III Liceum Ogólnokształcące
im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Krynica Zdrój, 26 - 30 września 2016

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Krynica Zdrój, 26 - 30 września 2016

Kadra:
Dominik Burek
Maciej Gawron

Wstęp

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej organizowany przez III LO w Tarnowie odbył się w dniach 26-30 września 2016 r. w Krynicy Zdroju, w domu wypoczynkowym „Józefa". Kadrę obozu stanowili: Dominik Burek (student V roku matematyki IMUJ, autor niniejszej broszury), Maciej Gawron (pracownik naukowy IMUJ) Marcin Radwański (nauczyciel III LO w Tarnowie, organizator obozu) oraz Tomasz Sobczak (nauczyciel III LO w Tarnowie).

W obozie uczestniczyło 37 uczniów z dwóch szkół gimnazjalnych (Gimnazjum nr 2 w Tarnowie oraz Gimnazjum Dwujęzyczne w Tarnowie) oraz sześciu szkół średnich (II LO im Marii Skłodowskiej – Curie w Końskich, V LO w Krakowie, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim, LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie, II LO w Tarnowie oraz III LO w Tarnowie,) którzy zostali podzieleni na trzy grupy: grupę starszą (4 uczniów), grupę średnią (19 uczniów) oraz grupę młodszą (14 uczniów). Pełną listę uczestników obozu zamieszczono poniżej.

W dniach 27, 28, 29 września odbyły się zawody indywidualne, a 30 września został rozegrany mecz matematyczny. Regulamin meczu znajduje się na końcu tej broszury. Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli każdego dnia cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Mecz matematyczny trwał od 14:00 dnia poprzedniego do 9:00. Szczegółowe wyniki zawodów indywidualnych przedstawiają tabele na następnych stronach. Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Lista uczestników obozu

III LO w Tarnowie

Dominik Drwal
Dawid Pastuszka
Rafał Spyra
Karolina Świerk
Filip Gawron
Edyta Garbarz
Magdalena Karaś
Paweł Kolendo
Michał Panek
Piotr Pawłowski
Mikołaj Sikora
Przemysław Simajchel
Jakub Węgrecki
Michał Wójcik

Gimnazjum Dwujęzyczne w Tarnowie

Antoni Chudy
Aleksandra Dziurok
Julia Filip
Kacper Kuca
Stanisław Majchrzak
Jakub Pawlina
Jakub Pietraszek
Jakub Wąs
Rafał Pyzik

V LO w Krakowie

Aleksandra Cynk
Jędrzej Kula
Błażej Rozwoda
Mariusz Trela

II LO w Tarnowie

Michał Niedbała

Gimnazjum nr 2 w Tarnowie

Mikołaj Duch

LO sióstr Prezentek w Rzeszowie

Jan Fornal
Radomił Baran

LO w Piotrkowie Trybunalskim

Piotr Żuber
Natalia Kucharczuk
Jan Kociniak
Kamil Galewski

LO w Końskich

Maciej Dziuba
Mikołaj Grzebieluch

Rozkład punktów

Rozkład punktów grupy młodszej

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	4	0	2	13
2.	6	0	0	13
3.	1	0	0	18
4.	1	0	2	16
5.	2	0	1	16
6.	5	2	2	10
7.	0	0	1	18
8.	2	0	0	17
9.	11	1	0	7
10.	9	0	1	9
11.	6	0	1	12
12.	0	0	0	19

Rozkład punktów grupy starszej

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	2	0	0	2
2.	3	1	0	0
3.	2	0	0	2
4.	0	0	3	1
5.	0	0	0	4
6.	0	0	3	1
7.	1	0	0	3
8.	1	0	0	3
9.	0	0	0	4
10.	1	0	0	3
11.	1	0	0	3
12.	0	0	0	4

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Rozstrzygnąć czy istnieje 2016 kolejnych liczb naturalnych wśród których jest dokładnie 17 liczb pierwszych.

2. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg punkty P i Q są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD odpowiednio. Prosta przechodząca przez P i prostopadła do prostej AC przecina prostą prostopadłą do BD przechodzącą przez Q w punkcie R. Pokazać, że trójkąt PQR jest równoramienny.

3. Dana jest liczba naturalna n oraz n stosów monet. Początkowo na k-tym stosie znajduje się dokładnie k monet, dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Dwóch graczy na przemian wykonuje ruchy. Ruch polega na wybraniu stosu i zabraniu z niego dowolnej dodatniej liczby monet, przy czym ruch jest dozwolony jeżeli po ruchu ciąg ilości monet na stosach pozostaje niemalejący. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Wyznaczyć zbiór tych liczb naturalnych n, dla których zaczynający gracz ma strategię wygrywającą.

4. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ zdefiniowany jako: $a_1 = 1$ oraz dla $n \geqslant 1$ wzorami $a_{2n} = a_n$ i $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$. Udowodnić, że każda liczba wymierna dodatnia występuje dokładnie raz w ciągu $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n\geqslant 1}$.

5. Na każdej z $2n$ kart napisano pewną liczbę $1 \leqslant x \leqslant 2$ (na różnych kartach, napisano być może różne liczby). Udowodnić, że można te karty podzielić na dwa stosy tak, aby sumy liczb napisanych na kartach stosów s_1, s_2 spełniały nierówności

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1.$$

6. Liczbę całkowitą dodatnią n nazwiemy *interesującą* jeżeli istnieje takich $2n$ liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, które nie wszystkie są równe oraz dla dowolnych n z nich ich suma jest równa iloczynowi pozostałych n liczb. Wyznaczyć wszystkie liczby interesujące.

7. W trójkącie ostrokątnym ABC ($AB < AC$) punkty O i I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego. Załóżmy, że $IO = \dfrac{1}{2}(AC - AB)$. Pokazać, że

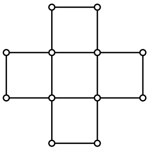
$$[IAO] = \frac{1}{2}([BAO] - [CAO]),$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których zachodzi podzielność

$$\varphi(n) \mid n^2 + 3.$$

9. Rozstrzygnąć jaka jest największa możliwa liczba rozłącznych pentomino w kształcie plusa (zob. rysunek) jakie można położyć na szachownicy 8×8, tak by boki pentomino były równoległe do boków szachownicy.



10. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leqslant \sqrt{a^4 + b^4 + c^4}.$$

11. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany P o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi podzielność $n \mid P(2^n)$.

12. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie P. Załóżmy, że istnieje okrąg ω_1 styczny do przedłużeń boków AB, BC, AD, DC w punktach odpowiednio X, Y, Z i T. Okrąg ω_2 przechodzi przez punkty A i B oraz jest styczny zewnętrznie do ω_1 w punkcie S. Pokazać, że $SP \perp ST$.

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Wyznaczyć wszystkie takie uporządkowane trójki parami różnych liczb rzeczywistych (x, y, z), że zbiory

$$\{x, y, z\} \quad \text{oraz} \quad \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}$$

są równe.

2. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać, że istnieje liczba całkowita $m > n^n$ taka, że $n^m - m^n$ jest podzielne przez $m + n$.

3. Dany jest półokrąg ω o średnicy AB. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie a ponadto każdy z nich jest styczny do odcinka AB w punktach odpowiednio X i Y (punkt X leży między A i Y) i do ω. Punkt C jest punktem styczności ω_1 i ω. Wyznaczyć $\operatorname{tg} \sphericalangle ACY$.

4. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ oraz ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniający warunek $n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnić, że istnieją takie dwie permutacje $b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że podzielność

$$n \mid a_i - (b_i + c_i)$$

zachodzi dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Pokazać, że jeśli okręgi opisane na ścianach czworościanu są przystające, to środki sfer opisanej i wpisanej tego czworościanu się pokrywają.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y i z zachodzi równość

$$f(f(x, z), f(z, y)) = f(x, y) + z.$$

7. Dana jest szachownica $n \times n$. *Pozycją* nazywamy takie rozlokowanie n pionków, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się po jednym pionku. Dane są dwie pozycje $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Przypuśćmy, że każdy prostokąt o jednym wierzchołku w lewym górnym rogu zawiera nie mniej pionków w pozycji $\mathcal{B}$ niż w pozycji $\mathcal{A}$. Udowodnić, że pozycję $\mathcal{B}$ można uzyskać z pozycji $\mathcal{A}$ poprzez ciąg *ruchów* polegających na wyborze takiego prostokąta który zawiera dokładnie dwa pionki: w swoim prawym górnym i lewym dolnym rogu i przeniesieniu tych pionków na pozostałe dwa rogi prostokąta.

8. Dla liczby całkowitej k definiujemy k-tą liczbę pięciokątną wzorem $\omega_k = \dfrac{3k^2 - k}{2}$ (tzn. $\omega_0 = 0$, $\omega_{-1} = 2$, $\omega_1 = 1$, ...). Dana jest liczba całkowita dodatnia n, która nie jest pięciokątna. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$\sum_{\omega_k \leqslant n} (-1)^k \sigma(n - \omega_k) = \sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) \pm \ldots,$$

gdzie przez $\sigma(m)$ oznaczamy sumę dodatnich dzielników liczby m.

9. Dla liczby całkowitej dodatniej n przez x_i oznaczmy liczbę dodatnich dzielników n, których ostatnia cyfra jest równa i dla $0 \leqslant i \leqslant 9$. Pokazać, że $x_3 + x_7 \leqslant x_1 + x_9$.

10. Graf skierowany $G = (V, E)$ spełnia warunek: dla dowolnych wierzchołków $u, v, w \in V$ takich, że $u \neq v$ jeżeli $u \to w$ i $v \to w$ są krawędziami to istnieje przynajmniej jedna z krawędzi $u \to v$ lub $v \to u$. Niech $W \subset V$ będzie minimalnym (względem inkluzji) zbiorem wierzchołków o tej własności, że dla dowolnego $v \in V \setminus W$ istnieje takie $w \in W$, że przynajmniej jedna z par $v \to w$ lub $w \to v$ jest krawędzią.

Niech k będzie największą liczbą wierzchołków w V takich, że między dowolnymi dwoma nie ma krawędzi. Udowodnić, że $|W| \leqslant k$.

11. Dla liczb całkowitych $1 \leqslant r < n$ niech $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wyznaczyć liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tak aby suma

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \neq j}} \frac{x_i}{x_j}$$

była jak najmniejsza.

12. Okrąg wpisany w trójkąt ABC o środku w punkcie I jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC natomiast punkt P jest taki, że $\sphericalangle IDO = \sphericalangle PAI$ oraz $\sphericalangle ICP = \sphericalangle IFO$. Pokazać, że $\sphericalangle IBP = \sphericalangle IEO$.

Mecz Matematyczny

1. Dane są liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_6$ takie, że $p_{k+1} = 2p_k + 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, 5$. Pokazać, że $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_i p_j$ jest liczbą podzielną przez 15.

2. Pokazać, że dla dowolnej liczby pierwszej $p \neq 2$ istnieje wielomian P o współczynnikach całkowitych taki, że

$$2(1 + x^{\frac{p+1}{2}} + (1-x)^{\frac{p+1}{2}}) \equiv P(x)^2 \pmod{p}$$

dla dowolnej liczby całkowitej x.

3. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba $\dfrac{7^{7^{k+1}} + 1}{7^{7^k} + 1}$ jest złożona.

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$x(y + z - x^3) = y(z + x - y^3) = z(x + y - z^3) = 1.$$

5. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}_+$ zachodzi równość $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y)$. Pokazać, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}_+$ zachodzi równość

$$2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y).$$

6. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pokazać, że dla dowolnego wielomianu p stopnia mniejszego niż $2n$ zachodzi nierówność

$$|p(n)| \leqslant (2\sqrt{n} - 1) \cdot M,$$

gdzie

$$M = \max\left(|p(0)|, |p(1)|, \ldots, |p(n-1)|, |p(n+1)|, |p(n+2)|, \ldots, |p(2n)|\right).$$

7. Dany jest n-kąt wypukły $\mathcal{M}$, który został podzielony nieprzecinającymi się przekątnymi na trójkąty tak, że dowolny wierzchołek $\mathcal{M}$ należy do nieparzystej liczby trójkątów. Pokazać, że n jest podzielne przez 3.

8. Dany jest n-kąt W_1. Definiujemy ciąg n-kątów $W_2, W_3, \ldots, W_n$ tak, że: dowolny wierzchołek wielokąta W_{k+1} jest odbiciem odpowiadającego mu wierzchołka W_k względem wierzchołka W_k znajdującego się k wierzchołków dalej zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą pierwszą to W_1 i W_n są podobne.

9. Kostki jednostkowe sześcianu $n \times n \times n$ pomalowano n kolorami, przy czym każdy kolor został użyty n^2 razy. Udowodnić, że istnieje prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu, która przecina kostki pokolorowane na co najmniej $\sqrt[3]{n}$ różnych kolorów.

10. Dany jest trójkąt ABC w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkt H jest spodkiem wysokości opuszczonej z punktu A, natomiast punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu H na boki odpowiednio CA i AB. Niech punkty K, L i N będą H-środkami dopisanymi do trójkątów HBF, HCE i HEF. Pokazać, że A jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KLN.

Uwaga. W trójkącie ABC punkt I jest A-środkiem dopisanym do trójkąta ABC, gdy okrąg o środku w I dopisany do trójkąta jest styczny do boku BC.

11. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ω przechodzący przez punkt A i styczny do boku BC w punkcie D, przecina okrąg opisany o na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie P. Punkt $Q \neq P$ jest punktem przecięcia prostej DP z okręgiem o. Niech M oznacza środek odcinka ID. Załóżmy, że proste PM i AI są różne i przecinają się w punkcie R. Pokazać, że przy zmieniającym się okręgu ω, okrąg opisany na trójkącie PQR przechodzi przez stały punkt.

12. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$ przy czym

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCD = \sphericalangle PDA = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Rozstrzygnąć, czy $ABCD$ musi być czworościanem foremnym a P jego środkiem ciężkości.

Rozwiązania

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Rozstrzygnąć czy istnieje 2016 kolejnych liczb naturalnych wśród których jest dokładnie 17 liczb pierwszych.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $f(n)$ liczbę liczb pierwszych wśród liczb $n+1, n+2, \ldots, n+2016$. Widzimy, że $f(0) > 17$, ponadto $f(2017!+1) = 0$, gdyż liczby $2017!+2, \ldots, 2017!+2017$ są złożone. Nietrudno zauważyć, że $|f(n) - f(n+1)| \leqslant 1$, wobec tego z dyskretnej własności Darboux wynika, że istnieje takie n w przedziale $[0, 2017!+1]$, że $f(n) = 17$. □

2. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg punkty P i Q są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD odpowiednio. Prosta przechodząca przez P i prostopadła do prostej AC przecina prostą prostopadłą do BD przechodzącą przez Q w punkcie R. Pokazać, że trójkąt PQR jest równoramienny.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez M środek krótszego łuku AB okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Na podstawie twierdzenia o trójliściu dostajemy równości $MA = MP = MQ = MB$. Zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle QPR = \pi - \sphericalangle MPQ - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle MCB\right) = \\ = \pi - \sphericalangle PQM - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle ADM\right) = \sphericalangle PQM.\end{aligned}$$

□

3. Dana jest liczba naturalna n oraz n stosów monet. Początkowo na k-tym stosie znajduje się dokładnie k monet, dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Dwóch graczy na przemian wykonuje ruchy. Ruch polega na wybraniu stosu i zabraniu z niego dowolnej dodatniej liczby monet, przy czym ruch jest dozwolony jeżeli po ruchu ciąg ilości monet na stosach pozostaje niemalejący. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Wyznaczyć zbiór tych liczb naturalnych n, dla których zaczynający gracz ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jeżeli $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ to strategię wygrywającą ma pierwszy gracz, w przeciwnym przypadku strategię wygrywającą ma gracz drugi.

Niech $n \equiv 2 \pmod 4$. Oznaczmy przez $s_1, s_2, \ldots, s_n$ liczby monet na stosach. Pierwszy gracz będzie zachowywał następujący niezmiennik: po każdym ruchu spełnione będą nierówności $s_2 - s_1 \leqslant 1, s_4 - s_3 \leqslant 1 \ldots, s_n - s_{n-1} \leqslant 1$, oraz liczba tych i, że $s_{2i} - s_{2i-1} = 1$ jest parzysta.

Zauważmy, że w pierwszym ruchu wystarczy zabrać monetę z drugiego stosu i warunki są spełnione. Jeżeli przeciwnik wykonuje ruch na jednym z pary stosów s_{2i-1}, s_{2i} takim, że $s_{2i} = s_{2i-1}$ to możemy wykonać taki sam ruch na drugim z tych stosów i warunki będę spełnione. Jeżeli wykonuje ruch na mniejszym ze stosów z pary s_{2i-1}, s_{2i} takiej, że $s_{2i} - s_{2i-1} = 1$, to gracz pierwszy może powtórzyć ten ruch na większym z tych stosów i niezmiennik pozostaje zachowany. Jeżeli przeciwnik zabierze monetę z większego ze stosów z pary takiej, że $s_{2i}-s_{2i-1} = 1$ to wykonujemy taki sam ruch na innej parze stosów o tej samej własności. Istnienie takiej pary mamy zagwarantowane dzięki parzystości. Oznacza to, że na każdy ruch możemy odpowiedzieć, stąd nie przegramy.

Jeżeli $n \equiv 1 \pmod 4$ to stosujemy identyczną strategię przy czym dokładamy pusty stos s_0 i rozważamy niezmiennik: $s_1 - s_0 \leqslant 1, \ldots, s_n - s_{n-1} \leqslant 1$ oraz liczba par takich, że $s_{2i+1} - s_{2i} = 1$ jest parzysta.

Jeżeli $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ to strategię ma gracz drugi. Stosuje on analogiczną strategię do opisanej powyżej. $\square$

4. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ zdefiniowany jako: $a_1 = 1$ oraz dla $n \geqslant 1$ wzorami $a_{2n} = a_n$ i $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$. Udowodnić, że każda liczba wymierna dodatnia występuje dokładnie raz w ciągu $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n\geqslant 1}$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, najpierw, że każda liczba wymierna dodatnia występuje w tym ciągu. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że istnieją takie względnie pierwsze liczby p i q, że $\frac{p}{q}$ nie ma w naszym ciągu. Przy czym wybierzmy taką parę (p, q) o tej własności, że $p + q$ jest najmniejsze możliwe. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p > q$ (dowód w drugim przypadku jest analogiczny). Rozważmy parę $(p - q, q)$. Ponieważ $p - q + q = p < p + q$, to zgodnie z naszym założeniem istnieje takie n, że $a_n = p - q$ i $a_{n+1} = q$. Wówczas $a_{2n+1} = (p - q) + q = p$ oraz $a_{2n+2} = q$. Oznacza to, że $a_{2n+1}/a_{2n+2} = p/q$ i otrzymujemy sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że istnieje taka liczba wymierna, która występuje więcej niż raz w tym ciągu. Wybierzmy taką liczbę p/q, przy czym niech $p+q$ będzie minimalne możliwe. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $q > p$. Niech $a_{2n} = p$, $a_{2n+1} = q$ oraz $a_{2m} = p, a_{2m+1} = q$. Wówczas $a_n = p, a_{n+1} = q - p$ oraz $a_m = p, a_{m+1} = q - p$. Oznacza to, że liczba $p/(q - p)$ również występuje wielokrotnie w naszym ciągu oraz $p + (q - p) < p + q$, co jest sprzeczne z naszym wyborem. $\square$

5. Na każdej z $2n$ kart napisano pewną liczbę $1 \leqslant x \leqslant 2$ (na różnych kartach, napisano być może różne liczby). Udowodnić, że można te karty podzielić na dwa stosy tak, aby sumy liczb napisanych na kartach stosów s_1, s_2 spełniały nierówności

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Niech $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$ będą liczbami zapisanymi na kartach. Udowodnimy, że $s_1 = x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1}$ oraz $s_2 = x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}$ spełniają warunki zadania. Nierówność $s_1 \leqslant s_2$ jest oczywista. Rozważmy drugą nierówność

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}} &\geqslant \frac{x_3 + x_5 \ldots + x_{2n-1} + 1}{x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2} + 2} \\ &\geqslant \frac{x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2} + 1}{x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2} + 2} \\ &= 1 - \frac{1}{x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2} + 2} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

□

6. Liczbę całkowitą dodatnią n nazwiemy *interesującą* jeżeli istnieje takich $2n$ liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, które nie wszystkie są równe oraz dla dowolnych n z nich ich suma jest równa iloczynowi pozostałych n liczb. Wyznaczyć wszystkie liczby interesujące.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że parzyste liczby są interesujące.

Jeżeli $n = 2k$ to liczby $(x_1, x_2, \ldots, x_{4k}) = (-1, -1, \ldots, 2k)$ spełniają warunki zadania, czyli liczba n jest interesująca.

Weźmy liczbę interesującą n oraz ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ o szukanej własności. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x_1 \neq x_2$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ będzie dowolną permutacją liczb $(x_3, x_4, \ldots, x_{2n})$ wówczas zachodzą równości

$$x_1 \cdot a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = x_2 + a_n + \ldots + a_{2n},$$

$$x_2 \cdot a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = x_1 + a_n + \ldots + a_{2n}.$$

Odejmując je stronami dostajemy

$$(x_1 - x_2)(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + 1) = 0.$$

Stąd $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = -1$. Ponieważ równość ta zachodzi dla dowolnej permutacji liczb $x_3, x_4, \ldots, x_{2n}$ to również $a_2 a_3 \ldots a_n = -1$ i stąd $a_1 = a_n$. Oznacza to, że $x_3 = x_4 = \ldots = x_{2n}$. Mamy równość $x_3^{n-1} = -1$, z której wynika, że n jest liczbą parzystą. □

7. W trójkącie ostrokątnym ABC $(AB < AC)$ punkty O i I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego. Załóżmy, że $IO = \frac{1}{2}(AC - AB)$. Pokazać, że

$$[IAO] = \frac{1}{2}([BAO] - [CAO]),$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia

- a, b, c — boki BC, CA i AB trójkąta,
- p — połowa obwodu,
- r — promień okręgu wpisanego,
- R — promień okręgu opisanego,
- I_b, I_c — rzuty punktu I na boki AC i AB odpowiednio,
- $I'O'$ — rzut odcinka IO na prostą BC.

Na mocy warunków zadania

$$2IO = AC - AB = I_bC - I_cB = I'C - I'B = 2I'O',$$

więc $OI \parallel BC$. Zauważmy, że

$$[ABI] + [BCI] + [CAI] = [ABO] + [BCO] + [CAO],$$

jednakże $II' = OO'$, więc $[BCI] = [BCO]$, stąd

$$[ABO] + [CAO] = [ABI] + [CAI] = \frac{1}{2}r(c+b).$$

Ponieważ

$$IO = I'O' = O'B - I'B = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2},$$

to

$$[BAO] = [ABI] + [OBI] + [IAO] = \frac{rc}{2} + \frac{r}{2}\left(\frac{b-c}{2}\right) + [IAO] =$$
$$= \frac{r(c+b)}{4} + [IAO] = \frac{1}{2}([BAO] + [CAO]) + [IAO],$$

więc

$$[IAO] = \frac{1}{2}([BAO] - [CAO]).$$

□

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których zachodzi podzielność

$$\varphi(n) \mid n^2 + 3.$$

Rozwiązanie:

Jeżeli n jest liczbą pierwszą to $\varphi(n) = n - 1$. Wówczas $n - 1$ dzieli liczbę $n^2 + 3 = (n-1)(n+1) + 4$, więc $n - 1 \mid 4$. Otrzymujemy, że $n = 2, 3, 5$ spełniają tezę w tym przypadku.

Zauważmy, że dla $n \geqslant 3$ liczba $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą. Oznacza to, że n jest liczbą nieparzystą. Zapiszmy $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$. Wówczas $2^s \mid \varphi(n)$. Z drugiej strony $n^2 + 3 \equiv 4 \pmod 8$. Oznacza to, że $s \leqslant 2$. Jeżeli pewne $k_i \geqslant 2$ to $p_i \mid \varphi(n) \mid n^2 + 3$, więc $p_i = 3$. Jenak wówczas 9 nie dzieli $n^2 + 3$, więc $k_i = 2$. Mamy zatem trzy możliwości $n = 9$ (kolejne rozwiązanie), $n = 9p$ i $p \neq 3$, oraz $n = pq$ dla pewnych różnych liczb pierwszych p, q.

Jeżeli $n = 9p$ to $\varphi(n) = 6(p - 1)$. Ponadto mamy równość

$$n^2 + 3 = 81(p - 1)(p + 1) + 84$$

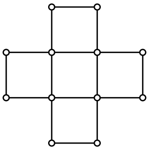
i stąd $3(p - 1) \mid 84$, więc $p - 1 \mid 28$. Jedynymi możliwościami są $p = 5$ i $p = 29$, jednak wówczas $8 \mid \varphi(n)$ czyli nie są to rozwiązania.

Rozważmy teraz przypadek $n = pq$. Jeżeli $q = 3$ to dostajemy $\varphi(n) = 2(p - 1)$ oraz $n^2+3 = 9(p-1)(p+1)+12$. Dostajemy, że $2(p-1) \mid 12$. Rozważając otrzymane przypadki dostajemy, że $p = 7$ i $n = 21$ jest rozwiązaniem.

Przypuśćmy, że $n = pq$ i $p, q \geqslant 5$. Rozważmy nieparzysty czynnik pierwszy r liczby $\varphi(n)$. Mamy $n^2 \equiv -3 \pmod r$. Z teorii reszt kwadratowych wynika, że r jest liczbą pierwszą postaci $3k + 1$, lub $r = 3$. Drugi przypadek jest wykluczony, ponieważ n nie jest podzielne przez 3. Ponieważ $(p - 1) \mid n^2 + 3$ to p jest liczbą pierwszą postaci $3k + 2$. Otrzymujemy, że liczba $\dfrac{p-1}{2}$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2 i jest iloczynem liczb pierwszych postaci $3k + 1$ co jest sprzecznością.

Ostatecznie rozwiązaniami są $n = 1, 2, 3, 5, 9, 21$. □

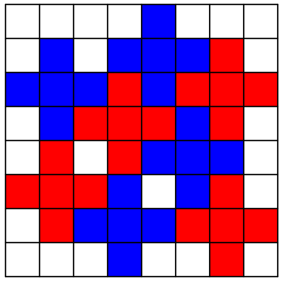
9. Rozstrzygnąć jaka jest największa możliwa liczba rozłącznych pentomino w kształcie plusa (zob. rysunek) jakie można położyć na szachownicy 8×8, tak by boki pentomino były równoległe do boków szachownicy.



Rozwiązanie:

Udowodnimy, że 8 jest szukaną liczbą pentomino. Zauważmy, że pentomino mogą zająć jedynie 2 spośród 8 pól w dolnym rzędzie. Istotnie, każde pentomino może zająć tylko jedno pole w tym rzędzie, gdyby były zajęte 3 pola to w rzędzie wyżej byłoby zajętych 9 pól - sprzeczność. Oznacza to, że w sumie mogą być zajęte co najwyżej $6^2 + 4 \cdot 2 = 44$ pola (6^2 wewnętrznych pól i po 2 na każdej z czterech krawędzi). Każde pentomino zajmuje 5 pól, czyli jest co najwyżej $\lfloor \frac{44}{5} \rfloor = 8$ pentomino.

Z drugiej strony nietrudno narysować 8 rozłącznych pentomino na szachownicy 8×8.



□

10. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leqslant \sqrt{a^4 + b^4 + c^4}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności Schwarza dla ciągów a, b, c i b^2, c^2, a^2 dostajemy

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^4 + c^4 + a^4) \geqslant (ab^2 + bc^2 + ca^2)^2,$$

lub równoważnie

$$\sqrt{b^4 + c^4 + a^4} \geqslant ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

□

11. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany P o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi podzielność $n \mid P(2^n)$.

Rozwiązanie:

Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi. Z warunków zadania wynika, że $pq \mid P(2^{pq})$. Otrzymujemy, że

$$P(2^{pq}) \equiv P(2^q) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Oznacza to, że liczba $P(2^q)$ jest podzielna przez p, wobec dowolności wyboru p otrzymujemy, że $P(2^q) = 0$. Oznacza to, że wielomian P ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, więc $P = 0$. □

12. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie P. Załóżmy, że istnieje okrąg ω_1 styczny do przedłużeń boków AB, BC, AD, DC w punktach odpowiednio X, Y, Z i T. Okrąg ω_2 przechodzi przez punkty A i B oraz jest styczny zewnętrznie do ω_1 w punkcie S. Pokazać, że $SP \perp ST$.

Rozwiązanie:

Niech J będzie biegunem prostej SX względem okręgu ω_1 i niech $V := AB \cap YZ$. Dobrze znanym faktem jest, że punkt $P = XT \cap YZ$ i $(A, B; V, X) = 1$, więc z równości $JX^2 = JA \cdot JB$ wnioskujemy, że J jest środkiem odcinka VX, zatem J jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie SVX.

Ponieważ proste TX i YZ są równoległe do dwusiecznych kątów między parami boków odpowiednio (AB, CD) i (BC, DA) mamy, że $\sphericalangle XPV = 90^\circ$. Zatem punkty P, S, V i X leżą na okręgu o średnicy VX, więc

$$\sphericalangle TSP = \sphericalangle XSP - \sphericalangle XST = \sphericalangle XVP - \sphericalangle VXP = 90^\circ.$$

□

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Wyznaczyć wszystkie takie uporządkowane trójki parami różnych liczb rzeczywistych (x, y, z), że zbiory

$$\{x, y, z\} \quad \text{oraz} \quad \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}$$

są równe.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedynymi trójkami spełniającym żądane warunki są trójki postaci $(t, -\frac{1}{1+t}, -1-\frac{1}{t})$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$ oraz trójki $(1, -2, -\frac{1}{2})$, $(-2, -\frac{1}{2}, 1)$ oraz $(-\frac{1}{2}, 1, -2)$.

Zauważmy, że istotnie trójki tej postaci spełniają warunki zadania. W pierwszym przypadku spełnione są równości

$$\frac{t-(-\frac{1}{1+t})}{-\frac{1}{1+t}-(-1-\frac{1}{t})} = t, \quad \frac{-\frac{1}{1+t}-(-1-\frac{1}{t})}{(-1-\frac{1}{t})-t} = -\frac{1}{1+t}, \quad \frac{(-1-\frac{1}{t})-t}{t-(-\frac{1}{1+t})} = -1-\frac{1}{t}.$$

Ponadto liczby te są parami różne. Równość dowolnych dwóch z nich prowadzi do równania $t^2+t+1=0$, które nie ma rozwiązań rzeczywistych. W drugim przypadku sprawdzamy, że istotnie są to rozwiązania.

Odwrotnie, jeżeli trójka (x, y, z) spełnia warunki zadania, to oznaczając $t = \frac{x-y}{y-z}$ dostajemy

$$-\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{1+\frac{x-y}{y-z}} = -\frac{1}{\frac{x-z}{y-z}} = \frac{y-z}{z-x}$$

oraz

$$-1-\frac{1}{t} = -1-\frac{y-z}{x-y} = \frac{y-x+z-y}{x-y} = \frac{z-x}{x-y}.$$

Czyli istotnie mamy równość zbiorów $\{x, y, z\} = \{t, -\frac{1}{1+t}, -1-\frac{1}{t}\}$, dla pewnego $t \neq 0, -1$. Zauważmy, że dla funkcji $f(t) = -\frac{1}{t+1}$ mamy $f(f(t)) = -1-\frac{1}{t}$ oraz $f(f(f(t))) = t$. Oznacza to, że zmieniając ewentualnie t, możemy przyjąć, że $x = t$. Jeżeli $(x, y, z) = (t, f(t), f(f(t))$ to mamy pierwszy przypadek. Jeżeli zaś $(x, y, z) = (t, f(f(t)), f(t))$ to mamy

$$\frac{x-y}{y-z} = -t-1, \quad \frac{y-z}{z-x} = \frac{1}{t}, \quad \frac{z-x}{x-y} = -\frac{t}{t+1}.$$

Przyrównując t do powyższych wyrażeń, otrzymujemy kolejno $t = -\frac{1}{2}$, $t = 1$ oraz $t = -2$, co odpowiada pozostałym wymienionym trójkom.

2. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać, że istnieje liczba całkowita $m > n^n$ taka, że $n^m - m^n$ jest podzielne przez $m + n$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $n = 2$ to $m = 5$ spełnia warunki zadania. Istotnie $7|2^5 - 5^2 = 32 - 25$. Od tej pory załóżmy, że $n \geqslant 3$.

Spróbujmy znaleźć takie m wśród wielokrotności n. Niech $m = kn$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\frac{n^m - m^n}{m+n} = \frac{n^{kn} - (kn)^n}{n(k+1)} = \frac{n^{n-1}(n^{(k-1)n} - k^n)}{k+1},$$

więc chcemy aby $k + 1 \mid n^{n-1}(n^{(k-1)n} - k^n)$. Rozpatrzmy dwa przypadki

- $n \equiv 1 \pmod 2$. Mamy

$$n^{n-1}(n^{(k-1)n} - k^n) \equiv n^{n-1}(n^{(k-1)n} + 1) \pmod{k+1}, \tag{1}$$

  więc $k = 2n^{n-1} - 1$ spełnia powyższą kongruencje oraz nierówność $k > n^{n-1}$. Wobec tego liczba $m = (2n^{n-1}-1)n$ spełnia warunki zadania dla nieparzystych n.

- $n \equiv 0 \pmod 2$. Biorąc dzielnik pierwszy p liczby $n-1$, analogicznie jak wyżej zauważamy, że $k = pn^{n-1} - 1$ spełnia 1, więc $m = (pn^{n-1} - 1)n$ działa w przypadku parzystego n. □

3. Dany jest półokrąg ω o średnicy AB. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie a ponadto każdy z nich jest styczny do odcinka AB w punktach odpowiednio X i Y (punkt X leży między A i Y) i do ω. Punkt C jest punktem styczności ω_1 i ω. Wyznaczyć $\operatorname{tg} \sphericalangle ACY$.

Rozwiązanie:

Niech ω_1 i ω_2 będą styczne w punkcie T. Ponadto niech CX i CY przecinają ω w punktach odpowiednio M i E oraz $F := AB \cap ME$. Oznaczmy przez N środek odcinka XY. Wówczas punkty T, N, M leżą na jednej prostej (dobrze znane). Wobec tego $MT = MA = MB$ oraz $NT = NX = NY$, więc $2\sphericalangle ATX = 2\sphericalangle BTY = \sphericalangle MAB = 45°$. Na podstawie związku

$$MA^2 = MX \cdot MC = ME \cdot MF$$

mamy, że punkty C, X, E i F leżą na jednym okręgu.

Niech G będzie punktem przecięcia TY z okręgiem o środku w punkcie M i promieniu MT. Wówczas

$$YF \cdot YP = YC \cdot YE = YB \cdot YA = YT \cdot YG,$$

więc punkty T, X, G i F leżą na jednym okręgu, stąd $GF \perp AB$ oraz $2\sphericalangle GAF = 2\sphericalangle BGF = 2\sphericalangle BTY = 45°$. Wobec tego trójkąty GAF i BGF są podobne. Łatwo zauważyć, że prosta EF jest dwusieczną kąta zewnętrznego w trójkącie AEB ($\sphericalangle ACB = 90°$), więc

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ACQ = \operatorname{tg} \sphericalangle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF} = \frac{GF^2}{BF^2} = \operatorname{ctg}^2 22.5° = 3 + 2\sqrt{2}.$$

□

4. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ oraz ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniający warunek $n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnić, że istnieją takie dwie permutacje $b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że podzielność

$$n \mid a_i - (b_i + c_i)$$

zachodzi dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ to wystarczy wziąć $b_k = k, c_k = n - k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $b_n = c_n = n$.

Udowodnimy, że jeżeli potrafimy skonstruować szukane permutacje dla pewnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ to potrafimy jest również skonstruować dla ciągu $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, który różni się od ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ na pewnych dwóch pozycjach i_1, i_2. W ten sposób podmieniając po dwa elementy, jesteśmy w stanie udowodnić tezę dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Definiujemy ciąg indeksów $i_3, i_4, \ldots$ tak aby dla $k \geqslant 2$ spełniony był warunek

$$n \mid b_{i_{k-1}} + c_{i_{k+1}} - a'_{i_k}. \tag{2}$$

Tak skonstruowany ciąg indeksów musi zawierać dwa równe wyrazy. Wybierzmy taką parę $p \neq q$, że $i_p = i_q$ i q jest możliwie najmniejsze. Twierdzimy, że $p = 1$ lub $p = 2$. Pamiętając, że $n \mid b_j + c_j - a'_j$ o ile, $j \neq i_1, i_2$, sumujemy podzielności (2) dla $k = p, p+1, \ldots, q-1$ i otrzymujemy, że

$$n \mid b_{i_{p-1}} + b_{i_p} + c_{i_{q-1}} + c_{i_q} - a'_{i_p} - a'_{i_{q-1}}.$$

Ponieważ $i_p = i_q$ oraz $i_p \neq i_1, i_2$, to dostajemy

$$n \mid b_{i_{p-1}} + c_{i_{q-1}} - a'_{i_{q-1}}$$

stąd $i_{p-1} = i_{q-1}$ i otrzymujemy sprzeczność z minimalnością q. Oznacza to, że istotnie $p = 1$ lub $p = 2$. Definiujemy permutacje b', c' następująco

$$\begin{aligned}
b'_{i_1} &:= b_{i_{q-1}} \\
b'_{i_k} &:= b_{i_{k-1}} \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, q-1, \\
c'_{i_k} &:= c_{i_{k+1}} \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, q-1, \\
c'_{i_1} &:= c_{i_2} \quad \text{jeśli} \quad p = 1, \\
&:= c_{i_1} \quad \text{jeśli} \quad p = 2, \\
b'_j &:= b_j, c'_j = c_j \quad \text{jeśli } j \neq i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}.
\end{aligned}$$

Bez trudu widzimy, że tak skonstruowane permutacje b', c' spełniają warunki dla ciągu a'. Co kończy dowód. □

5. Pokazać, że jeśli okręgi opisane na ścianach czworościanu są przystające, to środki sfer opisanej i wpisanej tego czworościanu się pokrywają.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- A, B, C i D — wierzchołki czworościanu,
- O — środek sfery opisanej,
- I — środek sfery wpisanej,
- O_A, O_B, O_C, O_D — rzuty prostokątne punktu O na ściany BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio,
- P_A, P_B, P_C, P_D — rzuty prostokątne punktu I na ściany BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio,
- R — promień sfery opisanej na $ABCD$,
- r — promień okręgów opisanych na ścianach $ABCD$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dostajemy równości

$$R^2 - OO_A^2 = O_AB^2 = O_AC^2 = O_AD^2,$$

więc O_A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Analogicznie punkty O_B, O_C i O_D są środkami okręgów opisanych na trójkątach CDA, DAB i ABC. Ponownie z twierdzenia Pitagorasa mamy równości

$$R^2 - r^2 = OO_A^2 = OO_B^2 = OO_C^2 = OO_A^2,$$

stąd widzimy, że punkt O jest równoodległy od ścian czworościanu $ABCD$. Wobec tego O jest środkiem sfery wpisanej lub jednym z siedmiu środków sfer dopisanych.

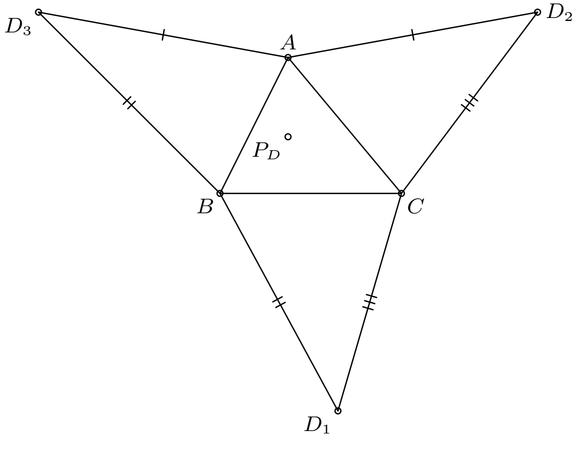
Załóżmy, że O jest D-środkiem sfery dopisanej do ściany ABC w jej punkcie wewnętrznym O_D. Znanym faktem jest, że O_D i P_D są punktami izogonalnie sprzężonymi, a ponieważ O_D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc P_D jest ortocentrum trójkąta ABC.

Z twierdzenia sinusów wynika, że $\sphericalangle BDC \in \{\sphericalangle BAC, \pi - \sphericalangle BAC\}$. Jednakże P_A leży wewnątrz ściany ABD, więc

$$\sphericalangle BDC < \sphericalangle BP_AC = \sphericalangle BP_DC = \pi - \sphericalangle ABC,$$

stąd $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ i analogicznie $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CBA$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.

Rozpatrzmy siatkę czworościanu $ABCD$ tak jak na rysunku.



Ponieważ P_D jest ortocentrum trójkąta ABC, to okręgi opisane na trójkątach BCD_1, CAD_2 i ABD_3 przecinają się w punkcie P_D. Z twierdzenia sinusów wynika, że $\sphericalangle D_2P_DA \in \{\sphericalangle AP_DD_3, \pi - \sphericalangle AP_DD_3\}$ i podobnie $\sphericalangle D_3P_DB \in \{\sphericalangle BP_DD_1, \pi - \sphericalangle BP_DD_1\}$ oraz $\sphericalangle D_1P_DC \in \{\sphericalangle CP_DD_2, \pi - \sphericalangle CP_DD_2\}$. Zauważmy jednak, że punkty D_1, D_2, D_3, P_D nie mogą być współliniowe, więc wśród liczb $|\sphericalangle D_2P_DA - \sphericalangle AP_DD_3|$, $|\sphericalangle D_3P_DB - \sphericalangle BP_DD_1|$ i $|\sphericalangle D_1P_DC - \sphericalangle CP_DD_2|$ dwie muszą być zerami.

Załóżmy bez straty, że $\sphericalangle D_3P_DB = \sphericalangle BP_DD_1$ oraz $\sphericalangle D_1P_DC = \sphericalangle CP_DD_2$. Trójkąty w parach (BP_DD_3, BP_DD_1), (CP_DD_2, CP_DD_1) są przystające. Zatem $P_DD_3 = P_DD_1 = P_DD_2$, więc również trójkąty AP_DD_2 i AP_DD_3 są przystające. Otrzymujemy równości

$$\sphericalangle P_DAD_2 = \pi - \sphericalangle D_2CP_D = \pi - \sphericalangle P_DCD_1 = \sphericalangle P_DBD_1 = \sphericalangle D_3BP_D = \pi - D_3AP_D,$$

stąd D_2, A i D_3 są współliniowe, więc A jest środkiem odcinka D_2D_3. Łącząc to z analogicznymi wnioskami dostajemy, że $ABCD$ ma przystające ściany, stąd O leży w jego wnętrzu — sprzeczność.

Jeżeli O jest środkiem sfery stycznej do każdej ze ścian w punkcie poza ścianą czworościanu, to analogicznie jak wyżej punkt styczności O_C ze ścianą DAB będzie środkiem okręgu opisanego na DAB, który leży po przeciwnej stronie prostej BD, niż punkt A i po przeciwnej stronie prostej AD niż punkt B — co jest oczywiście niemożliwe. Zatem $O = I$. $\square$

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y i z zachodzi równość

$$f(f(x,z), f(z,y)) = f(x,y) + z.$$

Rozwiązanie:

Pokażemy, że nie istnieje funkcja spełniająca warunki zadania.

Niech $g(t) := f(t,t)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej t. Wówczas $g(g(t)) = g(t)+t$, dla $t \in \mathbb{R}$, więc $g(g(0)) = g(0)$ i

$$g(g(g(0))) = g(g(0)) + g(0) \Longrightarrow g(0) = 2g(0) \Longrightarrow g(0) = 0.$$

Ustalmy $a_0 \in \mathbb{R}$. Niech $a := f(a_0, 0)$. Wtedy

$$f(a,0) = f(f(a_0,0), f(0,0)) = f(a_0,0) + 0 = a.$$

Niech $b := f(0,a)$ i $c := g(a)$. Wówczas $f(a,b) = f(f(a,0), f(0,a)) = c$ i $f(b,a) = f(f(0,a), f(a,0)) = a$, stąd

$$2a = f(g(a), f(a,0)) = f(c,a) = f(f(a,b), f(b,a)) = b + c. \tag{3}$$

Również

$$g(b) + a = f(f(b,a), f(a,b)) = f(f(b,a), g(a)) = f(b,a) + a = 2a,$$

stąd $g(b) = a$. Zatem

$$c = g(a) = g(g(b)) = b + g(b) = b + a. \tag{4}$$

Łącząc 3 i 4 dostajemy równości $c = \dfrac{3}{2}a$ i $b = \dfrac{1}{2}a$.

Zdefiniujmy funkcję $h(x,y) := f(y,x)$. Równość dana w zadaniu przyjmuje postać

$$h(h(y,z), h(z,x)) = h(y,x) + z.$$

Oznacza to, że h spełnia identyczne równanie funkcyjne co funkcja f. Udowodniliśmy, że jeżeli a jest postaci $a = f(a_0, 0)$ to $f(a,a) = g(a) = \frac{3}{2}a$. Stosując to rozumowanie dla funkcji h i $b = f(0,a) = h(a,0)$ otrzymujemy $h(b,b) = g(b) = \frac{3}{2}b$. Łącząc otrzymane rezultaty dostajemy $\dfrac{3}{2}b = g(b) = a = 2b$, stąd $a = b = 0$.

Wobec tego $f(0,x) = f(y,0) = 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ co oznacza, że $0 = f(f(0,z), f(z,0)) = f(0,0) + z = z$ dla dowolnego $z \in \mathbb{R}$. Sprzeczność. $\square$

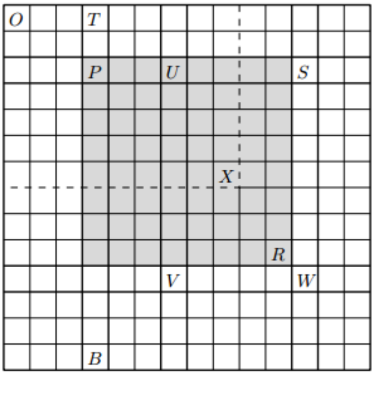
7. Dana jest szachownica $n \times n$. *Pozycją* nazywamy takie rozlokowanie n pionków, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się po jednym pionku. Dane są dwie pozycje $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Przypuśćmy, że każdy prostokąt o jednym wierzchołku w lewym górnym rogu zawiera nie mniej pionków w pozycji $\mathcal{B}$ niż w pozycji $\mathcal{A}$. Udowodnić, że pozycję $\mathcal{B}$ można uzyskać z pozycji $\mathcal{A}$ poprzez ciąg *ruchów* polegających na wyborze takiego prostokąta który zawiera dokładnie dwa pionki: w swoim prawym górnym i lewym dolnym rogu i przeniesieniu tych pionków na pozostałe dwa rogi prostokąta.

Rozwiązanie:

Będziemy oznaczali pola szachownicy wielkimi literami. Niech O będzie lewym górnym rogiem. Przez $[XY]$ będziemy oznaczali prostokąt, którego przeciwległymi rogami są X i Y. Załóżmy, że pionki z pozycji $\mathcal{A}$ są białe, zaś pionki w pozycji $\mathcal{B}$ są czarne. Niech $a(X)$ i $b(X)$ oznaczają odpowiednio liczbę pionków białych i liczbę pionków czarnych w prostokącie $[OX]$. Z założenia dla dowolnego pola X zachodzi $a(X) \leqslant b(X)$, przy czym dla pewnego X nierówność jest ostra (gdyby tak nie było to $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ i nie ma czego dowodzić). Udowodnimy, że istnieje taka pozycja $\mathcal{C}$, że

$$a(X) \leqslant c(X) \leqslant b(X) \quad \text{dla dowolnego } X, \quad \text{oraz } \sum_X a(X) < \sum_X c(X).$$

Zauważmy, że to wystarczy do okazania tezy, ponieważ wykonując te konstrukcję wielokrotnie uzyskamy pozycje $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$, ciąg ten musi stabilizować się w $\mathcal{B}$, gdyż w przeciwnym przypadku ciąg $(\sum_X c_i(X))_{i\geqslant 1}$ byłby nieograniczony.



Rozważmy najwyższy rząd w którym biały pionek nie pokrywa się z czarnym pionkiem. Niech one leżą na polach odpowiednio S i P (oczywiście P leży na lewo od S). Oznaczmy przez T i B pola znajdujące się odpowiednio w górnym i dolnym wierszu kolumny, która zawiera P. W kolumnie, w której leży P biały pionek leży poniżej P. Oznacza to, że w prostokącie $[BS]$ leży co najmniej jeden biały pionek poza rzędem $[PS]$. Oznaczmy przez V biały pionek, który znajduje się najwyżej w prostokącie $[BS]$ poza $[PS]$. Oznaczmy przez W pole na przecięciu wiersza zawierającego V i kolumny zawierającej S, oraz przez R pole sąsiadujące z W wierzchołkiem po lewej górnej stronie. Twierdzimy, że

$$a(X) < b(X), \qquad \text{dla każdego pola } X \in [PR].$$

Istotnie wybierzmy punkt X i rozpatrzmy prostokąt $[OX]$. Na lewo od kolumny $[TB]$ znajduje się co najmniej tyle samo pionków czarnych co białych (co wynika z warunku danego w zadaniu), powyżej wiersza $[PS]$ jest dokładnie tyle samo pionków białych co czarnych (co wynika z poczynionych założeń), natomiast w prostokącie $[XP]$ jest jeden czarny pionek P i nie ma białych pionków.

Jesteśmy gotowi skonstruować szukany ruch. Niech U będzie kwadratem na przecięciu rzędu $[PS]$ i kolumny zawierającej V. Wykonujemy ruch na prostokącie $[SV]$ przenosząc białe pionki z S i V do U i W. Oznaczamy tę nową pozycję przez $\mathcal{C}$, mamy

$$c(X) = a(X) + 1 \quad \text{dla } X \in [UR], \qquad c(X) = a(X) \quad \text{dla pozostałych } X.$$

Ponieważ prostokąt $[PR]$ zawiera prostokąt $[UR]$ to mamy $c(X) \leqslant b(X)$ dla dowolnego X. Szukany ruch został skonstruowany, co wobec powyższych rozważań daje tezę. $\square$

8. Dla liczby całkowitej k definiujemy k-tą liczbę pięciokątną wzorem $\omega_k = \dfrac{3k^2 - k}{2}$ (tzn. $\omega_0 = 0$, $\omega_{-1} = 2$, $\omega_1 = 1$, $\ldots$). Dana jest liczba całkowita dodatnia n, która nie jest pięciokątna. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$\sum_{\omega_k \leqslant n} (-1)^k \sigma(n - \omega_k) = \sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) \pm \ldots,$$

gdzie przez $\sigma(m)$ oznaczamy sumę dodatnich dzielników liczby m.

Rozwiązanie:

Lemat. *Niech $f(n)$ oznacza liczbę przedstawień n jako suma nieparzystej liczby parami różnych liczb naturalnych, zaś $g(n)$ oznacza liczbę przedstawień n jako suma parzystej liczby parami różnych liczb naturalnych. Wówczas $f(n) = g(n)$ jeżeli n nie jest liczbą pięciokątną oraz $f(n) - g(n) = (-1)^k$, gdy $n = \omega_k$.*

Dowód. Twierdzenie to znane jako twierdzenie o liczbach pięciokątnych przypisywane jest Eulerowi. Dwa dowody tego faktu można znaleźć pod adresem `https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_number_theorem`. $\square$

Rozważmy zapisy liczby n w postaci

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m + d_1 d_2,$$

gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ oraz d_1, d_2 są liczbami naturalnymi. Przy czym może być $m = 0$. Oznaczmy przez $\mathcal{S}$ zbiór tych zapisów. Obliczmy na dwa sposoby sumę

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} (-1)^{m(s)} d_1(s), \tag{5}$$

gdzie dla danego zapisu s przez $m(s), d_1(s), \ldots$ oznaczamy liczby występujące w tym zapisie. Z jednej strony grupując wyrażenia z tym samym $d_1 d_2 = n - p$ dostaniemy

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{\{s \in \mathcal{S} | d_1(s) d_2(s) = n-p\}} (-1)^{m(s)} d_1(s) = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma(n-p) \sum_{\substack{x_1 < x_2 < \ldots < x_m \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p}} (-1)^m.$$

Zgodnie z lematem powyższa suma wynosi $\sum_{\omega_k \leqslant n} (-1)^k \sigma(n - \omega_k)$.

Obliczmy teraz sumę (5) na drugi sposób. Podzielmy reprezentacje $s \in \mathcal{S}$ na trzy kategorie $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ w następujący sposób:

$$\mathcal{A} = \{s \in \mathcal{S} \mid x_i(s) \neq d_1(s) \quad \text{oraz} \quad d_2(s) > 1\},$$

$$\mathcal{B} = \{s \in \mathcal{S} \mid x_i(s) = d_1(s) \quad \text{dla pewnego } i\},$$

$$\mathcal{C} = \{s \in \mathcal{S} \mid x_i(s) \neq d_1(s) \quad \text{oraz} \quad d_2(s) = 1.\}.$$

Zauważmy, że reprezentacje z $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ możemy połączyć w pary. Wystarczy z reprezentacji z $\mathcal{B}$ wyrzucić $x_i = d_1$ i powiększyć d_2. Z podanego połączenia wynika, że

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} (-1)^{m(s)} d_1(s) = \sum_{s \in \mathcal{C}} (-1)^{m(s)} d_1(s) = \sum_{\substack{x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} = n}} (-1)^m (x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1}).$$

Ostatnia równość wynika stąd, że zapisy z $\mathcal{C}$ możemy traktować jako przedstawienia n w postaci sumy $m+1$ parami różnych składników, każde takie przedstawienie daje $m+1$ składników w powyższej sumie. Ostatecznie zgodnie z lematem

$$\sum_{\substack{x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} = n}} (-1)^m (x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1}) = n \sum_{x_1 + \ldots + x_{m+1} = n} (-1)^m = 0.$$

Z powyższych rozważań wynika, że

$$\sum_{\omega_k \leqslant n} (-1)^k \sigma(n - \omega_k) = 0.$$

□

9. Dla liczby całkowitej dodatniej n przez x_i oznaczmy liczbę dodatnich dzielników n, których ostatnia cyfra jest równa i dla $0 \leqslant i \leqslant 9$. Pokazać, że $x_3 + x_7 \leqslant x_1 + x_9$.

Rozwiązanie:

Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $\mathrm{NWD}(n, 10) = 1$. Ustalmy liczbę naturalną n i rozważmy jej rozkład na czynniki pierwsze

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s},$$

gdzie p_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ są liczbami pierwszymi, które dają resztę ± 1 przy dzieleniu przez 10, natomiast q_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ są liczbami pierwszymi dającymi resztę ± 3 modulo 10.

Rozpatrzmy wielomian

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{j=1}^{r} (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a_j + 1}) \cdot \prod_{j=1}^{s} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{\beta_j}) = \\ &= a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0 \end{aligned}$$

dla pewnych liczb całkowitych dodatnich $d, a_1, a_2, \ldots a_d$.

Zauważmy, że $x_1 + x_9 = \sum_{2|k} a_k$ natomiast $x_3 + x_7 = \sum_{2\nmid k} a_k$. Wobec tego $x_1 + x_9 - (x_3 + x_7) = f(-1)$, więc

$$a_1 + a_9 - (a_3 + a_7) = \prod_{j=1}^{r} (\alpha_j + 1) \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{1 - (-1)^{\beta_j + 1}}{1 - (-1)} \geqslant 0.$$

$\square$

10. Graf skierowany $G = (V, E)$ spełnia warunek: dla dowolnych wierzchołków $u, v, w \in V$ takich, że $u \neq v$ jeżeli $u \to w$ i $v \to w$ są krawędziami to istnieje przynajmniej jedna z krawędzi $u \to v$ lub $v \to u$. Niech $W \subset V$ będzie minimalnym (względem inkluzji) zbiorem wierzchołków o tej własności, że dla dowolnego $v \in V \setminus W$ istnieje takie $w \in W$, że przynajmniej jedna z par $v \to w$ lub $w \to v$ jest krawędzią.

Niech k będzie największą liczbą wierzchołków w V takich, że między dowolnymi dwoma nie ma krawędzi. Udowodnić, że $|W| \leqslant k$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że teza nie jest spełniona. Rozważmy $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ gdzie $m > k$. Z minimalności zbioru W wynika, że dla dowolnego w_i istnieje taki $v_i \in V \setminus W$, że w_i jest połączony z v_i, ale v_i nie jest połączony z żadnym z $W \setminus \{w_i\}$. Rozważmy zbiory wierzchołków

$$\begin{aligned} W_{in} &= \{w_i \mid w_i \in W, v_i \to w_i\}, \\ W_{out} &= W \setminus W_{in}, \\ V_{in} &= \{v_i \mid w_i \in W_{out}\}. \end{aligned}$$

Oczywiście $|W_{out}| = |V_i n|$. Udowodnimy, że zbiór $W_{in} \cup V_{in}$ jest niezależny. Gdyby pewien wierzchołek $v \in V_{in}$ był połączony z wierzchołkiem $w \in W_{in}$ to v byłby połączony z dwoma wierzchołkami z W, co jest sprzeczne z naszym wyborem wierzchołków $v_1, \ldots, v_m$.

Przypuśćmy, że $w_i \to w_j$ dla pewnych $w_i, w_j \in W_{in}$. Skoro $v_j \to w_j$ to z warunków z zadania mamy, że w_i i v_j są połączone, co jest sprzeczne z naszym wyborem wierzchołków $v_1, \ldots, v_m$.

Przypuśćmy, że $v_i \to v_j$ dla pewnych $v_i, v_j \in V_{in}$. Skoro $w_j \to v_j$ to z warunków z zadania mamy, że v_i i w_j są połączone, co jest sprzeczne z naszym wyborem wierzchołków $v_1, \ldots, v_m$.

Wskazaliśmy zatem zbiór niezależny mocy $m > k$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. □

11. Dla liczb całkowitych $1 \leqslant r < n$ niech $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wyznaczyć liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tak aby suma

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \neq j}} \frac{x_i}{x_j}$$

była jak najmniejsza.

Rozwiązanie:

Niech

$$x := \sum_{i=1}^{r} x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{x_i}, \quad a := \sum_{i=r+1}^{n} x_i, \quad b := \sum_{i=r+1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \neq j}} = \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant r} \frac{x_i}{x_j} + \sum_{r < i \neq j \leqslant n} \frac{x_i}{x_j} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ r < j \leqslant n}} \frac{x_i}{x_j} + \sum_{\substack{r < i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \frac{x_i}{x_j} = \\
&= x_1 \left(y - \frac{1}{x_1} \right) + x_2 \left(y - \frac{1}{x_2} \right) + \ldots + x_r \left(y - \frac{1}{x_r} \right) + \\
&+ x_{r+1} \left(b - \frac{1}{x_{r+1}} \right) + x_{r+2} \left(b - \frac{1}{x_{r+2}} \right) + \ldots + x_n \left(b - \frac{1}{x_n} \right) + bx + ya = \\
&= xy - r + ab - (n-r) + xb + ya = (x+a)(y+b) - n \geqslant (\sqrt{xy} + \sqrt{ab})^2 - n \geqslant \\
&\geqslant (r + \sqrt{ab})^2 - n,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnie nierówności są prawdziwe dzięki nierówności Cauchy'ego–Schwarza.

Równość w pierwszej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$ natomiast w drugiej, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = \dfrac{x}{r} = \dfrac{r}{y}$.

Wobec tego $\mathcal{S}$ przyjmuje minimum dla $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt{\frac{a}{b}}$. □

12. Okrąg wpisany w trójkąt ABC o środku w punkcie I jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC natomiast punkt P jest taki, że $\sphericalangle IDO = \sphericalangle PAI$ oraz $\sphericalangle ICP = \sphericalangle IFO$. Pokazać, że $\sphericalangle IBP = \sphericalangle IEO$.

Rozwiązanie:

Niech o_1 i o_2 oznaczają okręgi wpisany i opisany o promieniach r i R odpowiednio. Rozpoczniemy od wykazania następującego lematu

Lemat. *Przy powyższych oznaczeniach rozpatrzmy okrąg ω styczny do boków AB i AC oraz wewnętrznie styczny do okręgu opisanego w punkcie T. Punkt N jest środkiem łuku BAC. Wówczas punkty T, I i N są współliniowe.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\sphericalangle ITB = \sphericalangle CTI$. Punkt I jest środkiem odcinka EF (dobrze znane) oraz punkt T jest środkiem jednokładności zewnętrznej okręgów: opisanego i wpisanego. Wobec tego proste TA, TB i TC tną ω po raz drugi w punktach A', B' i C' tak, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Proste TE i TF połowią kąty odpowiednio $\sphericalangle CTA$ i $\sphericalangle ATB$ stąd $\sphericalangle CTE = \sphericalangle ETA$ oraz $\sphericalangle FTB = \sphericalangle ATF$ ale TA is symedianą w trójkącie $\triangle TEF$, więc $\sphericalangle FTA = \sphericalangle ETI$. Ostatecznie

$$\sphericalangle ITB = \sphericalangle FTB + \sphericalangle FTI = \sphericalangle ETI + \sphericalangle ETC = \sphericalangle CTI.$$

□

Niech T będzie punktem takim jak w lemacie. Wówczas $U := AT \cap IO$ jest środkiem jednokładności zewnętrznej okręgów o_1 i o_2. Wzór Stewarta zastosowany dla trójkąta AOI i czewiany AU daje nam

$$\begin{aligned} AU^2 &= AI^2 \cdot \frac{UO}{IO} - R^2 \cdot \frac{IU}{IO} + UO^2 - IO \cdot UO = \\ &= AI^2 \cdot \frac{R}{R-r} - R^2 \cdot \frac{r}{R-r} + UO^2 - IO^2 \cdot \frac{R}{R-r} = \\ &= AI^2 \cdot \frac{R}{R-r} + UO^2 - \frac{(R^2-2Rr)R + R^2 r}{R-r} = \\ &= AI^2 \cdot \frac{R}{R-r} + UO^2 - R^2 = AI^2 \cdot \frac{R}{R-r} - AU \cdot UT, \end{aligned}$$

Wobec tego

$$AU \cdot (AU + UT) = AI^2 \cdot \frac{R}{R-r} \Longrightarrow AU = \frac{R}{R-r} \cdot \frac{AI^2}{AT}. \tag{6}$$

Niech M i N będą środkami łuków BC i BAC okręgu o_2. Na podstawie lematu punktu T, I i N są współliniowe. Zatem trójkąty AIT i NIM są podobne, więc

$$\frac{NI}{AI} = \frac{NM}{AT} = \frac{2R}{AT} \Longrightarrow AT = \frac{2R \cdot AI}{NI}. \tag{7}$$

Podstawiając 6 do 7 dostajemy związek

$$\frac{AI}{AU} = \frac{2(R-r)}{NI}. \tag{8}$$

Przyjmując za L środek odcinka AI oraz za K punkt na prostej ON taki, że czworokąt $DIKO$ jest równoległobokiem widzimy, że warunek 8 można zapisać jako

$$\frac{AL}{AU} = \frac{NK}{NI}.$$

Stąd i z równości $\sphericalangle TAM = \sphericalangle TNM$ wnioskujemy, że trójkąty ALU i NKI są podobne, więc $\sphericalangle ILU = \sphericalangle MKI = \sphericalangle IDO$. Jeśli przez P' oznaczymy odbicie punktu I względem punktu U, to $UL \parallel P'A$, wobec tego $\sphericalangle IAP' = \sphericalangle ILU = \sphericalangle IDO$. Analogicznie $\sphericalangle IBP' = \sphericalangle IEO$ oraz $\sphericalangle ICP' = \sphericalangle IFO$ — co oznacza, że $P' = P$.

Mecz Matematyczny

1. Dane są liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_6$ takie, że $p_{k+1} = 2p_k + 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, 5$. Pokazać, że $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_i p_j$ jest liczbą podzielną przez 15.

Rozwiązanie:

Jeżeli $p_1 = 3$ to $p_2 = 7$ i $p_3 = 15$ i uzyskujemy sprzeczność. Jeżeli $p_1 \equiv 1 \pmod 3$ to $3 \mid p_2$ i $p_2 > 3$ co ponownie jest sprzecznością. Oznacza to, że $p_1 \equiv 2 \pmod 3$. Z równań danych w zadaniu wynika, że w tym przypadku każda spośród $p_1, \ldots, p_6$ daje przy dzieleniu przez trzy resztę dwa. Mamy więc

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_i p_j \equiv 15 = 0 \pmod 3.$$

Gdyby $p_1 \equiv 1 \pmod 5$ to $p_2 \equiv 3 \pmod 5$, $p_3 \equiv 2 \pmod 5$ i w końcu $p_4 \equiv 0 \pmod 5$ i uzyskujemy sprzeczność, gdyż $p_4 > 5$. Widzimy również, że jeśli $p_1 \equiv 3 \pmod 5$ to $p_3 \equiv 0 \pmod 5$ i ponownie uzyskujemy sprzeczność, gdyż $p_3 > 5$. Jeżeli $p_1 \equiv 2 \pmod 5$ to $p_2 \equiv 0 \pmod 5$, więc $p_2 = 5$. Wówczas $p_3 = 11$,$p_4 = 23$, $p_5 = 47$, $p_6 = 95$ i uzyskujemy sprzeczność. Nie może być również $p_1 = 5$, gdyż wówczas $p_5 = 95$. Ostatecznie wszystkie liczby $p_1, p_2, \ldots, p_6$ dają resztę cztery z dzielenia przez 5. Mamy, więc

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_i p_j \equiv 15 \equiv 0 \pmod 5.$$

Udowodniliśmy, że podana suma jest podzielna przez 3 i 5, wynika stąd, że jest również podzielna przez 15. □

2. Pokazać, że dla dowolnej liczby pierwszej $p \neq 2$ istnieje wielomian P o współczynnikach całkowitych taki, że

$$2(1 + x^{\frac{p+1}{2}} + (1-x)^{\frac{p+1}{2}}) \equiv P(x)^2 \pmod p$$

dla dowolnej liczby całkowitej x.

Rozwiązanie:

Lemat. *Istnieje dokładnie $\left\lfloor \frac{p+1}{4} \right\rfloor$ reszt r modulo p takich, że r i $1-r$ nie są resztami kwadratowymi modulo p.*

Dowód. Rozważmy równanie $x^2 - y^2 = 1 \pmod p$ w niezerowych resztach $x, y \pmod p$. Twierdzimy, że ma ono $p-3$ rozwiązania dla p postaci $4k+3$ i $p-5$ rozwiązań dla p postaci $4k+1$. Istotnie dla dowolnego $u = 1, 2, \ldots, p-1$ mamy rozwiązanie postaci $x = (u + u^{-1})/2, y = (u - u^{-1})/2$. Przy czym dla $u = \pm 1$ mamy $y = 0$ oraz w przypadku $p = 4k+1$ jeżeli $u^2 = -1$ to $x = 0$.

Weźmy r takie, że r i $1-r$ są nieresztami kwadratowymi. Ustalmy niereszte kwadratową t, wówczas istnieją dokłądnie cztery takie pary niezerowych reszt x, y, że $r = tx^2$ i $1-r = t(xy)^2$. Mamy więc równość $x^2 + (xy)^2 = t^{-1}$ czyli $1 + y^2 = t^{-1}x^{-2}$.

Jeżeli p jest postaci $4k+3$ to zgodnie z powyższymi rozważaniami wyrażenie $1+y^2$ jest resztą kwadratową dla $\frac{p-3}{2}$ wartości y. Oznacza to, że jest ono nieresztą kwadratową dla $\frac{p+1}{2}$ różnych y. Dla tych y dobieramy na dwa sposoby x czyli mamy $(p+1)$ par (x,y), jako, że szukanym r odpowiadają po 4 pary (x,y) to szukanych r jest $\frac{p+1}{4}$.

Jeżeli p jest postaci $4k+1$ to zgodnie z powyższymi rozważaniami wyrażenie $1+y^2$ jest resztą kwadratową dla $\frac{p-5}{2}$ wartości y. Dla dwóch wartości $1+y^2=0$. Wynika stąd, że $1+y^2$ jest nieresztą kwadratową dla $\frac{p-1}{2}$ wartości y. Dla tych y dobieramy na dwa sposoby x, czyli mamy $p-1$ par (x,y), jako, że szukanym r odpowiadają po 4 pary (x,y) to szukanych r jest $\frac{p-1}{4}$.

$\square$

Oznaczmy przez P_p wielomian $2(1+x^{\frac{p+1}{2}}+(1-x)^{\frac{p+1}{2}})$. Niech $N=\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}$ będzie zbiorem niereszt kwadratowych modulo p takim jak w lemacie, gdzie $k:=\left\lfloor\frac{p+1}{4}\right\rfloor$. Dla dowolnego $r\in N$ mamy

$$r^{\frac{p-1}{2}}\equiv(1-r)^{\frac{p-1}{2}}\equiv-1 \pmod p,$$

więc $P_p(r)\equiv 0 \pmod p$ oraz $P_p'(r)\equiv 0 \pmod p$. Zatem

$$P_p(x)\equiv Q(x)(x-r_1)^2(x-r_1)^2\cdot\ldots\cdot(x-r_k)^2 \pmod p$$

dla pewnego wielomianu Q o współczynnikach całkowitych.

Zauważmy, że $\deg Q=\deg P_p-2k=0$, więc Q jest wielomianem stałym. Jeżeli $p\equiv 3 \pmod 4$, to porównując współczynniki wiodące wielomianów dostajemy, że $Q(x)\equiv 1$. W przypadku $p\equiv 3 \pmod 4$ ten sam argument pokazuje, że $Q(x)\equiv 4$.

Sumarycznie, wielomian $P(x):=c(x-r_1)(x-r_1)\cdot\ldots\cdot(x-r_1)$, gdzie $c\in\{-1,+1,-2,+2\}$ spełnia warunki zadania. $\square$

3. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba $\dfrac{7^{7^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$ jest złożona.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\frac{x^7+1}{x+1}=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=(x+1)^6-7x\cdot(x^2+x+1)^2.$$

Jeśli $x:=7^{7^k}$, to $\dfrac{7^{7^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$ będzie różnicą dwóch kwadratów. Wobec tego

$$\frac{7^{7^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}=\left(\left(7^{7^k}+1\right)^3+7^{\frac{7^k+1}{2}}\left(7^{2\cdot 7^k}+7^{7^k}+1\right)\right)\left(\left(7^{7^k}+1\right)^3-7^{\frac{7^k+1}{2}}\left(7^{2\cdot 7^k}+7^{7^k}+1\right)\right).$$

Drugi z czynników jest większy niż 1, gdyż

$$\left(7^{7^k}+1\right)^3-7^{\frac{7^k+1}{2}}\left(7^{2\cdot 7^k}+7^{7^k}+1\right)\geqslant\left(7^{7^k}+1\right)^3-7^{7^k}\left(7^{2\cdot 7^k}+7^{7^k}+1\right)=$$
$$=2\cdot 7^{2\cdot 7^k}+2\cdot 7^{7^k}+1>1.$$

$\square$

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$x(y+z-x^3) = y(z+x-y^3) = z(x+y-z^3) = 1.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że żadna z liczb x, y i z nie jest zerem, więc układ jest równoważny następującemu

$$\begin{cases} y+z = \frac{1}{x} + x^3 \\ z+x = \frac{1}{y} + y^3 \\ x+y = \frac{1}{z} + z^3. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że x jest tego samego znaku co $y+z$, więc x ma ten sam znak co y lub z. Powtarzając to rozumowanie dla pozostałych równań widzimy, że wszystkie liczby mają ten sam znak — załóżmy, że są dodatnie.

Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$\begin{cases} y+z = \frac{1}{x} + x^3 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot x^3} = 2x \\ z+x = \frac{1}{y} + y^3 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y^3} = 2y \\ x+y = \frac{1}{z} + z^3 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{z} \cdot z^3} = 2z. \end{cases}$$

Dodając je stronami dostajemy

$$2x+2y+2z = \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{y} + x^y + \frac{1}{z} + z^3 \geqslant 2x+2y+2z,$$

więc

$$\begin{cases} 2x = \frac{1}{x} + x^3 \\ 2y = \frac{1}{y} + y^3 \\ 2z = \frac{1}{z} + z^3. \end{cases}$$

Zatem $x = y = z = 1$. W przypadku, gdy $x, y, z < 0$ otrzymujemy rozwiązanie $x = y = z = -1$. $\square$

5. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}_+$ zachodzi równość $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y)$. Pokazać, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}_+$ zachodzi równość

$$2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y).$$

Rozwiązanie:

Ustalmy $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Wówczas

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{2cd}{c+d}\right) =$$
$$= f\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right) + f\left(\frac{2\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}\right) + f\left(\frac{\frac{2ab}{a+b}+\frac{2cd}{c+d}}{2}\right) + f\left(\frac{2\cdot\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{2cd}{c+d}}{\frac{2ab}{a+b}+\frac{2cd}{c+d}}\right) =$$
$$= f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) + f\left(\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\right) + f\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}\right) +$$
$$+ f\left(\frac{4abcd}{abc+abd+acd+bcd}\right).$$

Zamieniając b i c miejscami i przyrównując otrzymane równości dostajemy

$$f\left(\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\right) + f\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}\right) =$$
$$= f\left(\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}\right) + f\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+c)(b+d)}\right).$$

Kładąc w powyższej równości $a = c$, $b = \frac{a^2}{d}$ i $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ otrzymujemy

$$2f(a) = f\left(a \cdot \frac{2t}{2+t}\right) + f\left(a \cdot \frac{2+t}{2t}\right).$$

Pozostaje zauważyć, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ istnieje $a \in \mathbb{R}_+$ i rzeczywiste $t \geqslant 2$ takie, że $x = a \cdot \frac{2t}{2+t}$, $y = a \cdot \frac{2+t}{2t}$ i $\sqrt{xy} = a$. □

6. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pokazać, że dla dowolnego wielomianu p stopnia mniejszego niż $2n$ zachodzi nierówność

$$|p(n)| \leqslant (2\sqrt{n} - 1) \cdot M,$$

gdzie

$$M = \max\left(|p(0)|, |p(1)|, \ldots, |p(n-1)|, |p(n+1)|, |p(n+2)|, \ldots, |p(2n)|\right).$$

Rozwiązanie:

Dobrze znanym faktem jest, że dla dowolnego wielomianu p stopnia mniejszego niż m zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} p(k) = 0. \tag{9}$$

Wykorzystując 9 dla $m = 2n$ i nierówność

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}$$

dostajemy

$$\binom{2n}{n}|p(n)| = \left|\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\neq n}}(-1)^k\binom{2n}{k}p(k)\right| \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\neq n}}\binom{2n}{k}|p(k)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\neq n}}\binom{2n}{k}\right) M = \left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right) M,$$

stąd

$$|p(n)| \leqslant \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} M = \left(\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1\right) M \leqslant (2\sqrt{n} - 1)M.$$

□

7. Dany jest n-kąt wypukły $\mathcal{M}$, który został podzielony nieprzecinającymi się przekątnymi na trójkąty tak, że dowolny wierzchołek $\mathcal{M}$ należy do nieparzystej liczby trójkątów. Pokazać, że n jest podzielne przez 3.

Rozwiązanie:

Udowodnijmy, że można pokolorować trójkąty na dwa kolory tak, aby trójkąty sąsiadujące bokiem miały różne kolory. Aby uzyskać szukane pomalowanie stosujemy następujący algorytm: początkowo cały wielokąt malujemy na czarno, następnie kolejno dodajemy przekątne podziału, dodając daną przekątną wszystkie obszary po jednej stronie przekątnej pozostawiamy bez zmian, zaś po drugiej zamieniamy im kolory na przeciwne. Bez trudu widzimy, że tak skonstruowane pomalowanie spełnia nasze warunki.

Zauważmy, że z warunków zadania wynika, że wszystkie trójkąty które mają bok wspólny z brzegiem wielokąta są tego samego, powiedzmy czarnego, koloru. Oznacza to, że liczba krawędzi wielokąta n jest różnicą sumarycznej liczby krawędzi czarnych trójkątów i sumarycznej liczby krawędzi białych trójkątów. Ponieważ trójkąty tego samego koloru nie mają wspólnych krawędzi to obie te liczby są podzielne przez 3 i w konsekwencji $3 \mid n$. □

8. Dany jest n-kąt W_1. Definiujemy ciąg n-kątów $W_2, W_3, \ldots, W_n$ tak, że: dowolny wierzchołek wielokąta W_{k+1} jest odbiciem odpowiadającego mu wierzchołka W_k względem wierzchołka W_k znajdującego się k wierzchołków dalej zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą pierwszą to W_1 i W_n są podobne.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności przyjmijmy, że środek ciężkości naszego wielokąta W_1 to punkt $(0,0)$. Będziemy traktować n-kąty jako ciągi punktów. Ponadto będziemy używać numeracji modulo n. Dla $k = 1, 2, \ldots$ przez f_k oznaczamy transformację ciągu punktów $P = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$ daną w zadaniu tzn. $f_k(P) = (2p_{k+i} - p_i)_{i\in I_n}$.

Twierdzimy, że operacje f_k, f_l komutują. Mamy równość

$$f_k(f_l(P)) = f_k((2p_{l+i} - p_i)_{i\in I_n}) = (2(2p_{k+l+i} - p_{k+i}) - 2p_{l+i} + p_i)_{i\in I_n} = \\ = (4p_{k+l+i} - 2p_{k+i} - 2p_{l+i} - p_i)_{i\in I_n},$$

Widzimy, że ostatnie wyrażenie jest symetryczne ze względu na k i l, więc rzeczywiście $f_k \circ f_l = f_l \circ f_k$.

Zauważmy, że wszystkie f_k oraz każde ich złożenie jest funkcją postaci

$$F((p_i)_{i\in I_n}) = (a_0p_i + a_1p_{i+1} + \ldots + a_{n-1}p_{i+(n-1)})_{i\in I_n}$$

dla pewnych liczb całkowitych $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. W szczególności niech $A_0, \ldots, A_{n-1}$ będą takimi liczbami całkowitymi, że

$$\Phi((p_i)_{i\in I_n}) = f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1((p_i)_{i\in I_n}) = (A_0p_i + \ldots + A_{n-1}p_{i+n-1})_{i\in I_n}.$$

Udowodnimy, że $A_i = A_j$ dla $ij \neq 0$.

Dla liczby $0 < m < n$ rozważmy operację π_m daną wzorem $\pi_m((p_i)_{i\in I_n}) = (p_{mi})_{i\in I_n}$. Jeżeli n jest liczbą pierwszą to π_m jest permutacją. Zauważmy, że zachodzi wzór $f_k(\pi_m(P)) = \pi_m(f_{km}(P))$. Stosując ten wzór $(n-1)$ krotnie dostajemy:

$$f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1 \circ \pi_m((p_i)_{i\in I_n}) = \pi_m \circ f_{(n-1)m} \circ f_{(n-2)m} \circ \ldots \circ f_m((p_i)_{i\in I_n}).$$

Ponieważ n jest liczbą pierwszą, to zbiory $(1, 2, \ldots, n-1)$ i $(m, 2m, \ldots, m(n-1))$ są równe modulo n. Oznacza to, że Φ i π_m komutują. Obliczamy

$$\Phi(\pi_m((p_i)_{i\in I_n})) = \Phi((p_{im})_{i\in I_n}) = (\sum_{j=0}^{n-1} A_j p_{im+jm})_{i\in I_n},$$

$$\pi_m(\Phi((p_i)_{i\in I_n})) = \pi_m((\sum_{j=0}^{n-1} A_j p_{i+j})_{i\in I_n}) = (\sum_{j=0}^{n-1} A_j p_{im+j})_{i\in I_n}.$$

Badając pierwszą współrzędną (tzn. $i = 0$) tych wyrażeń dostajemy $A_j = A_{mj}$. Wobec dowolności m wynika stąd, że $A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1}$ oznaczmy tę wspólną wartość przez B.

Wróćmy do dowodu tezy zadania. Mamy pokazać, że $\Phi(W_1)$ jest podobny do W_1. Niech $W_1 = (p_i)_{i\in I_n}$. Z poczynionych założeń o środku ciężkości wynika, że $p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1} = 0$. Mamy więc

$$\Phi(W_1) = (A_0p_0 + B(p_1 + \ldots + p_{n-1}))_{i\in I_n} = ((A - B)p_0)_{i\in I_n}.$$

Oznacza to, że wielokąt $W_n = \Phi(W_1)$ jest obrazem wielokąta W_1 w jednokładności o środku w $(0, 0)$ i skali $(A - B)$, czyli są podobne. $\square$

9. Kostki jednostkowe sześcianu $n \times n \times n$ pomalowano n kolorami, przy czym każdy kolor został użyty n^2 razy. Udowodnić, że istnieje prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu, która przecina kostki pokolorowane na co najmniej $\sqrt[3]{n}$ różnych kolorów.

Rozwiązanie:

Lemat. *Dany jest skończony zbiór S punktów w przestrzeni. Oznaczmy przez S_x, S_y, S_z rzuty tego zbioru na płaszczyzny yz, zx, xy. Wówczas zachodzi nierówność $|S|^2 \leqslant |S_x||S_y||S_z|$.*

Dowód. Prowadzimy indukcję względem liczby różnych współrzędnych z w zbiorze S. Jeżeli wszystkie punkty mają tę samą współrzędną z to $|S_z| = |S|$ i pozostaje pokazać, $|S| \leqslant |S_x| \cdot |S_y|$. Ostatnia nierówność wynika stąd, że przyporządkowanie punktowi jego współrzędnych (x, y) jest oczywiście iniektywne.

Załóżmy, że w zbiorze S występują co najmniej dwie różne współrzędne z. Dzielimy S płaszczyzną prostopadłą do osi z na dwie niepuste części U i T. Oczywiście $|S| = |U|+|T|$ oraz $|S_x| = |T_x|+|U_x|$ oraz $|S_y| = |T_y|+|U_y|$. Z założenia indukcyjnego mamy

$$|S| = |T| + |U| \leqslant \sqrt{|T_x||T_y||T_z|} + \sqrt{|U_x||U_y||U_z|} \leqslant \sqrt{|S_z|}(\sqrt{|T_x||T_y|} + \sqrt{|U_x||U_y|}),$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z oczywistych $|S_z| \geqslant |U_z|$ i $|S_z| \geqslant |T_z|$. Pozostaje skorzystać z nierówności $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}$ prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, by uzyskać tezę

$$|S| \leqslant \sqrt{|S_z|(|T_x| + |U_x|)(|T_y| + |U_y|)} = \sqrt{|S_x||S_y||S_z|}.$$

□

Rozważmy graf dwudzielny, którego wierzchołki po lewej stronie odpowiadają $3n^2$ prostym równoległym do krawędzi sześcianu $L_1, L_2, \ldots, L_{3n^2}$, zaś wierzchołki po prawej odpowiadają n kolorom $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Jeżeli kolor C_i występuje na prostej L_j to w naszym grafie jest między odpowiednimi wierzchołkami krawędź.

Ustalmy pewien kolor C_i. Niech S_i oznacza zbiór kostek koloru i. Zauważmy, że liczba prostych pionowych które zawierają kolor C_i jest równa liczbie kwadratów w rzucie S_i na płaszczyznę xy, oznaczmy ten zbiór $S_{i,z}$. Analogicznie definiujemy zbiory $S_{i,x}, S_{i,y}$. Widzimy, że

$$\deg(C_i) = |S_{i,x}| + |S_{i,y}| + |S_{i,z}| \geqslant 3\sqrt[3]{|S_{i,x}||S_{i,y}||S_{i,z}|} \geqslant 3|S|^{2/3} = 3n^{4/3},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z Lematu . Suma stopni wierzchołków po lewej stronie naszego grafu jest taka sama jak suma stopni wierzchołków po prawej stronie naszego grafu. Oznacza to, że

$$\sum_{i=1}^{3n^2} \deg(L_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg C_i \geqslant 3n^{7/3}.$$

Stąd

$$\max_{i=1,\ldots,3n^2} \deg(L_i) \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{3n^2} \deg(L_i)}{3n^2} \geqslant n^{1/3}.$$

□

10. Dany jest trójkąt ABC w którym $\sphericalangle BAC = 90°$. Punkt H jest spodkiem wysokości opuszczonej z punktu A, natomiast punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu H na boki odpowiednio CA i AB. Niech punkty K, L i N będą H-środkami dopisanymi do trójkątów HBF, HCE i HEF. Pokazać, że A jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KLN.

Uwaga. W trójkącie ABC punkt I jest A-środkiem dopisanym do trójkąta ABC, gdy okrąg o środku w I dopisany do trójkąta jest styczny do boku BC.

Rozwiązanie:

Niech X będzie rzutem punktu H na prostą EF oraz niech J będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt HEF a punkt $D \in NX$ odbiciem punktu J względem EF. Wówczas

$$\sphericalangle NED = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle FEH - \frac{1}{2}FEH = 90° - \sphericalangle FEH = \sphericalangle AEF,$$

stąd proste ED i EA są izogonalne względem kąta NEF. Analogicznie proste FD i FA są izogonalne względem kąta NFE. Łącząc powyższe fakty dostajemy, że punkty A i D są izogonalnie sprzężone w trójkącie NEF, więc $\sphericalangle FNA = \sphericalangle END \equiv \sphericalangle ENX$.

Jeżeli punkt S jest H-środkiem dopisanym do trójkąta HAB, to z podobieństwa trójkątów HEF i HAB oraz odpowiedniości między parami punktów (X, A) i (F, S) wynika, że $\sphericalangle ASF = \sphericalangle ENX = \sphericalangle FNA$, stąd na czworokącie $ANSF$ można opisać okrąg. Jednakże $\sphericalangle BFK = \sphericalangle ASB = 45°$, więc na czworokącie $ASKF$ również można opisać okrąg i podobnie na czworokątach $ANKF$ i $ANLE$ można opisać okręgi. Zatem $\sphericalangle KNA = \sphericalangle BFK = 45°$ oraz $\sphericalangle ANL = 45°$, stąd NA is dwusieczną kąta proste KNL. Ponadto

$$\begin{aligned}\sphericalangle KAL &= 90° + \sphericalangle KAF + \sphericalangle LAE = 90° + \sphericalangle KNF + \sphericalangle LNE = \\ &= 90° + 90° - \sphericalangle ENF = 135°,\end{aligned}$$

co oznacza, że punkt A pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KLN. □

11. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ω przechodzący przez punkt A i styczny do boku BC w punkcie D, przecina okrąg opisany o na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie P. Punkt $Q \neq P$ jest punktem przecięcia prostej DP z okręgiem o. Niech M oznacza środek odcinka ID. Załóżmy, że proste PM i AI są różne i przecinają się w punkcie R. Pokazać, że przy zmieniającym się okręgu ω, okrąg opisany na trójkącie PQR przechodzi przez stały punkt.

Rozwiązanie:

Rozpoczniemy od pokazania lematu

Lemat. *(IMO 2010) Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina okrąg opisany o w punkcie X. Punkt Q leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt D leży na odcinku BC po przeciwnej stronie prostej AI niż punkt Q, przy czym $\sphericalangle BAD = \sphericalangle QAC$. Punkt M jest środkiem odcinka ID. Wówczas proste XM i QI przecinają się na o.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\sphericalangle IXM = \sphericalangle AQI$. Biorąc za I_A A-środek dopisany do trójkąta ABC musimy pokazać podobieństwo trójkątów ADI_A oraz AIQ, czyli równość
$$\frac{AD}{AI_A} = \frac{AI}{AQ}.$$
Jednakże na podstawie podobieństwa trójkątów ABD i AQC mamy równość
$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AB}{AD},$$
więc wystarczy uzasadnić związek
$$AI \cdot AI_A = AB \cdot AC,$$
który jest dobrze znany. □

Przejdźmy do głównej części rozwiązania. Bez szkody załóżmy, że punkt P leży na krótszym łuku AB. Łatwo zauważyć, że $\sphericalangle ACQ = \pi - \sphericalangle QPA = \sphericalangle ADB$ (ω styczny do BC w punkcie D). Ponadto $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AQC$, więc
$$\sphericalangle BAD = \pi - \sphericalangle DBA - \sphericalangle ABD = \pi - \sphericalangle ACQ - \sphericalangle CQA = \sphericalangle CAQ,$$
stąd proste AD i AQ są izogonalne względem kąta BAC. Jeżeli AI przecina o po raz drugi w punkcie X, to na podstawie lematu dostajemy, że $U := QI \cap XM$ leży na o. Zatem jeśli XD przecina o w punkcie $S \neq X$ natomiast SI tnie o w punkcie $T \neq S$, to na podstawie twierdzenia Paskala zastosowanego dla sześciokąta $STPQUX$, wynika, że punkty P, M, T są współliniowe. Ponadto, jeśli AX przecina prostą BC w punkcie L i AD tnie o w punkcie $E \neq A$, to dostajemy równość $XB^2 = XC^2 = XI^2 = XL \cdot XA = XD \cdot SX$ (twierdzenie o trójliściu) która pokazuje, że na czworokącie $ALDS$ można opisać okrąg oraz
$$\sphericalangle IDA = \sphericalangle DIX - \sphericalangle DAL = \sphericalangle DSI - \sphericalangle DSL = \sphericalangle LSI.$$
Z tego, że $QE \parallel DL$ ($\sphericalangle LDA = \sphericalangle QPA = \sphericalangle QEA$) wnioskujemy współliniowość punktów Q, L, S (twierdzenie Reima), wobec tego
$$\sphericalangle QPR = \sphericalangle QPT = \sphericalangle QST = \sphericalangle LSI = \sphericalangle ADI.$$

Niech I_A oznacza A-środek dopisany do trójkąta ABC. Z podobieństwa trójkątów ABD i AQC mamy, że $AB \cdot AC = AQ \cdot AD$ podczas, gdy z podobieństwa trójkątów ABI i AI_AC dostajemy $AB \cdot AC = AI \cdot AI_A$, więc
$$\frac{AQ}{AI} = \frac{AI_A}{AD},$$
co oznacza, że trójkąty AQI_A oraz AID są podobne, więc
$$\sphericalangle QI_AR = \sphericalangle QI_AA = \sphericalangle ADI = \sphericalangle QPR.$$
Powyższa równość pozwala stwierdzić, że punkty P, Q, R, I_A leżą na jednym okręgu, więc okrąg opisany na trójkącie PQR, niezależnie od wyboru ω przechodzi przez punkt I_A. □

12. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$ przy czym

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCD = \sphericalangle PDA = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Rozstrzygnąć, czy $ABCD$ musi być czworościanem foremnym a P jego środkiem ciężkości.

Rozwiązanie:

Skonstruujemy czworościan spełniający warunki zadania, który nie jest foremny. Rozważmy okrąg ω o środku w punkcie O. Weźmy takie punkty $A, B, C \in \omega$, że

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Niech $\alpha \in (0, \pi)$. Obrót wokół prostej OB o kąt α przesyła punkt A w punkt D. Ponadto niech E będzie odbiciem symetrycznym punktu B względem płaszczyzny OCD. Wówczas punkt O leży wewnątrz czworościanu $DBCE$ oraz

$$\sphericalangle ODB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCE = \sphericalangle OED = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Oczywiście możemy wybrać α tak aby czworościan $DBCE$ nie był foremny. $\square$

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

   Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści