Moje zadania (My problems)
(21-07-2021 14:06)

Dominik Burek

Spis treści

1. OM Polish Mathematical Olympiad

Zadanie 1 (65 OM, 1 etap)**.** Dane są trzy różne liczby całkowite $a, b, c > 1$ spełniające warunek $\mathrm{NWD}(a, b, c) = 1$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby

$$\mathrm{NWD}(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c).$$

Let $a, b, c > 1$ be distinct integers such that $\gcd(a, b, c) = 1$. Find all possible values of

$$\gcd(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c).$$

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2

Zadanie 2 (65 OM, 1 etap)**.** Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek

$$f(a + b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a + b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b.

Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that

$$f(a + b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a + b)$$

for all integers a, b.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 5

Zadanie 3 (65 OM, 1 etap)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem odcinka EF. Okrąg o średnicy MD przecina okrąg o w punktach D i P oraz przecina odcinek EF w punktach M i Q. Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek AM.

Let ABC be a triangle with $AB \neq AC$. The incricle o is tangent to sides BC, CA, AB at points D, E, and F, respectively. Suppose that M is the midpoint *of segment EF. Circle with diameter MD intersects o at points D and P, and moreover intersects segment EF at M and Q. Prove that PQ bisects segment AM.*

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 11

Zadanie 4 (65 OM, 2 etap)**.** Okręgi o_1 i o_2, styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punktach X i Y, przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y. Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X. Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q. Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

Circles o_1 and o_2 tangent to some line at points A and B, respectively, intersect at points X and Y (X is closer to the line AB). Line AX intersects o_2 at point $P \neq X$. Tangent to o_2 at point P intersects line AB at point Q. Prove that $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 5

Zadanie 5 (65 OM, 3 etap)**.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

In acute triangle ABC, segment AD is a height. Points M and N are foot of perpendiculars from D to AB and AC, respectively. Lines MN and AD intersect circumcircle of ABC at points P, Q and A, R, respectively. Prove that D is incenter of triangle PQR.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 6

Zadanie 6 (66 OM, 1 etap)**.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF, a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN. Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

Let ABC be an acute triangle in which $AB \neq AC$. Segments BE and CF are its altitudes. Let M and N be midpoints of BC and EF, respectively and denote by Q the circumcenter of triangle AMN. Prove that AQ and BC are parallel.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 4

Zadanie 7 (66 OM, 1 etap)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C, a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

Let ABC be a triangle with right angle in C. Suppose that CD is its altitude and incircle is tangent to AB and AC at E and F, respectively. Prove that orthocenter of triangle AEF coincide with incenter of triangle ACD.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 6

Zadanie 8 (66 OM, 1 etap)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC < CA < AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F, a punkty K, L i M są środkami odpowiednio boków BC, CA i AB. Proste DE i KL przecinają się w punkcie P, a proste DF i KM – w punkcie Q. Dowieść, że punkty A, P i Q leżą na jednej prostej.

Let ABC be a triangle in which $BC < CA < AB$. Suppose that its incircle is tangent to BC, CA and AB at D, E and F, respectively. Moreover, denote by K, L and M midpoints of BC, CA and AB, respectively. Lines DE and KL intersect at P, while lines DF and KM intersect at Q. Prove that A, P and Q are collinear.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 11

Zadanie 9 (67 OM, 1 etap)**.** W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Let I be incenter of triangle ABC. Let AI intersects segment BC at D. Perpendicular bisector of segment AD intersects BI and CI at P and Q, respectively. Prove that point I is an orthocenter of triangle PQD.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 8

Zadanie 10 (67 OM, 3 etap)**.** Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L – w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL. Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

Let I be an incenter of triangle ABC. Suppose that AI intersects BC and circumcircle of triangle ABC at D and $S \neq A$, respectively. Let K, and L be incenters of triangles DSB, and DCS. Let P be a reflection of I with the respect to KL. Prove that $BP \perp CP$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 6

Zadanie 11 (68 OM, 1 etap)**.** Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD, BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.

Segments AD and BE are altitudes of an acute triangle BC. Let M be the midpoint of AB. Points P and Q are symmetric to M with respect to AD and BE, respectively. Prove that midpoint of DE lies on PQ.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3

Zadanie 12 (68 OM, 1 etap)**.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E. Prosta równoległa do prostej AE, przechodząca przez punkt C, przecina odcinek AD w punkcie F. Dowieść, że $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD$.

Let $ABCD$ be a trapezoid with bases AB and CD. Let perpendicular bisector of AD intersects BC at E. Suppose that line parallel to AE passing through C, intersects AD at F. Prove that $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 7

Zadanie 13 (68 OM, 1 etap)**.** Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB, a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a N – środkiem odcinka AC. Proste MF, EN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD.

Let AD be the altitude of an acute triangle ABC. Points E and F are feet of perpendiculars dropped from D to AB and AC, respectively. M and N are midpoints of segments AB and AC. Lines MF and EN intersect each other at S. Prove that circumcenter of ABC lies on SD.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 11

Zadanie 14 (68 OM, 2 etap)**.** W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

In an acute triangle ABC the bisector of angle BAC intersects BC at D. Points P and Q are orthogonal projections of D on lines AB and AC. Prove that APQ and $BCQP$ have equal areas if and only if the circumcenter of ABC lies on PQ.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 15 (68 OM, 3 etap)**.** Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym spełniona jest równość $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie S różnym od R. Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC.

Let ABC be a triangle. Points P and Q lie on the sides AB and AC, respectively, such that $BP = CQ$. Segments BQ and CP intersect each other at R. The circumcircles of triangles BPR and CQR intersect each other again at a point S distinct from R. Prove that S lies on the bisector of angle BAC.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 1

Zadanie 16 (68 OM, 3 etap, KVANT M2624)**.** Liczby całkowite a_1, a_2, $\ldots$, a_n spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2a_1.$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1a_2\ldots a_n$, to

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m.$$

Integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfy

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2a_1.$$

If m is the number of distinct prime factors of $a_1a_2\ldots a_n$, then prove that

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m.$$

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3

Zadanie 17 (69 OM, 1 etap)**.** Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Przyjmując $A_4 = A_1$ oraz $A_5 = A_2$, definiujemy punkty X_t oraz Y_t dla $t = 1, 2, 3$ następująco. Niech Γ_t będzie okręgiem dopisanym do trójkąta $A_1A_2A_3$ i stycznym do boku $A_{t+1}A_{t+2}$, zaś I_t będzie jego środkiem. Niech P_t i Q_t będą odpowiednio punktami styczności Γ_t z prostymi A_tA_{t+1} oraz A_tA_{t+2}. Wówczas X_t i Y_t są odpowiednio punktami przecięcia prostej P_tQ_t z prostymi I_tA_{t+1} oraz I_tA_{t+2}. Wykazać, że punkty X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3 leżą na jednym okręgu.

Let $A_1A_2A_3$ be a triangle. Assuming $A_4 = A_1$ and $A_5 = A_2$, define points X_t and Y_t for $t = 1, 2, 3$ in the following way: Let Γ_t be the excircle of triangle $A_1A_2A_3$ tangent to $A_{t+1}A_{t+2}$, and let I_t be its centre. Let P_t and Q_t denotes tangency points of Γ_t with A_tA_{t+1} and A_tA_{t+2}, respectively. Then X_t and Y_t are points of intersection of P_tQ_t with lines I_tA_{t+1} and I_tA_{t+2}, respectively. Prove that X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3 lie on one circle.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 11

Zadanie 18 (69 OM, 2 etap)**.** Dana jest dodatnia liczba całkowita n, która z dzielenia przez 8 daje resztę 4. Liczby

$$1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = n$$

są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n. Udowodnić, że jeśli liczba $1 \leqslant i \leqslant m - 1$ nie jest podzielna przez 3, to $k_{i+1} \leqslant 2k_i$.

Let n be a positive integer, which gives remainder 4 of dividing by 8. Numbers $1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = n$ are all positive divisors of n. Show that if $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ isn't divisible by 3, then $k_{i+1} \leqslant 2k_i$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 19 (69 OM, 2 etap)**.** Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q, przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC. Punkt S jest środkiem odcinka AQ. Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

The perpendicular bisector of side BC intersects circumcircle of triangle ABC at points P and Q (points A and P lie on the same side of line BC). Point R is an orthogonal projection of a point P on line AC. Point S is the midpoint of AQ. Prove that points A, B, R, S lie on one circle.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 20 (69 OM, 2 etap)**.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD. Udowodnić, że okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC.

Let $ABCD$ be a trapezoid with bases AB and CD. Circle with diameter BC is tangent to line AD. Prove, that circle with diameter AD is tangent to line BC.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 4

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 21 (69 OM, 3 etap)**.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

Let ABC be an acute triangle in which $AB < AC$. The bisector of angle BAC intersects BC at D. Point M is the midpoint of BC. Prove that the line passing through centers of circumcircles of triangles ABC and ADM is parallel to AD.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 1

Zadanie 22 (70 OM, 1 etap)**.** Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

Let H be the orthocenter of aa scalene triangle ABC. Let S be the midpoint of arc BC of circumcircle of triangle BCH, which does not contain H. Find the angle BAC under the condition $AH = AS$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2

Zadanie 23 (70 OM, 1 etap)**.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą na ramionach BC i AD, przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.

Let $ABCD$ be a trapezoid with bases AB and CD. Let P and Q be points on segments BC and AD such that $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ and $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Prove that perpendicular bisector of PQ passes through the intersection point of diagonals of $ABCD$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 7

Zadanie 24 (70 OM, 1 etap)**.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, dla których w pola kwadratowej tablicy o wymiarach $n \times n$ można tak wpisać parami różne kwadraty liczb całkowitych, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie tablicy była kwadratem liczby całkowitej oraz te $2n$ sum było parami różnych.

Find all integers $n \geqslant 1$, for which there exists a table $n \times n$ whose entries contain pairwise distinct perfect squares, sum of numbers in any column and row is a perfects square and these $2n$ sums are pairwise distinct.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 8

Zadanie 25 (70 OM, 2 etap)**.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K_1, K_2 leżą wewnątrz boku AB, punkty L_1, L_2 leżą wewnątrz boku BC, punkty M_1, M_2 leżą wewnątrz boku CD, oraz punkty N_1, N_2 leżą wewnątrz boku DA, przy czym punkty K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2 są parami różne i leżą w tej kolejności na jednym okręgu ω. Niech a, b, c, d będą odpowiednio długościami łuków N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1, M_2N_1 okręgu ω, nie zawierających punktów K_2, L_2, M_2, N_2 odpowiednio. Wykazać, że $a + c = b + d$.

A cyclic quadrilateral $ABCD$ is given. Points K_1, K_2 lie on the segment AB, points L_1, L_2 on the segment BC, points M_1, M_2 on the segment CD and points N_1, N_2 on the segment DA. Moreover, points K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2 lie on a circle ω in that order. Denote by a, b, c, d the lengths of the arcs N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1, M_2N_1 of the circle ω not containing points K_2, L_2, M_2, N_2, respectively. Prove that $a + c = b + d$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 1

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 26 (70 OM, 2 etap)**.** Dane są takie dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 3$), że nie istnieje liczba całkowita $m > 1$ dzieląca każdą z nich. Ponadto, jeśli oznaczymy $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, to każda z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dzieli s. Udowodnić, że liczba s^{n-2} jest podzielna przez $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 3$) be positive integers such that $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ and for each $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ we have $a_i \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Prove that $a_1 a_2 \ldots a_n$ divides $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{n-2}$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 4

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 27 (70 OM, 2 etap)**.** Punkt X leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym

$$\sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle XAC = 2\sphericalangle ACX.$$

Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt A. Dowieść, że $XM = XA$.

Let X be a point lying in the interior of the acute triangle ABC such that

$$\sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA \qquad \textit{and} \qquad \sphericalangle XAC = 2\sphericalangle ACX.$$

Denote by M the midpoint of the arc BC of the circumcircle ABC containing A. Prove that $XM = XA$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 6

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 28 (70 OM, 3 etap)**.** Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC. Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P. Dowieść, że punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu.

Let ABC be an acute triangle. Points X and Y lie on the segments AB and AC, respectively, such that $AX = AY$ and the segment XY passes through the orthocenter of the triangle ABC. Lines tangent to the circumcircle of the triangle

AXY at points X and Y intersect at point P. Prove that points A, B, C, P are concyclic.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 1

Zadanie 29 (70 OM, 3 etap)**.** Dane są dodatnie liczby całkowite n, k, ℓ oraz taka różnowartościowa funkcja σ o argumentach i wartościach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$, że dla każdej liczby $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liczba $\sigma(x) - x$ jest równa k lub $-\ell$. Dowieść, że liczba n jest podzielna przez $k + \ell$.

Let n, k, ℓ be positive integers and $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ an injection such that $\sigma(x) - x \in \{k, -\ell\}$ for all $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prove that $k + \ell \mid n$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 4

Zadanie 30 (71 OM, 1 etap)**.** Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg Ω. Punkt M jest środkiem tego łuku CD okręgu Ω, na którym nie leży punkt A. Niech ω będzie okręgiem o środku M stycznym do prostej AD. Punkt X jest jednym z punktów przecięcia prostej CD z okręgiem ω. Udowodnić, że prosta styczna do okręgu ω w punkcie X przechodzi przez środek odcinka AB.

Let $ABCD$ be a trapezoid with bases AB, CD and with circumscribed circle Ω. Let M be the midpoint of arc CD of Ω, which does not contain A. Consider circle ω with centre M and tangent to line AD. Let X be an intersection point of ω and CD. Prove that tangent to ω at X bisects segment AB.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 4

Zadanie 31 (71 OM, 1 etap)**.** Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, przy czym $BC = 2AB$. Symetralna boku BC oraz dwusieczna kąta DCB przecinają się w punkcie X. Wykazać, że proste AX i BD są prostopadłe.

Let $ABCD$ be a circumscribed quadrilateral with $BC = 2AB$. Suppose that perpendicular bisector of BC and bisector of angle DCB intersect at X. Prove that AX and BD are perpendicular.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 9

Zadanie 32 (71 OM, 2 etap)**.** Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D. Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E. Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Pokazać, że punkt F leży na dwusiecznej kąta BAC.

Let M be a midpoint of side BC of an acute triangle ABC. Suppose that incircle of triangle ABM touches AB at D and incircle of triangle ACM touches AC at E. Let F be a point such that $DMEF$ is parallelogram. Prove that F lies on bisector of angle BAC.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 33 (72 OM, 1 etap)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt X leży na odcinku AB, punkt Y leży na prostej ℓ, przy czym $AX = AY = AC$ oraz punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC. Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na prostej XY.

Let ABC be a triangle with $AB > AC$. Let ℓ be a line tangent to circumcircle of ABC at A. Point X lies on segment AB, and Y lies on ℓ, such that $AX = AY = AC$, adn X, Y lie on the opposite sites of bisector of angle BAC. Prove that incenter of triangle ABC lies on XY.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2

Zadanie 34 (72 OM, 1 etap)**.** Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

Let n be a positive integer which does not have any divisor d satisfying $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Prove that n has a prime divisor $p > \sqrt[3]{n^2}$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3

Zadanie 35 (72 OM, 1 etap)**.** Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta BI przecina AC w punkcie D. Punkt D jest środkiem odcinka IX. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX. Pokazać, że proste OD i AC są prostopadłe.

Let ABC be isosceles triangle with $AB = AC$. Let I be the incenter of ABC. Line BI intersects AC at D. Point D is the midpoint of IX. Let O be circumcenter of triangle BCX. Prove that lines OD and AC are perpendicular.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 5

Zadanie 36 (72 OM, 1 etap)**.** Dane są takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach rzeczywistych, że suma dowolnych dwóch z nich nie ma pierwiastka rzeczywistego. Udowodnić, że jeśli wielomian $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ ma pierwiastek rzeczywisty, to co najmniej jeden z wielomianów f_1, f_2, f_3, f_4 nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Let f_1, f_2, f_3, f_4 be real polynomials such that sum of any two does not have a real root. Prove that if polynomial $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ has a real root, then at least one polynomial among f_1, f_2, f_3, f_4 does not have any real root.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 8

Zadanie 37 (72 OM, II etap)**.** Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

Let P be a point on segment CD of the parallelogram $ABCD$ such that $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Let O denotes the centre of the circle passing through D, P which is tangent to AD at D. Prove that $AO = OC$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2

Zadanie 38 (72 OM, III etap)**.** Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \dots, p_k$.

Let p_i for $i = 1, 2, \dots, k$ be a sequence of smallest consecutive prime numbers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 3$ etc.). Let $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Prove that in a set $\{1, 2, \dots, N\}$ there exist exactly $\frac{N}{2}$ numbers which are divisible by odd number of primes p_i.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 1

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 39 (72 OM, III etap)**.** Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Dla każdej pary liczb całkowitych i, j spełniających $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ dana jest liczba rzeczywista $f(i, j)$, przy czym spełnione są warunki:

- $f(i, i) = 0$ dla wszystkich liczb całkowitych i spełniających $0 \leqslant i \leqslant n$;
- $0 \leqslant f(i, l) \leqslant 2 \max(f(i, j), f(j, k), f(k, l))$ dla wszystkich liczb całkowitych i, j, k, l spełniających $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant l \leqslant n$.

Udowodnić, że

$$f(0, n) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} f(k-1, k).$$

Let n be an integer. For pair of integers $0 \leqslant i, j \leqslant n$ there exist real number $f(i,j)$ such that:

- *$f(i,i) = 0$ for all integers $0 \leqslant i \leqslant n$*
- *$0 \leqslant f(i,l) \leqslant 2\max\{f(i,j), f(j,k), f(k,l)\}$ for all integers i, j, k, l satisfying $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant l \leqslant n$.*

Prove that

$$f(0,n) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} f(k-1,k).$$

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 2
Dyskusja/Discussion: AoPS

2. IMO(International Mathematical Olympiad)

Zadanie 40 (IMO 2020)**.** Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$. Punkt P znajduje się wewnątrz $ABCD$. Spełnione są następujące dwie równości proporcji:

$$\sphericalangle PAD : \sphericalangle PBA : \sphericalangle DPA = 1 : 2 : 3 = \sphericalangle CBP : \sphericalangle BAP : \sphericalangle BPC.$$

Wykazać, że następujące trzy proste przecinają się w jednym punkcie: dwusieczne kątów wypukłych $\sphericalangle ADP$ oraz $\sphericalangle PCB$ oraz symetralna odcinka AB.

Consider the convex quadrilateral $ABCD$. The point P is in the interior of $ABCD$. The following ratio equalities hold:

$$\sphericalangle PAD : \sphericalangle PBA : \sphericalangle DPA = 1 : 2 : 3 = \sphericalangle CBP : \sphericalangle BAP : \sphericalangle BPC.$$

Prove that the following three lines meet in a point: the internal bisectors of angles $\sphericalangle ADP$ and $\sphericalangle PCB$ and the perpendicular bisector of segment AB.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem P1

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 41 (IMO 2021)**.** Niech Γ będzie okręgiem o środku I, a $ABCD$ takim czworokątem wypukłym, że każdy z odcinków AB, BC, CD, DA jest styczny do okręgu Γ. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie AIC. Półprosta $\overrightarrow{BA}$ przecina okrąg Ω w punkcie X leżącym poza odcinkiem AB, a półprosta $\overrightarrow{BC}$ przecina okrąg Ω w punkcie Z leżącym poza odcinkiem BC. Półproste $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CD}$ przecinają okrąg Ω odpowiednio w punktach Y i T, leżących poza odcinkami AD i CD. Udowodnić, że

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Let Γ be a circle with centre I, and $ABCD$ a convex quadrilateral such that each of the segments AB, BC, CD and DA is tangent to Γ. Let Ω be the circumcircle of the triangle AIC. The extension of BA beyond A meets Ω at X, and the extension of BC beyond C meets Ω at Z. The extensions of AD and CD beyond D meet Ω at Y and T, respectively. Prove that

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem P4

Dyskusja/Discussion: AoPS

3. IMO SL(IMO Shortlist problems)

Zadanie 42 (IMO SL 2020)**.** Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA tak, że $KLMN$ jest rombem oraz $KL \parallel AC$ i $LM \parallel BD$. Niech ω_A, ω_B, ω_C, ω_D będą okręgami wpisanymi w trójkąty ANK, BKL, CLM, DMN, odpowiednio. Udowodnić że styczne wewnętrzne okręgów ω_A, i ω_C oraz styczne wewnętrzne okręgów ω_B i ω_D przecinają się w jednym punkcie.

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Points K, L, M, N are chosen on AB, BC, CD, DA such that $KLMN$ is a rhombus with $KL \parallel AC$ and $LM \parallel BD$. Let ω_A, ω_B, ω_C, ω_D be the incircles of triangles ANK, BKL, CLM, DMN. Prove that the common internal tangents to ω_A, and ω_C and the common internal tangents to ω_B and ω_D are concurrent.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem G5

Dyskusja/Discussion: AoPS

4. EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad)

Zadanie 43 (EGMO 2019)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt D leży na odcinku BC i spełnia $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$. Okrąg ω jest styczny do prostej AC w punkcie A oraz przechodzi przez punkt I. Punkt X ($X \neq A$) jest drugim punktem przecięcia okręgu ω oraz okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że dwusieczne kątów DAB oraz CXB przecinają się na prostej BC.

Let ABC be a triangle such that $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$, and let I be its incentre. Let D be the point on segment BC such that $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$. Let ω be the circle tangent to AC at A and passing through I. Let X be the second point of intersection of ω and the circumcircle of ABC. Prove that the angle bisectors of $\sphericalangle DAB$ and $\sphericalangle CXB$ intersect at a point on line BC.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3

Dyskusja/Discussion: AoPS

5. MEMO (Middle European Mathematical Olympiad)

Zadanie 44 (MEMO 2016)**.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio boków BC, CA, AB. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta g, która przechodzi przez środek odcinka ID i jest prostopadła do prostej IK przecina prostą LM w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle PIA = 90°$.

Let ABC be a triangle for which $AB \neq AC$. Points K, L, M are the midpoints of the sides BC, CA, AB. The incircle of ABC with center I is tangent to BC in D. A line passing through the midpoint of ID perpendicular to IK meets the line LM in P. Prove that $\sphericalangle PIA = 90°$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem T6

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 45 (MEMO 2017)**.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieje taka permutacja $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ liczb $0, 1, \ldots, n-1$, że następujące n liczb

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

daje parami różne reszty z dzielenia przez n.

Determine all integers $n \geqslant 2$ such that there exists a permutation $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ of the numbers $0, 1, \ldots, n-1$ with the property that the n numbers

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

are pairwise distinct modulo n.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem T7

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 46 (MEMO 2019)**.** Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Powiemy, że wierzchołek A_i (dla $1 \leqslant i \leqslant n$) wielokąta wypukłego $A_1A_2\ldots A_n$ jest *bohemski*, jeśli jego odbicie względem środka odcinka $A_{i-1}A_{i+1}$ (przyjmujemy $A_0 = A_n$ i $A_{n+1} = A_1$) leży wewnątrz lub na obwodzie wielokąta $A_1A_2\ldots A_n$. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą możliwą liczbę bohemskich wierzchołków, jaką może mieć wypukły n-kąt.

Let $n \geqslant 3$ be an integer. We say that a vertex A_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) of a convex polygon $A_1A_2\ldots A_n$ is Bohemian if its reflection with respect to the midpoint of the segment $A_{i-1}A_{i+1}$ (with $A_0 = A_n$ and $A_{n+1} = A_1$) lies inside or on the boundary of the polygon $A_1A_2\ldots A_n$. Determine the smallest possible number of Bohemian vertices a convex n-gon can have (depending on n).

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem I2

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 47 (MEMO 2019)**.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Niech D będzie punktem przecięcia symetralnej boku BC z bokiem AC. Niech P będzie punktem na krótszym łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC, takim że $DP \parallel BC$. Wreszcie, niech M będzie środkiem boku AB. Wykazać, że $\sphericalangle APD = \sphericalangle MPB$.

Let ABC be an acute-angled triangle such that $AB < AC$. Let D be the point of intersection of the perpendicular bisector of the side BC with the side AC. Let P be a point on the shorter arc AC of the circumcircle of the triangle ABC such that $DP \parallel BC$. Finally, let M be the midpoint of the side AB. Prove that $\sphericalangle APD = \sphericalangle MPB$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem T5

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 48 (MEMO 2019)**.** Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B, wpisany w okrąg ω. Oznaczmy przez D środek krótszego łuku AB okręgu c. Niech P będzie takim punktem na boku AB, że $CP = CD$ oraz niech X i Y będą różnymi punktami na okręgu ω spełniającymi równości $AX = AY = PD$. Dowieść, że punkty X, Y i P są współliniowe.

Let ABC be a right-angled triangle with its right angle at B and circumcircle c. Denote by D the midpoint of the shorter arc AB of c. Let P be the point on the side AB such that $CP = CD$ and let X and Y be two distinct points on c satisfying $AX = AY = PD$. Prove that the points X, Y, and P are collinear.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem T6

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 49 (MEMO 2019)**.** Niech a, b i c będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $a < b < c < a + b$. Udowodnić, że $c(a - 1) + b$ nie dzieli $c(b - 1) + a$.

Let a, b and c be positive integers satisfying $a < b < c < a + b$. Prove that $c(a - 1) + b$ does not divide $c(b - 1) + a$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem T7

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 50 (MEMO 2020)**.** Dany jest ostrokątny, różnoboczny trójkąt ABC, w którym ω jest okręgiem opisanym, a I jest środkiem okręgu wpisanego. Załóżmy, że ortocentrum H trójkąta BIC leży wewnątrz ω. Niech M będzie środkiem dłuższego łuku BC okręgu ω. Niech N będzie środkiem krótszego łuku AM okręgu ω. Udowodnić, że istnieje okrąg styczny do ω w punkcie N oraz styczny do okręgów opisanych na trójkątach BHI oraz CHI.

Let ABC be an acute scalene triangle with circumcircle ω and incenter I. Suppose the orthocenter H of BIC lies inside ω. Let M be the midpoint of the longer arc BC of ω. Let N be the midpoint of the shorter arc AM of ω. Prove that there exists a circle tangent to ω at N and tangent to the circumcircles of BHI and CHI.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem I3

Dyskusja/Discussion: AoPS

6. BW (Baltic Way)

Zadanie 51 (BW 2014)**.** W kwadracie $ABCD$ wpisanym w okrąg ω niech P będzie punktem leżącym na krótszym łuku AB okręgu ω. Ponadto niech $CP \cap BD = R$ oraz $DP \cap AC = S$. Pokazać, że trójkąty ARB i DSR mają równe pola.

Let $ABCD$ be a square inscribed in a circle ω and let P be a point on the shorter arc AB of ω. Let $CP \cap BD = R$ and $DP \cap AC = S$. Show that triangles ARB and DSR have equal areas.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 13

Zadanie 52 (BW 2016)**.** Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg takim, że AB i CD nie są równoległe. Punkt M jest środkiem odcinka CD. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz $ABCD$ takim, że $PA = PB = CM$. Pokazać, że proste AB, CD oraz symetralna odcinka MP przecinają się w jednym punkcie.

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with AB and CD not parallel. Let M be the midpoint of CD. Let P be a point inside $ABCD$ such that $PA = PB = CM$. Prove that AB, CD and the perpendicular bisector of MP are concurrent.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 20

Zadanie 53 (BW 2017)**.** W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle ABC = 60°$. Niech I i O będą odpowiednio – środkiem okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie ABC. Oznaczmy przez M środek łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu A. Wyznaczyć kąt BAC wiedząc, że $MB = OI$.

Let ABC be a triangle in which $\sphericalangle ABC = 60°$. Let I and O be the incentre and circumcentre of ABC, respectively. Let M be the midpoint of the arc BC of the circumcircle of ABC, which does not contain the point A. Determine $\sphericalangle BAC$ given that $MB = OI$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 13

Zadanie 54 (BW 2019)**.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite n, że istnieje liczba całkowita $k \geqslant 2$ oraz liczby całkowite dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ takie, że

$$n = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k \quad \text{and} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Determine all integers n for which there exist $k \geqslant 2$ and positive integers $x_1, x_2, \ldots, x_k$ such that

$$n = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k \quad \text{and} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

Rozwiązanie/Solution: AoPS

Zadanie 55 (BW 2019)**.** Dane jest trójkąt ABC w którym $AB = AC$. Punkt M jest środkiem boku BC. Niech okręgi o średnicach AC i BM przecinają się w punktach M i P. Niech MP przecina AB w punkcie Q. Niech R będzie punktem na prostej AP takim, że $QR \parallel BP$. Udowodnić, że CP połowi kąt RCB.

Let ABC be a triangle with $AB = AC$. Let M be the midpoint of BC. Let the circles with diameters AC and BM intersect at points M and P. Let MP intersects AB at Q. Let R be a point on AP such that $QR \parallel BP$. Prove that CP bisects $\sphericalangle RCB$.

Rozwiązanie/Solution: AoPS

Zadanie 56 (BW 2019)**.** Niech ABC będzie trójkątem a H jego ortocentrum. Niech D będzie punktem leżącym na boku AC a E punktem leżącym na prostej BC że $BC \perp DE$. Udowodnić, że $EH \perp BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy BD połowi AE.

Let ABC be a triangle and H its orthocenter. Let D be a point lying on the segment AC and let E be the point on the line BC such that $BC \perp DE$. Prove that $EH \perp BD$ if and only if BD bisects AE.

Rozwiązanie/Solution: AoPS

Zadanie 57 (BW 2019)**.** Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ w którym $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFA = 90°$. Udowodnić, że $AD \perp CE$.

Let $ABCDEF$ be a convex hexagon in which $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ and $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFA = 90°$. Prove that $AD \perp CE$.

Rozwiązanie/Solution: AoPS

Zadanie 58 (BW 2020)**.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, na którym opisano okrąg ω. Prosta ℓ jest styczna do ω w punkcie A. Punkty X i Y są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste ℓ i AC. Niech punkt H będzie ortocentrum trójkąta BXY. Prosta CH przecina ℓ w D. Wykazać, że BA jest dwusieczną kąta CBD.

Let ABC be an acute triangle with circumcircle ω. Let ℓ be the tangent line to ω at A. Let X and Y be the projections of B onto lines ℓ and AC, respectively. Let H be the orthocenter of BXY. Let CH intersect ℓ at D. Prove that BA bisects angle CBD.

Rozwiązanie/Solution:

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 59 (BW 2020)**.** Dane są zbiory A i B dodatnich liczb całkowitych spełniające $|A| \geqslant 2$ oraz $|B| \geqslant 2$. Niech S będzie zbiorem składającym się z $|A|+|B|-1$ liczb postaci ab dla $a \in A$ oraz $b \in B$. Udowodnić, że istnieją parami różne x, y, $z \in S$ takie, że x jest dzielnikiem liczby yz.

Let A and B be sets of positive integers with $|A| \geqslant 2$ and $|B| \geqslant 2$. Let S be a set consisting of $|A| + |B| - 1$ numbers of the form ab where $a \in A$ and $b \in B$. Prove that there exist pairwise distinct $x, y, z \in S$ such that x is a divisor of yz.

Rozwiązanie/Solution:

Dyskusja/Discussion: AoPS

7. CzPS (Czech-Polish-Slovak Match)

Zadanie 60 (CzPS 2013)**.** Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Punkt P jest środkiem łuku BC okręgu ω zawierającego punkt A. Okrąg o średnicy CP przecina dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ w punktach K i L (punkty A, K, L leżą w tej kolejności na prostej). Ponadto, M jest punktem symetrycznym do L względem prostej BC. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie BKM połowi odcinek BC.

Let ABC be a triangle inscribed in a circle. Point P is the center of the arc BAC. The circle with the diameter CP intersects the angle bisector of angle $\sphericalangle BAC$ at points K, L ($|AK| < |AL|$). Point M is the reflection of L with respect to line BC. Prove that the circumcircle of the triangle BKM passes through the center of the segment BC.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 6, Page 73

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 61 (CzPS 2019)**.** W trójkącie ostrokątnym ABC mamy $AB < AC$ oraz $\sphericalangle BAC = 60°$. Odcinki AD, BE, CF są wysokościami i przecinają się w punkcie H. Niech K, L, M będą środkami boków BC, CA, AB, odpowiednio. Pokazać, że środki odcinków AH, DK, EL, FM leżą na jednym okręgu.

Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$ and $\sphericalangle BAC = 60°$. Denote its altitudes by AD, BE, CF and its orthocenter by H. Let K, L, M be the midpoints of sides BC, CA, AB, respectively. Prove that the midpoints of segments AH, DK, EL, FM lie on a single circle.

Rozwiązanie/Solution: AoPS.

Dyskusja/Discussion: AoPS.

Zadanie 62 (CzPS 2020)**.** Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Punkt P jest takim punktem, że proste PB i PC są styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech X i Y będą punktami leżącymi na odcinkach AB i AC, odpowiednio, że $\sphericalangle XPY = 2\sphericalangle BAC$ i P leży wewnątrz trójkąta AXY. Niech Z będzie obrazem punktu A względem XY. Udowodnij, że przy zmieniającym się położeniu punktów X i Y, okręgi opisane na trójkącie XYZ przechodzą przez pewien stały punkt.

Let ABC be an acute triangle. Let P be a point such that PB and PC are tangent to circumcircle of ABC. Let X and Y be variable points on AB and AC, respectively, such that $\sphericalangle XPY = 2\sphericalangle BAC$ and P lies in the interior of triangle AXY. Let Z be the reflection of A about XY. Prove that the circumcircle of XYZ passes through a fixed point.

Rozwiązanie/Solution: AoPS

Dyskusja/Discussion: AoPS

Zadanie 63 (CzPS 2021)**.** Ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 1$ oraz dla $n \geqslant 2$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 2 & \text{if } n-1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}; \\ a_{n-1} + 3 & \text{if } n-1 \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}. \end{cases}$$

Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n

$$a_n < (1 + \sqrt{2})n.$$

The sequence $a_1, a_2, a_3, \dots$ is defined recursively as follows: $a_1 = 1$ and for $n \geqslant 2$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 2 & \textit{if } n-1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}; \\ a_{n-1} + 3 & \textit{if } n-1 \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}. \end{cases}$$

Prove that for all positive integers n

$$a_n < (1 + \sqrt{2})n.$$

Rozwiązanie/Solution: SKMO
Dyskusja/Discussion: AoPS

8. IGO (Iranian Geometry Olympiad)

Zadanie 64 (IGO 2019)**.** Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 w tej kolejności, są styczne do pewnej prostej w punktach odpowiednio A i B oraz przecinają się w punkcie X. Styczne w punkcie X do okręgów ω_1 i ω_2 przecinają prostą O_1O_2 w punktach odpowiednio K i L. Prosta BL przecina okrąg ω_2 w punkcie M, natomiast prosta AN przecina okrąg ω_1 w punkcie N. Wykazać, że proste AM, BN oraz O_1O_2 przecinają się w jednym punkcie.

Circles ω_1 and ω_2 have centres O_1 and O_2, respectively. These two circles intersect at points X and Y. AB is a common tangent line of these two circles such that A lies on ω_1 and B lies on ω_2. Let tangents to ω_1 and ω_2 at X intersect O_1O_2 at points K and L, respectively. Suppose that line BL intersects ω_2 for the second time at M and line AK intersects ω_1 for the second time at N. Prove that lines AM, BN and O_1O_2 concur.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3, Advanced

Dyskusja/Discussion: AoPS

9. SGO (Sharygin Geometry Olympiad)

Zadanie 65 (SGO 2020)**.** Niech $ABCD$ będzie trapezem równoramiennym o podstawach AB i CD. Udowodnić, że środek ciężkości trójkąta ADB leży na prostej CF, gdzie F jest rzutem punktu D na AB.

Let $ABCD$ be an isosceles trapezoid with bases AB and CD. Prove that the centroid of triangle ABD lies on line CF, where F is the projection of D to AB.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 4

Dyskusja/Discussion: AoPS

10. Msz (Polish Preparation Camp in Mszana Dolna)

Zadanie 66 (Msz 2013)**.** Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny do prostej EF w punkcie A'. Analogicznie definiujemy punkty B' i C'. Wykazać, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie.

Suppose that segments AD, BE and CF are altitudes of an acute triangle ABC. A circle which passes through B and C is tangent to EF at A'. Similarly we define points B' and C'. Prove that AA', BB' and CC' are concurrent.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 32, Page 36

Zadanie 67 (Msz 2013)**.** Dany jest trójkąt ABC. Punkty O i H są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum tego trójkąta. Punkt D jest środkiem tego łuku AC okręgu opisanego na ABC, który nie zawiera punktu B. Punkt S leży na odcinku BC, przy czym proste OS i BD są równoległe. Wykazać, że okrąg o średnicy AS przechodzi przez środek odcinka HD.

Points H and O are orthocenter and circumcenter of triangle ABC respectively. Point D is midpoint of arc AC (which does not contain B) of circumcircle of triangle ABC. Point S lies on line BC and $OS \parallel BD$. Prove that midpoint of HD lies on circle with diameter AS.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 3, Page 44

Zadanie 68 (Msz 2013)**.** Ośmiokąt wypukły $ABCDEFGH$ wpisany w okrąg jest podstawą ostrosłupa $ABCDEFGHS$. Przekątne AE, BF, CG i DH tego ośmiokąta przecinają się w jednym punkcie. Wykazać, że istnieje przekrój płaszczyzną tego ostrosłupa mający przeciwległe boki równoległe.

The cyclic octagon $ABCDEFGH$ is a base of pyramid $ABCDEFGHS$. Suppose that diagonals AE, BF, CG and DH are concurrent. Prove that there exists section of $ABCDEFGHS$ which an octagon with parallel opposite sides.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 11, Page 69

Zadanie 69 (Msz 2014)**.** Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu, który jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 są wpisane odpowiednio w trójkąty ANK, BKL, CLM, DMN. Niech ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 będą stycznymi zewnętrznymi odpowiednio do par okręgów (ω_1, ω_2), (ω_2, ω_3), (ω_3, ω_4), (ω_4, ω_1), które są różne od boków czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt ograniczony przez proste ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 jest rombem.

Let $ABCD$ be a circumscribed quadrilateral and suppose that its incircle is tangent to AB, BC, CD, DA at points K, L, M, and N, respectively. Let ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 be incircles of ANK, BKL, CLM and DMN, respectively. Denote by ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 and ℓ_4 exterior tangents (different then sides of $ABCD$) of pairs of circles (ω_1, ω_2), (ω_2, ω_3), (ω_3, ω_4) and (ω_4, ω_1), respectively. Prove that quadrilateral which is bounded by ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 and ℓ_4 is a rhombus.

Zadanie 70 (Msz 2016)**.** Punkt O jest środkiem okręgu ω opisanego na trójkącie ABC, punkt K jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a X punktem na półprostej $\overrightarrow{AK}$. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg ω w punkcie D różnym od A. Punkt M jest środkiem odcinka DX. Prosta przechodząca przez O równoległa do AD przecina prostą DX w punkcie N. Udowodnić, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$.

Let ω be the circumcircle with centre O of triangle ABC. Let K be the feet of A to line BC and let X be an arbitrary point of $\overrightarrow{AK}$. Suppose that bisector of angle BAC intersects ω at $D \neq A$. Denote by M the midpoint of DX. Line passing through O and parallel to AD intersects DX at N. Prove that $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem 32, Page 46

11. MR (Mathematical Reflections)

Zadanie 71 (MR 2020)**.** Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Oznaczmy przez K, L i M środki odcinków BF, BD i BC, odpowiednio. Prosta przechodząca przez D i równoległa do dwusiecznej kąta CBA przecina prostą KL w punkcie P. Udowodnij, że $PM \parallel EF$ wtedy i tylko wtedy, gdy $BC = 3BD$.

Let ABC be a triangle with incircle which is tangent to sides BC, CA and AB at point D, E and F, respectively. Suppose that K, L and M are midpoints of BF, BD and BC, respectively. The line which passes through D and is parallel to the bisector of the angle CBA intersects KL at P. Prove that $PM \parallel EF$ iff $BC = 3BD$.

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem S534, Page 2

Zadanie 72 (MR 2020)**.** Niech $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ będzie sześciokątem wypukłym,którego wszystkie kąty są rozwarte. Niech

$$A_1A_2 \cap B_1B_2 = C, \quad B_1B_2 \cap C_1C_2 = A \ \text{ i } \ C_1C_2 \cap A_1A_2 = B.$$

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Przypuśćmy, że

$$\sphericalangle B_2OC_1 = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle C_2OA_1 = \sphericalangle CBA \ \text{ and } \ \sphericalangle A_2OB_1 = \sphericalangle ACB.$$

Udowodnij, że

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \leqslant A_2B_1 + B_2C_1 + C_2A_1.$$

Let $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ be a convex hexagon, in which all angles are obtuse. Let

$$A_1A_2 \cap B_1B_2 = C, \quad B_1B_2 \cap C_1C_2 = A \ \text{ and } \ C_1C_2 \cap A_1A_2 = B.$$

Let O be the circumcenter of ABC. Suppose that

$$\sphericalangle B_2OC_1 = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle C_2OA_1 = \sphericalangle CBA \ \text{ and } \ \sphericalangle A_2OB_1 = \sphericalangle ACB.$$

Prove that

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \leqslant A_2B_1 + B_2C_1 + C_2A_1.$$

Rozwiązanie/Solution: Zadanie/Problem O539, Page 4