k_0+k_1+\ldots+k_n \neq 0$, to $k_n \neq 0$ Wykażemy, że można tak przepermutować pozostałe wyrazy ciągu $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$, aby otrzymać wielomian bez pierwiastków całkowitych. Załóżmy nie wprost, że dla dowolnej permutacji $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ ciągu $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ wielomian

$$P(x) = k_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

nie ma pierwiastków całkowitych. Wówczas dla x takich, że $|x| \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned} P(x) &= |k_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| \\ &\geqslant |k_n x^n| - |a_{n-1}x^{n-1}| - |a_{n-2}x^{n-2}| - \ldots - |a_0| \\ &\geqslant |k_n x^n| - |k_n x^{n-1}| + |k_n x^{n-2}| - \ldots - |k_n| \\ &= |k_n|(|x|^n - |x|^{n-1} - \ldots - 1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Zatem jedyne pierwiastki jakie pozostaje rozważyć to $-1, 0, 1$. Biorąc pod uwagę, że $k_0 + k_1 + \ldots + k_n \neq 0$, możemy wykluczyć 0 oraz 1, więc jedynym pierwiastkiem całkowitym wielomianu jest -1. Skoro jednak możemy dowolnie permutować wyrazy $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$, to musi być tak, że $k_0 = k_1 = \ldots = k_{n-1}$. To jednak implikuje $P(-1) = k_n \neq 0$ – sprzeczność.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieją parami różne liczby całkowite a, b, c takie, że

$$a^{2016} + b^{2016} = c^{2017}.$$

Rozwiązanie:

Tak, takie liczby istnieją: $a = 2(2^{2016} + 3^{2016}), b = 3(2^{2016} + 3^{2016}), c = (2^{2016} + 3^{2016})$.

8. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że od pewnego momentu wszystkie wyrazy ciągu

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

dają tę samą resztę przy dzieleniu przez n.

Rozwiązanie:

Ciąg z treści można zdefiniować formułą rekurencyjną: $a_1 = 2$ oraz $a_{i+1} = 2^{a_i}$ dla $i \geqslant 1$. Zdefiniujmy ponadto pomocniczy ciąg $\{b_k\}$, gdzie b_1 jest największym nieparzystym dzielnikiem n, a dla $i \geqslant 1$ b_{i+1} jest największym nieparzystym dzielnikiem $\phi(b_i)$ (gdzie $\phi(m)$ oznacza liczbę liczb naturalnych mniejszych od m względnie pierwszych z m).

Chcemy pokazać, że dla dowolnie dużych m zachodzi $a_{m+1} \equiv a_m \pmod{n}$. Zapiszmy n w postaci $2^{k_1}b_1$, gdzie k_1 jest liczbą naturalną. Na mocy Chińskiego Twierdzenia o resztach wystarczy wykazać, że

$$\begin{cases} a_{m+1} & \equiv a_m \pmod{2^{k_1}}, \\ a_{m+1} & \equiv a_m \pmod{b_1}. \end{cases}$$

Dla odpowiednio dużych m zarówno a_m jak i a_{m+1} są takimi potęgami dwójki, że $a_{m+1} \equiv 0 \equiv a_m \pmod{2^{k_1}}$. Pozostaje więc wykazać, że dla odpowiednio dużych m zachodzi $a_{m+1} \equiv a_m \pmod{b_1}$. Z Twierdzenia Eulera, skoro b_1 jest względnie pierwsze z 2, to $2^{\phi(b_1)} \equiv 1 \pmod{b_1}$, więc

$$a_m = 2^{a_{m-1}} \equiv 2^{a_{m-1} \mod \phi(b_1)} \pmod{b_1}.$$

Chcemy więc wykazać, że $a_m \equiv a_{m-1} \pmod{\phi(b_1)}$. Skoro $\phi(b_1) = 2^{k_2} b_2$, to wystarczy wykazać, że

$$\begin{cases} a_m & \equiv a_{m-1} \pmod{2^{k_2}}, \\ a_m & \equiv a_{m-1} \pmod{b_2}. \end{cases}.$$

Ponownie dla odpowiednio dużych m mamy $a_m \equiv 0 \equiv a_{m-1} \pmod{2^{k_1}}$, więc wystarczy wykazać, że $a_m \equiv a_{m-1} \pmod{b_2}$. Kontynuując rozumowanie aż do takiego i, że $b_i = 1$ dostajemy, że wystarczy pokazać, że dla odpowiednio dużych m zachodzi $a_{m+1-i} \equiv a_{m-i} \pmod{b_i}$, co jest oczywiście prawdą dla $m > i$. Wobec tego dla odpowiednio dużych m mamy $a_{m+1} \equiv a_m \pmod{n}$, co należało dowieść.

9. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki przekątnych AD, BE, CF. Przyjmijmy najpierw, że dwa spośród punktów P, Q, R pokrywają się; niech na przykład $P = Q$. Wtedy czworokąt $ABDE$ jest równoległobokiem. Ponadto trójkąt ACE jest przystający do trójkąta DFB, skąd wynika, że $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BDF$. Równość ta wraz z uzyskaną zależnością $BD \parallel EA$ dowodzi, że odcinki AC i DF są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, a zatem czworokąt $ACDF$ jest równoległobokiem. Punkt R pokrywa się więc z punktami P i Q, skąd wynika, że jest on środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$. Pozostaje zauważyć, że wówczas proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ przechodzą przez jego środek symetrii.

Przyjmijmy z kolei, że punkty P, Q i R są różne. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków AB i DE. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że odcinki PN i AE są równoległe, a ponadto $PN = \frac{1}{2}EA$. Analogicznie uzyskujemy związki $QN = \frac{1}{2}BD$, $QM = \frac{1}{2}EA$ oraz $PM = \frac{1}{2}BD$. Z zależności tych oraz z równości $AE = BD$ wnioskujemy, że $PN = QM = PM = QN$, co oznacza, że czworokąt $MPNQ$ jest rombem. Zatem prosta MN jest symetralną odcinka PQ. Analogicznie dowodzimy, że pozostałe dwie proste łączące środki przeciwległych boków danego sześciokąta są symetralnymi odcinków QR i RP. Stąd proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ mają punkt wspólny, będący środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR. □

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC,

CD, DA, przy czym czworokąt $KLMN$ jest rombem. Udowodnić, że punkt O leży na prostej KM.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki odcinków AD, BC, KM. Wówczas punkty P, Q i R leżą na jednej prostej – równoległej do podstaw trapezu $ABCD$. Przez punkt L poprowadźmy prostą równoległą do podstaw trapezu $ABCD$, przecinającą odcinek AD w punkcie S. Ponieważ punkt R jest środkiem przekątnej KM rombu $KLMN$, więc jest on również środkiem drugiej przekątnej tego rombu, czyli odcinka NL. Zatem z równoległości prostych PR i SL wnioskujemy, że $NP = PS$. Punkt P jest środkiem odcinka AD, więc $OP \perp AD$. Ta własność, równość $NP = PS$ oraz fakt, iż punkt O leży na symetralnej odcinków AB, CD i LS dają $ON = OS = OL$. Stąd wynika, że punkt O leży symetralnej odcinka NL, czyli na prostej KM. $\square$

11. Wewnątrz wielokąta wypukłego $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że jego rzuty P_1, $P_2, \ldots, P_n$ odpowiednio na proste A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_nA_1$ znajdują się wewnątrz boków wielokąta. Dowieść, że dla dowolnych punktów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ leżących odpowiednio wewnątrz odcinków A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_nA_1$ zachodzi nierówność

$$\max\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$P_iP_{i+1} = X_iX_{i+1}.\frac{PA_i}{2R_{A_iX_iX_{i+1}}},$$

gdzie R_{XYZ} oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie XYZ. Pokażemy, że dla pewnego k punkt P leży wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie $A_kX_kX_{k+1}$. Istotnie załóżmy, że nie istnieje takie k. Wtedy $\sphericalangle X_iPX_{i+1} < 180 - \sphericalangle X_iA_iX_{i+1}$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$. Więc

$$360^\circ = \sum_{i=1}^{n} \sphericalangle X_iPX_{i+1} < \sum_{i=1}^{n} 180^\circ - \sphericalangle X_iA_iX_{i+1} = 360^\circ,$$

Sprzeczność. Biorąc k jak wyżej wiemy, że $PA_k \leqslant 2R_{A_kX_kX_{k+1}}$, więc $\dfrac{X_kX_{k+1}}{P_kP_{k+1}} \geqslant 1$. $\square$

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

   Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo −10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści

Treści zadań **6**
Zawody indywidualne grupy starszej 6
Zawody indywidualne super grupy 8
Mecz Matematyczny 10

Rozwiązania **12**
Zawody indywidualne grupy starszej 12
Zawody indywidualne super grupy 19
Mecz Matematyczny 27

Regulamin Meczu Matematycznego **32**