



III Liceum Ogólnokształcące
im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

OBÓZ PRZYGOTOWAWCZY DO OLIMPIADY
MATEMATYCZNEJ

Krynica Zdrój, 22 – 25 września 2015

Spis treści

Wstęp	2
Lista uczestników obozu	3
Wyniki grupy starszej	4
Wyniki grupy młodszej	5
Zdjęcia	6
Treści zadań	11
Grupa starsza	11
Grupa młodsza	13
Mecz Matematyczny	15
Rozwiązania	17
Grupa starsza	17
Grupa młodsza	25
Mecz Matematyczny	30
Regulamin Meczu Matematycznego	37

Wstęp

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej organizowany przez III LO w Tarnowie odbył się w dniach 22-25 września w Krynicy Zdroju, w domu wypoczynkowym „Józefa”. Kadre obozu stanowili: Michał Baran (student II roku informatyki AGH), Dominik Burek (student IV roku matematyki IMUJ, autor niniejszej broszury), Adam Lasko (nauczyciel III LO w Tarnowie) oraz Marcin Radwański (nauczyciel III LO w Tarnowie, organizator obozu).

W obozie uczestniczyło 38 uczniów z dwóch szkół gimnazjalnych oraz czterech szkół średnich (w tym V LO w Krakowie) którzy zostali podzieleni na trzy grupy: grupę starszą (11 uczniów), grupę młodszą (16 uczniów) oraz grupę gimnazjalną (11 uczniów). Pełną listę uczestników obozu zamieszczono poniżej. W dniach 22, 23, 24 września odbyły się zawody indywidualne dla grupy starszej oraz grupy młodszej, a 25 września został rozegrany mecz matematyczny. Regulamin meczu znajduje się na końcu tej broszury.

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Mecz matematyczny trwał od 21:00 dnia poprzedniego do 9:00. Szczegółowe wyniki zawodów indywidualnych przedstawiają tabele na następnych stronach. Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Kadra obozu

Lista uczestników obozu

III LO w Tarnowie IV LO w Tarnowie V LO w Krakowie

Edyta Garbarz
Filip Gawron
Łukasz Kluska
Paweł Kolendo
Krystian Krakowski
Michał Panek
Krzysztof Pióro
Maciej Płachta
Kamil Poniewierski
Mikołaj Sikora
Przemysław Simajchel
Jakub Węgrecki
Katarzyna Wodzińska
Michał Wójcik
Piotr Zieliński
Piotr Żurek
Magdalena Karaś

Szymon Galara
Adam Mytnik
Tomasz Truszczyński

Jędrzej Kula
Stanisław Nowak
Błażej Rozwoda
Artur Zubilewicz

I LO w Tarnowie Gimnazjum Dwujęzyczne w Tarnowie Gimnazjum nr 2 w Tarnowie

Piotr Kubala
Bogdan Łątka

Antoni Chudy
Aleksandra Dziurok
Wojciech Michałek
Piotr Pawłowski
Jakub Pietraszek
Rafał Pyzik
Rafał Spyra
Jakub Wąs

Mikołaj Duch
Filip Gacek
Adrian Szarek
Marek Zarzycki

Wyniki grupy starszej

		22 września				23 września				24 września				Suma
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	Artur Zubilewicz	6	6	6	2	6	6	6	6	6	6	6	0	62
2	Filip Gawron	6	6	0	0	6	6	6	2	6	6	6	0	50
2	Błażej Rozwoda	6	6	0	0	6	6	6	6	6	6	0	2	50
4	Jakub Węgrecki	6	0	0	0	6	6	6	2	6	6	6	2	46
5	Jędrzej Kula	6	0	5	0	6	6	6	0	6	6	0	0	41
6	Krystian Krakowski	5	0	0	0	6	6	6	0	6	6	6	0	41
7	Stanisław Nowak	6	0	2	0	6	2	6	2	6	6	0	2	38
8	Paweł Kolendo	0	6	0	0	6	6	0	0	6	6	6	0	36
9	Piotr Kubala	6	0	0	0	0	6	0	2	6	6	6	0	32
10	Katarzyna Wodzińska	6	0	0	0	0	0	6	2	6	6	0	0	26
11	Mikołaj Sikora	0	0	0	0	0	6	6	2	6	6	0	0	26

Wyniki grupy młodszej

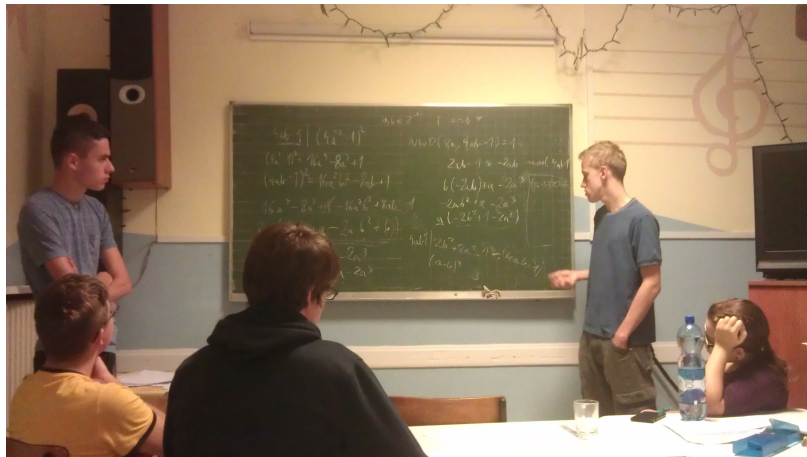
		22 września				23 września				24 września				Suma
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1.	Michał Wójcik	6	6	5	0	6	6	6	6	2	6	0	0	49
2.	Piotr Żurek	0	6	6	0	6	5	6	0	6	6	6	0	47
3.	Krzysztof Pióro	0	6	6	0	6	6	6	0	0	6	0	0	36
4.	Łukasz Kluska	5	6	5	0	6	0	6	0	0	6	0	0	34
5.	Bogdan Łątka	0	0	6	0	5	0	6	6	5	6	0	0	34
6.	Edyta Garbarz	0	6	5	0	6	0	6	0	2	6	0	0	31
7.	Michał Panek	0	6	6	0	6	0	6	0	0	6	0	0	30
8.	Maciej Płachta	0	0	6	0	5	6	0	0	0	6	6	0	29
9.	Kamil Poniewierski	0	6	0	0	5	0	6	2	0	6	0	0	25
10.	Rafał Pyzik	0	6	5	0	6	0	6	0	0	0	0	0	23
11.	Magdalena Karaś	0	5	0	0	6	0	6	0	0	6	0	0	23
12.	Przemysław Simajchel	0	6	0	0	5	0	0	0	5	6	0	0	22
13.	Szymon Galara	0	0	0	0	6	6	6	0	0	0	0	0	18
14.	Tomasz Truszczyński	0	0	0	0	6	0	0	0	2	0	0	0	8
15.	Piotr Zieliński	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5
16.	Adam Mytnik	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Zdjęcia









Treści zadań

Grupa starsza

1. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$a_k + a_l = a_m + a_n,$$

dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich k, l, m i n takich, że $kl = mn$. Pokazać, że jeśli liczba p dzieli liczbę q , to $a_p \leq a_q$.

2. Czworokąt $ABCD$, w którym $AB > CD$ i $BC > AD$, jest wpisany w okrąg. Punkty X i Y leżą na bokach AB i BC , przy czym $AX = CD$ i $CY = AD$. Punkt M jest środkiem odcinka XY . Wykazać, że $\angle AMC = 90^\circ$.

3. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A, B, C, D) , że A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z D oraz D wygrał z A . Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A, B, C) , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .
(Uwaga: Trójki (A, B, C) , (B, C, A) i (C, A, B) uważamy za jedną trójkę.)

4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^4 + 1$ jest większy od $2n$.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x'_1, \\ x_2 + x_3 = 2x'_2, \\ \dots \\ x_{2015} + x_1 = 2x'_{2015}, \end{cases}$$

gdzie $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2015}$ jest permutacją liczb $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Każdemu niepustemu podzbirowi A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A , to

$$w(A) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k+1} a_k.$$

Obliczyć sumę wszystkich $2^n - 1$ otrzymanych liczb $w(A)$.

7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^5 + n^4 + 1$ jest pierwsza.

8. Sfery opisana oraz wpisana w czworościan $ABCD$ mają wspólny środek, $AB = CD$ oraz wszystkie ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnić, że środki krawędzi czworościanu $ABCD$ leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy jest on foremny.

9. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty K, L, M są symetryczne do punktu P odpowiednio względem środków boków BC, CA, AB . Wykazać, że proste AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie.

10. Na ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ wykonujemy następującą operację: W każdym kroku zamieniamy dotychczasowy ciąg $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ na ciąg $|x_1 - A|, |x_2 - A|, \dots, |x_{2015} - A|$ dla pewnej liczby rzeczywistej A . W każdym kroku wartość liczby A może być różna. Pokazać, że po pewnej liczbie kroków możemy otrzymać ciąg składający się z samych zer.

11. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k > 2$), będące elementami zbioru $\{1, \dots, n\}$. Ponadto, dla każdego $i = 1, \dots, k - 1$, liczba n jest dzielnikiem liczby $a_i(a_{i+1} - 1)$. Udowodnić, że n nie jest dzielnikiem liczby $a_k(a_1 - 1)$.

12. Ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ jest zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Pokazać, że wielomian P spełnia zależność:

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy należy do ciągu $\{P_n\}_{n=1}^\infty$.

Grupa młodsza

1. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (a, b) takie, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą i $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

2. W trójkącie ABC ($AB < AC$) punkt X jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta BAC . Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC . Pokazać, że punkty M , X i N są współliniowe.

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykazać, że istnieją tacy trzej zawodnicy A , B i C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

4. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$a_k + a_l = a_m + a_n,$$

dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich k , l , m i n takich, że $kl = mn$. Pokazać, że jeśli liczba p dzieli liczbę q , to $a_p \leq a_q$.

5. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geq 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnić, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykazać, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

7. Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ jest większy od 1. Wykazać, że liczba $abc - 1$ jest złożona.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x'_1, \\ x_2 + x_3 = 2x'_2, \\ \dots \\ x_{2015} + x_1 = 2x'_{2015}, \end{cases}$$

gdzie $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2015}$ jest permutacją liczb $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$.

9. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

10. Każdemu wierzchołkowi 2015-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

11. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że liczba $2^n - n$ jest podzielna przez p .

12. W ostrosłupie $ABCS$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku S są proste. Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę ABC . Udowodnić, że punkt T jest ortocentrum trójkąta ABC .

Mecz Matematyczny

1. Ciąg $\{a_n\}_{n \geq 1}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}.$$

Pokazać że a_n jest całkowite dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że funkcja $f(x) = x^n$ jest sumą n funkcji okresowych.

3. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b i c takich, że $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ zachodzi nierówność

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{2abc}.$$

4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że

$$\phi(n) = \frac{n}{3},$$

gdzie $\phi(n)$ jest liczbą liczb względnie pierwszych z n i mniejszych od n .

5. Ciąg $\{a_n\}_{n \geq 1}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+1} + a_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że każda liczba całkowita dodatnia posiada wielokrotność będącą wyrazem ciągu $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

6. Dane są liczby całkowite dodatnie a i b takie, że liczba $4ab - 1$ dzieli liczbę $(4a^2 - 1)^2$. Pokazać, że $a = b$.

7. Niech $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ będzie rodziną podzbiorów n -elementowego zbioru $\mathcal{A}$ spełniającą warunek: Dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in \mathcal{A}$ istnieje podzbiór $A_i \in \mathcal{F}$ zawierający dokładnie jeden z nich. Pokazać, że $2^k \geq n$.

8. W 4030 pól tablicy $\mathcal{A}$ o wymiarach 2015×2015 wpisano liczby rzeczywiste. Pokazać, że dla pewnej liczby całkowitej $k > 1$ istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ wpisane w pewne pola tablicy $\mathcal{A}$ w taki sposób, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ liczby a_{2i-1} i a_{2i} są w tym samym wierszu, natomiast liczby a_{2i} oraz a_{2i+1} leżą w tej samej kolumnie (przyjmujemy, że $a_{2k+1} := a_1$).

9. Dany jest zbiór $\mathcal{S}$ złożony z 2015 punktów na płaszczyźnie, które nie leżą na jednej prostej. W każdy punkt zbioru $\mathcal{S}$ wpisana została pewna liczba rzeczywista, przy czym spełniony jest następujący warunek: Na dowolnej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa punkty zbioru $\mathcal{S}$ suma wpisanych liczb jest równa 0. Pokazać, że wszystkie wpisane liczby są równe 0.

10. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB^\rightarrow$ i $AC^\rightarrow$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że

$$4 \cdot BK \cdot CL = BC^2.$$

Punkt M jest środkiem boku BC . Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

11. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt K leży na boku AB , punkt L na boku AC oraz punkty K , O i L są współliniowe. Punkt R jest środkiem odcinka BL , zaś S jest środkiem odcinka CK . Udowodnić, że $\angle BAC = \angle SOR$.

12. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H , a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O . Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Rozwiązania

Grupa starsza

1. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$a_k + a_l = a_m + a_n,$$

dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich k, l, m i n takich, że $kl = mn$. Pokazać, że jeśli liczba p dzieli liczbę q , to $a_p \leq a_q$.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw, że dla dowolnej liczby całkowitej $t > 1$ zachodzi nierówność $a_1 \leq a_t$. Gdyby $a_t < a_1$ dla pewnego $t > 1$, to z warunków zadania mielibyśmy:

$$a_{t^2} = a_t + a_t - a_1 < a_t,$$

stąd ciąg $\{a_{t^{2^n}}\}_{n=1}^{\infty}$ byłby ściśle malejącym ciągiem liczb naturalnych — sprzeczność.

Weźmy teraz $l \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $q = lp$. Wówczas:

$$a_p = a_q + a_1 - a_l \leq a_q.$$

□

2. Czworokąt $ABCD$, w którym $AB > CD$ i $BC > AD$, jest wpisany w okrąg. Punkty X i Y leżą na bokach AB i BC , przy czym $AX = CD$ i $CY = AD$. Punkt M jest środkiem odcinka XY . Wykazać, że $\angle AMC = 90^\circ$.

Rozwiązanie:

Niech A' będzie punktem symetrycznym do punktu A względem punktu M . Wówczas punkt M jest wspólnym środkiem odcinków AA' i XY , więc czworokąt $AXA'Y$ jest równoległobokiem. Mamy równości: $A'Y = AX = CD$, $CY = AD$ oraz $\angle CYA' = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC$, zatem trójkąty $A'YC$ i ADC są przystające. Wobec tego $AC = A'C$ i w trójkącie równoramiennym $AA'C$ środkowa AM pokrywa się z wysokością, czyli $AM \perp CM$. □

3. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A, B, C, D) , że

A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z D oraz D wygrał z A . Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A, B, C) , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

(Uwaga: Trójki (A, B, C) , (B, C, A) i (C, A, B) uważamy za jedną trójkę.)

Rozwiązanie:

Nazwijmy *trójką remisową* zbiór złożony z trzech zawodników, których można tak oznaczyć literami A, B, C , że A wygrał z B , B wygrał z C i C wygrał z A . Mamy więc znaleźć największą możliwą liczbę trójek remisowych.

Wykażemy, że jeden zawodnik nie może należeć do dwóch różnych trójek remisowych. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że dwie różne trójki mają wspólnych niektórych zawodników. Wtedy istnieje taki zawodnik A należący do obu tych trójek, że zawodnik pokonany przez A w pierwszej trójce jest inny niż zawodnik pokonany przez A w drugiej trójce. Tych dwóch zawodników, którzy przegrali z A , możemy tak oznaczyć symbolami B i C , że B wygrał z C . Niech ponadto D będzie trzecim zawodnikiem tej z rozważanych trójek, do której należą A i C ; wówczas D przegrał z C oraz wygrał z A . Wobec tego A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z D oraz D wygrał z A , co przeczy warunkom zadania.

Zatem każdy zawodnik należy do co najwyżej jednej trójki remisowej. Stąd wniosek, że trzykrotność liczby tych trójek nie przekracza n . W efekcie trójek remisowych jest nie więcej niż m , gdzie m jest największą liczbą całkowitą, dla której $m \leq \frac{1}{3}n$.

Wskażemy teraz przykład turnieju o wymaganej własności, w którym liczba trójek remisowych wynosi co najmniej m .

W tym celu ponumerujemy zawodników liczbami $1, 2, 3, \dots, n$ i określmy wyniki rozgrywek przyjmując, że każdy mecz został wygrany przez zawodnika o mniejszym numerze, z następującymi wyjątkami: dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$ zawodnik o numerze $3k - 2$ przegrał z zawodnikiem o numerze $3k$. Wówczas dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$ zawodnicy o numerach $3k - 2, 3k - 1$ i $3k$ tworzą trójkę remisową.

Przypuśćmy wreszcie, że istnieje czwórka (A, B, C, D) opisana w treści zadania; możemy przyjąć, że zawodnik A ma w tej czwórce najmniejszy numer. Ponieważ A przegrał z zawodnikiem D o większym numerze, więc dla pewnego k zawodnicy A i D mają odpowiednio numery $3k - 2$ i $3k$. To oznacza, że D pokonał zawodników o numerach większych od $3k$. W takim razie C ma numer mniejszy od $3k$ i większy od $3k - 2$, czyli numer $3k - 1$. Jednak w tej sytuacji numer zawodnika B wynosi co najmniej $3k + 1$, a każdy taki zawodnik przegrał z C , w sprzeczności z przypuszczeniem, że B wygrał z C .

Wynika stąd, że największa możliwa liczba trójek remisowych wynosi m . □

4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^4 + 1$ jest większy od $2n$.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że zbiór $\mathcal{P}$ — dzielników pierwszych liczb w ciągu $\mathcal{S} := \{n^4 + 1\}_{n=1}^\infty$ jest nieskończony. Istotnie, gdyby liczby $p_1, p_2, \dots, p_k$ były jedynymi elementami zbioru $\mathcal{P}$, to dla dowolnej liczby pierwszej p dzielącej liczbę $(p_1 p_2 \dots p_k)^4 + 1$ mielibyśmy $p \neq p_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ — sprzeczność.

Dla $p \in \mathcal{P}$ istnieje liczba całkowita m taka, że p dzieli $m^4 + 1$. Jeśli r jest resztą z dzielenia liczby m przez p to łatwo widzimy, że p dzieli liczby $r^4 + 1$ oraz $(p - r)^4 + 1$, stąd dla $n = \max\{r, p - r\}$ mamy, że $p > 2n$ oraz p dzieli $n^4 + 1$ — co oznacza, że dla $p \in \mathcal{P}$ znaleźliśmy liczbę $n_p := n$ spełniającą warunki zadania.

Wystarczy teraz zauważyć, że nieskończoność zbioru $\mathcal{P}$ oraz nierówność $n_p \geq \sqrt[4]{p} - 1$ dla każdego $p \in \mathcal{P}$, dają nieskończoność zbioru $\{n_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ — co należało dowieść. $\square$

Uwaga:

Bazując na rozumowaniu z pierwszego akapitu można pokazać, że zbiór dzielników pierwszych liczb w ciągu $\{P(n)\}_{n=1}^\infty$ jest nieskończony dla dowolnego wielomianu P o współczynnikach całkowitych.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x'_1, \\ x_2 + x_3 = 2x'_2, \\ \dots \\ x_{2015} + x_1 = 2x'_{2015}, \end{cases}$$

gdzie $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2015}$ jest permutacją liczb $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $x_{2016} = x_1$. Z warunków zadania mamy równości

$$\sum_{n=1}^{2015} x_n^2 = \sum_{n=1}^{2015} x_n'^2 = \sum_{n=1}^{2015} \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_n^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_n x_{n+1},$$

stąd

$$\sum_{n=1}^{2015} x_n x_{n+1} = \sum_{n=1}^{2015} x_n^2.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{2015} \left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_n^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_n x_{n+1} = 0,$$

wobec tego $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. □

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Każdemu niepustemu podzbirowi A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A , to

$$w(A) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k+1} a_k.$$

Obliczyć sumę wszystkich $2^n - 1$ otrzymanych liczb $w(A)$.

Rozwiązanie:

Dla $n = 1$ rozważana suma jest równa 1. Przyjmijmy więc, że $n \geq 2$.

Jeżeli $\{B_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}}$, gdzie $m = 2^{n-1} - 1$, jest rodziną niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$, to łatwo zauważyć, że rodzina

$$\{B_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \cup \{B_i \cup \{n\}\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \cup \{n\}$$

jest zbiorem wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ponadto dla $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ i zbioru $B_i = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ mamy

$$\begin{aligned} w(B_i) + w(B_i \cup \{n\}) &= (b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{k+1} b_k) + \\ &+ (n - b_1 + b_2 - \dots + (-1)^{k+2} b_k) = n, \end{aligned}$$

stąd rozważana suma jest równa

$$w(\{n\}) + \sum_{i=1}^m (w(B_i) + w(B_i \cup \{n\})) = n + mn = n2^{n-1}.$$

□

7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^5 + n^4 + 1$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Dla $n = 1$ otrzymujemy liczbę pierwszą — 3. Załóżmy, że $n > 1$. Wówczas

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1)$$

oraz każdy z czynników jest większy od 1, stąd rozważana liczba jest złożona. □

8. Sfery opisana oraz wpisana w czworościan $ABCD$ mają wspólny środek, $AB = CD$ oraz wszystkie ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnić, że środki krawędzi czworościanu $ABCD$ leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy jest on foremny.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez S wspólny środek kuli opisanej i wpisanej w czworościan $ABCD$, przez R i r odpowiednio promienie tych kul, zaś przez S_A, S_B, S_C, S_D rzuty S odpowiednio na ściany BCD, ACD, ABD i ABC . Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AS_D^2 = R^2 - r^2 = BS_D^2 = CS_D^2,$$

czyli punkt S_D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Postępując analogicznie dla innych ścian otrzymujemy, że S_A, S_B i S_C są również środkami okręgów odpowiednich ścian i promienie wszystkich tych okręgów są równe i wynoszą $\sqrt{R^2 - r^2}$.

Ponieważ ściany są trójkątami ostrokątnymi, to środki okręgów opisanych leżą wewnątrz tych ścian. Zauważmy, że promień okręgu opisanego na trójkącie oraz długości dwóch kolejnych boków jednoznacznie determinują trójkąt. Pokażemy, że ściany ABC oraz BCD są przystające. Promień okręgu opisanego na obu ścianach jest równy, zaś bokom AB i BC w trójkącie ABC odpowiadają w trójkącie BCD boki CD i BC o tych samych długościach. Analogicznie wykazujemy przystawanie pozostałych ścian otrzymując, że wszystkie ściany czworościanu $ABCD$ są przystające.

Dowolny czworościan można wpisać w równoległościan tak, by wierzchołki czworościanu pokrywały się z pewnymi wierzchołkami równoległościanu tak, że żadne dwa wierzchołki równoległościanu będące końcem jednej krawędzi nie są wierzchołkami czworościanu. Jeżeli czworościan ten ma przystające ściany, to równoległościan jest prostopadłościanem, gdy zaś jest foremny, to prostopadłościan ten jest sześcianiem. W tym momencie teza zadania sprowadza się do faktu, że środki ścian prostopadłościanu leżą na jednej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy prostopadłościan ten jest sześcianiem — co jest oczywiste. $\square$

9. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty K, L, M są symetryczne do punktu P odpowiednio względem środków boków BC, CA, AB . Wykazać, że proste AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez Q środek odcinka AK . Wykażemy, że proste AK, BL, CM przecinają się w punkcie Q .

Zauważmy, że czworokąty $APCL$ i $BKCP$ są równoległobokami, gdyż środki ich przekątnych pokrywają się. Wobec tego odcinki AL i BK są równe i równoległe, czyli czworokąt $ABKL$ jest równoległobokiem. Punkt Q jest więc punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Stąd wynika, że

punkty B, Q, L leżą na jednej prostej. Podobnie wykazujemy, że punkty C, Q, M leżą na jednej prostej, co kończy rozwiązanie zadania.

10. Na ciągu liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ wykonujemy następującą operację: W każdym kroku zamieniamy dotychczasowy ciąg $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ na ciąg $|x_1 - A|, |x_2 - A|, \dots, |x_{2015} - A|$ dla pewnej liczby rzeczywistej A . W każdym kroku wartość liczby A może być różna. Pokazać, że po pewnej liczbie kroków możemy otrzymać ciąg składający się z samych zer.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że 2015 kroków jest wystarczająca do tego, by otrzymać ciąg składający się z samych zer. Niech ciąg $(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_{2015}^{(k)})$ określa wyjściowy ciąg po k krokach. Ponadto niech $A^{(k)}$ oznacza liczbę rzeczywistą wybraną dla kroku k (zgodnie z warunkami zadania).

Weźmy

$$A^{(1)} = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

wówczas

$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = \frac{1}{2}|a_1 - a_2|.$$

Następnie niech

$$A^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_3^{(1)}}{2},$$

wtedy

$$a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = \frac{1}{2}|a_1^{(1)} - a_3^{(1)}|.$$

Analogicznie dla k -tego kroku niech

$$A^{(k)} = \frac{a_1^{(k-1)} + a_{k+1}^{(k-1)}}{2},$$

otrzymując w ten sposób równości

$$a_1^{(k)} = a_2^{(k)} = \dots = a_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{2}|a_1^{(k-1)} - a_{k+1}^{(k-1)}|.$$

Tym sposobem w 2014 - kroku otrzymamy ciąg $(a_1^{(2014)}, a_2^{(2014)}, \dots, a_{2015}^{(2014)})$, gdzie

$$a_1^{(2014)} = a_2^{(2014)} = \dots = a_{2015}^{(2014)}.$$

Wystarczy teraz w 2015 kroku położyć: $A^{(2015)} := a_1^{(2014)} - 1$. □

11. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k > 2$), będące elementami zbioru $\{1, \dots, n\}$. Ponadto, dla każdego $i = 1, \dots, k-1$, liczba n jest dzielnikiem liczby $a_i(a_{i+1} - 1)$. Udowodnić, że n nie jest dzielnikiem liczby $a_k(a_1 - 1)$.

Rozwiązanie:

Założmy, że teza nie zachodzi, czyli n dzieli $a_k(a_1 - 1)$. Zatem

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv a_1 \cdot a_2 \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \equiv \dots \equiv a_1 \cdot \dots \cdot a_k \equiv a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-2} \cdot a_k \equiv \dots \\ &\dots \equiv a_1 \cdot a_k \equiv a_k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Sprzeczność, gdyż $|a_1 - a_k| < n$. □

12. Ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Pokazać, że wielomian P spełnia zależność:

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy należy do ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Rozwiązanie:

Najpierw wykażemy, że elementy ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniają równanie dane w treści. Udowodnimy to przez indukcję. Dla $n = 0$ mamy $P_0(x) = x$, który istotnie spełnia równanie. Założmy, że $R(x) = P_n(x)$ spełnia równanie $R(x^2 + 1) = (R(x))^2 + 1$, wykażemy, że $P(x) = R(x)^2 + 1 = P_{n+1}(x)$ również spełnia rozważane równanie. Istotnie jest to prawdą, mamy bowiem

$$P(x^2 + 1) = R(x^2 + 1)^2 + 1 = ((R(x))^2 + 1)^2 + 1 = (P(x))^2 + 1.$$

Udowodnimy teraz, że jedynie wielomiany z ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniają warunki zadania. Zauważmy, że

$$P^2(x) = P(x^2 + 1) - 1 = P((-x)^2 + 1) - 1 = P^2(-x),$$

stąd dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $P(x) = P(-x)$ lub $P(x) = -P(-x)$. W tym drugim przypadku łatwo widzimy, że $P(0) = 0$ co przez łatwą indukcję implikuje, że $P(n) = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $P(x) = P_0(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Możemy więc założyć, że $P(x) = P(-x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że wielomian P nie posiada jednomianów stopnia nieparzystego, stąd istnieje wielomian Q o współczynnikach rzeczywistych taki, że dla $x \in \mathbb{R}$ mamy równość $P(x) = Q(x^2)$. Zatem

$$Q((x^2 + 1)^2) = P(x^2 + 1) = P^2(x) + 1 = Q^2(x^2) + 1,$$

stąd dla wielomianu $R(x) := Q(x - 1)$ mamy równość

$$R(y^2 + 1) = R^2(y) + 1 \quad \text{dla } y \in \{x^2 + 1\}_{x \in \mathbb{R}},$$

więc $R(x^2 + 1) = R^2(x) + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ostatecznie

$$P(x) = Q(x^2) = R(x^2 + 1) = R^2(x) + 1,$$

gdzie R spełnia warunek dany w zadaniu i ma stopień mniejszy niż P . $\square$

Grupa młodsza

1. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (a, b) takie, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą i $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $a^2 + b^2 = p$ oraz $2ab = n^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a n jest liczbą naturalną. Wówczas

$$p = (a + b)^2 - n^2 = (a + b - n)(a + b + n).$$

Liczby p i $a + b + n$ są dodatnie, więc $a + b - n$ również jest liczbą dodatnią. Ponadto, skoro p jest liczbą pierwszą, to $a + b - n = 1$ oraz $a + b + n = p$. Z pierwszej równości otrzymujemy $n = a + b - 1$, czyli $(a + b - 1)^2 = 2ab$ — co jest równoważne równości: $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1$.

Stąd wniosek, że $a = 1$ i $b = 2$ lub $a = 2$ i $b = 1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że w obu przypadkach $p = a + b + n = 2 + 1 + 2 = 5$ jest liczbą pierwszą. Warunki zadania spełniają zatem pary $(a, b) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$.

2. W trójkącie ABC ($AB < AC$) punkt X jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta BAC . Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC . Pokazać, że punkty M , X i N są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech Y będzie punktem przecięcia się prostych BX i AC . Wówczas w trójkącie ABY wysokość AX jest również dwusieczną, stąd trójkąt ABY jest równoramienny, więc punkt X jest środkiem odcinka BY . Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia *Talesa* otrzymujemy tezę zadania.

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykazać, że istnieją tacy trzej zawodnicy A , B i C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

Rozwiązanie:

Nazwijmy danych zawodników $A_1, A_2, \dots, A_n$ i przyjmijmy, że siedzą oni przy okrągłym stole w wymienionej kolejności, zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Wtedy, na mocy warunków zadania, A_1 wygrał z A_2 , A_2 wygrał z $A_3, \dots, A_{n-1}$ wygrał z A_n oraz A_n wygrał z A_1 . Jeśli ponadto zawodnik A_1

wygrał z zawodnikiem A_{n-1} , to przyjmując $A := A_1, B := A_{n-1}, C := A_n$, otrzymujemy trójkę zawodników A, B, C spełniającą tezę zadania. Załóżmy więc, że A_{n-1} wygrał z A_1 i usuńmy zawodnika A_n od stołu. Wtedy pozostałych $n - 1$ zawodników $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ spełnia założenia treści zadania: każdy z nich wygrał z osobą, która siedzi obok niego, po jego lewej stronie. Kontynuując zatem powyższe rozumowanie i usuwając kolejnych zawodników, doprowadzimy do sytuacji, w której przy stole pozostaną tacy trzej zawodnicy A_1, A_2, A_3 , że A_1 wygrał z A_2 , A_2 wygrał z A_3 oraz A_3 wygrał z A_1 . Przyjmując wtedy $A = A_1, B = A_2, C = A_3$, dostajemy trójkę zawodników A, B, C spełniającą tezę zadania.

4. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ spełnia warunek

$$a_k + a_l = a_m + a_n,$$

dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich k, l, m i n takich, że $kl = mn$. Pokazać, że jeśli liczba p dzieli liczbę q , to $a_p \leq a_q$.

Rozwiązanie:

Patrz zadanie 1 grupy starszej.

5. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geq 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnić, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

Rozwiązanie:

Ponieważ każdy z trzech kolorów został użyty, więc istnieje przynajmniej jeden trójkąt o wierzchołkach różnych kolorów. Spośród wszystkich takich trójkątów wybierzmy ten, który ma najmniejsze pole (jeśli trójkątów o najmniejszym polu jest więcej niż jeden, wybieramy dowolny z nich). Nazwijmy ten trójkąt ABC . Wykażemy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Przypuśćmy, że do wnętrza trójkąta ABC należy pewien zaznaczony punkt P . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt P jest tego samego koloru, co punkt A . To oznacza, że każde dwa wierzchołki trójkąta BCP mają różne kolory. Jednak pole tego trójkąta jest mniejsze od pola trójkąta ABC . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że do wnętrza trójkąta ABC nie należy żaden zaznaczony punkt.

6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykazać, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez K i L odpowiednio środki odcinków AC i CE . Ponieważ punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC , więc $BK = \frac{1}{2} \cdot AC$. Podobnie uzasadniamy, że $LD = \frac{1}{2} \cdot CE$. Ponadto $KL = \frac{1}{2} \cdot AE$. Z nierówności trójkąta wynika, że $BK + KL + LD \geq BD$. A zatem $AC + CE + AE \geq 2BD$. $\square$

7. Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a - 1, b - 1, c - 1$ jest większy od 1. Wykazać, że liczba $abc - 1$ jest złożona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb $a - 1, b - 1, c - 1$. Wówczas każda z liczb $a - 1, b - 1, c - 1$ jest podzielna przez d , a zatem istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z , dla których $a - 1 = dx, b - 1 = dy, c - 1 = dz$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} abc - 1 &= (dx + 1)(dy + 1)(dz + 1) - 1 = \\ &= d^3xyz + d^2(xy + yz + zx) + d(x + y + z) = \\ &= d(d^2xyz + d(xy + yz + zx) + x + y + z), \end{aligned}$$

co oznacza, że liczba $abc - 1$ jest podzielna przez d . Ponadto $d > 1$ oraz $d^2xyz + d(xy + yz + zx) + x + y + z > 1$. Wobec tego liczba $abc - 1$ jest złożona. $\square$

8. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x'_1, \\ x_2 + x_3 = 2x'_2, \\ \dots \\ x_{2015} + x_1 = 2x'_{2015}, \end{cases}$$

gdzie $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2015}$ jest permutacją liczb $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $x_{2016} = x_1$. Z warunków zadania mamy równości

$$\sum_{n=1}^{2015} x_n^2 = \sum_{n=1}^{2015} x_n'^2 = \sum_{n=1}^{2015} \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_n^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_n x_{n+1},$$

stąd

$$\sum_{n=1}^{2015} x_n x_{n+1} = \sum_{n=1}^{2015} x_n^2.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{2015} \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_i^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{2015} x_i x_{i+1} = 0,$$

wobec tego $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. □

9. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy wyjściowe równanie przez $(\star)$. Podstawiając $x = y = 0$ do $(\star)$ dostajemy, że $f(0)^2 = f(0)$, stąd $f(0) \in \{0, 1\}$. Jeśli $f(0) = 0$, to wstawiając $y := 0$ do $(\star)$ mamy rozwiązanie $f(x) \equiv 0$.

Zakładając, że $f(0) = 1$, położmy $x = y$ w $(\star)$, wówczas $f(x) \in \{-1, 1\}$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Kładąc $y := \frac{x}{2}$ w $(\star)$ dostajemy równość

$$f(x)f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

co oczywiście implikuje, że $f(x) \equiv 1$. □

10. Każdemu wierzchołkowi 2015-kąta foremego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że takie przyporządkowanie istnieje oraz niech a będzie największą spośród wszystkich przyporządkowanych liczb. Oznaczmy ponadto przez b i c liczby sąsiadujące z liczbą a oraz przyjmijmy, że $b \geq c$. Skoro liczba a jest największa spośród rozpatrywanych liczb, więc $b \leq a$.

Z drugiej strony, ponieważ $c > 0$, więc $b > b - c = |b - c| = a$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisane w treści zadania przyporządkowanie nie istnieje. □

11. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że liczba $2^n - n$ jest podzielna przez p .

Rozwiązanie:

Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej k przyjmijmy $n_k = (p-1)(kp-1)$. Wówczas na podstawie małego twierdzenia *Fermata* otrzymujemy

$$2^n - n = 2^{(p-1)(kp-1)} - (p-1)(kp-1) \equiv 1^{kp-1} - (-1) \cdot (-1) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

skąd wynika, że ciąg liczb $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zdefiniowany powyższym wzorem spełnia warunki zadania. $\square$

12. W ostrosłupie $ABCS$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku S są proste. Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę ABC . Udowodnić, że punkt T jest ortocentrum trójkąta ABC .

Rozwiązanie:

Z zależności $\angle CSB = \angle CSA = 90^\circ$ wnioskujemy, że płaszczyzna ABS jest prostopadła do prostej CS . Prosta AB jest zawarta w płaszczyźnie ABS , więc także jest prostopadła do prostej CS . Ponadto prosta ST jest prostopadła do płaszczyzny ABC , więc zawarta w tej płaszczyźnie prosta AB jest również prostopadła do ST .

Z powyższych obserwacji wynika, że prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny CST , a więc w szczególności do prostej CT , czyli punkt T należy do wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C . Analogicznie dowodzimy, że punkt T należy do pozostałych wysokości w tym trójkącie, więc punkt ten jest ortocentrum trójkąta ABC . $\square$

Mecz Matematyczny

1. Ciąg $\{a_n\}_{n \geq 1}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}.$$

Pokazać że a_n jest całkowite dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wszystkie warazy ciągu są dodatnie oraz $a_{n+1} > a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Podnosząc równość

$$a_{n+1} - 2a_n = \sqrt{3a_n^2 + 1}$$

obustronnie do kwadratu, dostajemy równość

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = 4a_{n+1}a_n + 1.$$

Zatem

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{n+1}^2 + a_n^2 - (a_n^2 + a_{n-1}^2) = 4a_{n+1}a_n + 1 - (4a_na_{n-1} + 1) = 4a_n(a_{n+1} - a_{n-1}),$$

stąd

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4,$$

a ponieważ $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, więc teza zadania jest oczywista. $\square$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że funkcja $f(x) = x^n$ jest sumą n funkcji okresowych.

Rozwiązanie:

Dowodziemy indukcyjnie, że wielomian stopnia n nie jest sumą n funkcji okresowych. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech zatem $n > 1$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że

$$P(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x),$$

gdzie P jest wielomianem stopnia n , a funkcja f_i jest okresowa o okresie t_i dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Zatem

$$P(x + t_n) - P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (f_i(x + t_n) - f_i(x)),$$

ale po lewej stronie mamy wielomian stopnia $n - 1$, a po prawej sumę $n - 1$ funkcji okresowych. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem indukcyjnym, która dowodzi tezy zadania. $\square$

3. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b i c takich, że $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ zachodzi nierówność

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{2abc}.$$

Rozwiązanie:

Niech $c = \min\{a, b, c\}$, wówczas:

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{\frac{a+b-c}{2} + \frac{a+b-c}{2} + 2c}{3} \geq \sqrt[3]{2c \cdot \frac{(a+b-c)^2}{4}} = \sqrt[3]{2abc},$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną oraz z warunków zadania. $\square$

4. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że

$$\phi(n) = \frac{n}{3},$$

gdzie $\phi(n)$ jest liczbą liczb względnie pierwszych z n i mniejszych od n .

Rozwiązanie:

Pokażemy, że ciąg liczb $\{2 \cdot 3^n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunki zadania. Istotnie,

$$\phi(2 \cdot 3^n) = 2 \cdot 3^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 3^{n-1} = \frac{2 \cdot 3^n}{3}.$$

$\square$

5. Ciąg $\{a_n\}_{n \geq 1}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+1} + a_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że każda liczba całkowita dodatnia posiada wielokrotność będącą wyrazem ciągu $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $a_0 = 0$. Weźmy $N \in \mathbb{N}$. Rozważmy ciąg trójek $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) \pmod{N}$. Ciąg ten przyjmuje co najwyżej N^3 różnych wartości. Zatem na

mocy zasady szufladkowej *Dirichleta* znajdziemy takie dwie liczby naturalne $i < j$, że $a_i \equiv a_j \pmod{N}$, $a_{i+1} \equiv a_{j+1} \pmod{N}$ oraz $a_{i+2} \equiv a_{j+2} \pmod{N}$. Z zależności rekurencyjnej widzimy, że $a_k \equiv a_{k+j-i} \pmod{N}$ dla $k \geq i$. Wykorzystując ponownie zależność rekurencyjną zauważamy, że $a_k \equiv a_{k+j-i} \pmod{N}$ dla $k \leq i$, w szczególności N dzieli a_{j-i} . $\square$

6. Dane są liczby całkowite dodatnie a i b takie, że liczba $4ab - 1$ dzieli liczbę $(4a^2 - 1)^2$. Pokazać, że $a = b$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że z warunków zadania łatwo uzyskujemy, że

$$4ab - 1 \mid b^2(4a^2 - 1)^2 - (4ab - 1)(4a^3b - 2ab + a^2) = (a - b)^2.$$

Weźmy pod uwagę równanie

$$(0-1) \quad \frac{(a - b)^2}{4ab - 1} = k$$

dla ustalonej liczby całkowitej dodatniej k . Rozważmy zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich par (a, b) nieujemnych liczb całkowitych a i b spełniających równanie (0-1), to znaczy

$$\mathcal{A} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{(a - b)^2}{4ab - 1} = k \right\}.$$

Spośród wszystkich elementów $(a, b) \in \mathcal{A}$ wybierzmy ten dla którego suma $a + b$ jest najmniejsza, oznaczmy ten element przez (a_0, b_0) . Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $a_0 > b_0 > 0$.

Rozważmy równanie

$$\frac{(x - b_0)^2}{4xb_0 - 1} = k,$$

jest ono równoważne następującemu równaniu kwadratowemu zmiennej x

$$(0-2) \quad x^2 - (2b_0 + 4kb_0)x + b_0^2 + k = 0.$$

Wiemy, że liczba $x_1 = a_0$ jest pierwiastkiem równania (0-2). Korzystając ze wzorów *Vieta* łatwo obliczamy drugi pierwiastek x_2 równania (0-2), mianowicie

$$(0-3) \quad x_2 = 2b_0 + 4kb_0 - a_0 = \frac{b_0^2 + k}{a_0}.$$

Pierwsza z równości (0-3) implikuje, że liczba x_2 jest całkowita i dodatnia. Oznacza to, że $(x_2, b_0) \in \mathcal{A}$.

Jednakże mamy następującą nierówność

$$k = \frac{(a_0 - b_0)^2}{4a_0b_0 - 1} \leq \frac{(a_0 - b_0)(a_0 + b_0)}{4a_0b_0 - 1} = \frac{(a_0^2 - b_0^2)}{4a_0b_0 - 1} < a_0^2 - b_0^2.$$

Łącząc ten wniosek z równością (0-3) mamy

$$x_2 = \frac{b_0^2 + k}{a_0} < \frac{b_0^2 + (a_0^2 - b_0^2)}{a_0} = a_0.$$

Oznacza to, że $x_2 + b_0 < a_0 + b_0$ wbrew minimalności sumy $a_0 + b_0$, sprzeczność. Zatem $a_0 = b_0$ czyli $k = 0$, więc $a = b$. $\square$

7. Niech $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ będzie rodziną podzbiorów n -elementowego zbioru $\mathcal{A}$ spełniającą warunek: Dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in \mathcal{A}$ istnieje podzbiór $A_i \in \mathcal{F}$ zawierający dokładnie jeden z nich. Pokazać, że $2^k \geq n$.

Rozwiązanie:

Każdemu elementowi $x \in A$ przyporządkujemy zbiór

$$S_x = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} \mid x \in A_j\}.$$

Łatwo zauważyć, że z warunków zadania wynika, iż odwzorowanie

$$\phi: \{1, 2, \dots, n\} \ni x \rightarrow S_x \in \{\text{podzbiory zbioru } \{1, 2, \dots, k\}\}$$

jest różnowartościowe, stąd liczba n — moc zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest nie większa niż liczba podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$ czyli 2^k . $\square$

8. W 4030 pól tablicy $\mathcal{A}$ o wymiarach 2015×2015 wpisano liczby rzeczywiste. Pokazać, że dla pewnej liczby całkowitej $k > 1$ istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ wpisane w pewne pola tablicy $\mathcal{A}$ w taki sposób, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ liczby a_{2i-1} i a_{2i} są w tym samym wierszu, natomiast liczby a_{2i} oraz a_{2i+1} leżą w tej samej kolumnie (przyjmujemy, że $a_{2k+1} := a_1$).

Rozwiązanie:

Rozważmy graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$, gdzie V_1 i V_2 są zbiorami odpowiednio wierszy i krawędzi w tablicy $\mathcal{A}$, natomiast zbiór E jest zbiorem krawędzi grafu G zdefiniowanych następująco: Wiersz $R \in V_1$ oraz kolumna $C \in V_2$ są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy w polu $R \cap C$ jest wpisana liczba rzeczywista.

Łatwo zauważyć, że powstał w ten sposób graf G który ma 4030 wierzchołków i 4030 krawędzi, stąd zawiera pewien cykl. Wystarczy teraz zauważyć, że istnienie takiego cyklu jest równoważne tezie zadania. $\square$

Uwaga:

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy dobrze znane fakty z teorii grafów mówiący, że w grafie w którym liczba wierzchołków jest równa liczbie krawędzi istnieje cykl. Można pokazać wynik mocniejszy mianowicie:

Twierdzenie. *Jeżeli w grafie o n wierzchołkach liczba krawędzi wynosi nie mniej niż $\frac{(n-1)k}{2}$, dla $k > 1$, to w grafie tym istnieje cykl długości co najmniej $k + 1$.*

9. Dany jest zbiór $\mathcal{S}$ złożony z 2015 punktów na płaszczyźnie, które nie leżą na jednej prostej. W każdy punkt zbioru $\mathcal{S}$ wpisana została pewna liczba rzeczywista, przy czym spełniony jest następujący warunek: Na dowolnej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa punkty zbioru $\mathcal{S}$ suma wpisanych liczb jest równa 0. Udowodnić, że wszystkie wpisane liczby są równe 0.

Rozwiązanie:

Ponumerujemy dane punkty liczbami od 1 do 2015, a liczbę wpisaną w punkt o numerze i oznaczmy przez x_i . Niech n_i oznacza liczbę prostych przechodzących przez i -ty punkt, które zawierają co najmniej dwa punkty zbioru $\mathcal{S}$. Skoro nie wszystkie punkty leżą na jednej prostej, to $n_i > 1$ dla $i \in \{1, 2, \dots, 2013\}$. Rozważmy teraz wszystkie proste przechodzące przez ustalony punkt o numerze $1 < i < 2015$. Punkt o tym numerze pojawia się na dokładnie n_i takich prostych, a każdy inny punkt zbioru $\mathcal{S}$ pojawia się na dokładnie jednej takiej prostej. Ponieważ suma liczb na wszystkich takich prostych jest równa 0, otrzymujemy równość

$$0 = n_i x_i + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{2013} = (n_i - 1)x_i + P,$$

gdzie $P = x_1 + x_2 + \dots + x_{2013}$. Skoro tak, to dla dowolnych i, j zachodzi równość

$$(n_i - 1)x_i = (n_j - 1)x_j.$$

W szczególności wszystkie liczby $x_1, x_2, \dots, x_{2013}$ są tego samego znaku, gdyż $n_i > 1$ dla $i \in \{1, 2, \dots, 2013\}$. Powyższe spostrzeżenie łatwo już implikuje, że

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2013} = 0.$$

$\square$

10. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB^\rightarrow$ i $AC^\rightarrow$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że

$$4 \cdot BK \cdot CL = BC^2.$$

Punkt M jest środkiem boku BC . Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

Rozwiązanie:

Na mocy powyższej zależności mamy

$$(0-4) \quad \frac{BM}{MK} = \frac{BC}{2 \cdot BK} = \frac{2 \cdot CL}{BC} = \frac{CL}{CM}.$$

Ponadto z założeń zadania wynika, że trójkąt BAC jest równoramienny, skąd uzyskujemy równość kątów $\angle KBM = \angle MCL$. Wraz z warunkiem (0-4) oznacza to, że trójkąty KBM i MCL są podobne (cecha bok-kąt-bok). Korzystając z tego podobieństwa otrzymujemy

$$(0-5) \quad \begin{aligned} \angle KML &= 180^\circ - \angle BMK - \angle LMC = \\ &= 180^\circ - \angle BMK - \angle MKB \\ &= \angle KBM \end{aligned}$$

oraz

$$(0-6) \quad \frac{KM}{ML} = \frac{KB}{MC} = \frac{KB}{BM}.$$

Zależności (0-5) i (0-6) dowodzą, że trójkąty KML i KBM są podobne (cecha bok-kąt-bok), co implikuje równość

$$(0-7) \quad \angle BMK = \angle MLK.$$

Z drugiej strony równość kątów wpisanych opartych na tym samym łuku daje

$$(0-8) \quad \angle MLK = \angle QLK = \angle QPK.$$

Łącząc zależności (0-7) i (0-8) stwierdzamy, że $\angle BMK = \angle QPK$, skąd wprost wynika równoległość prostych BC i PQ . $\square$

11. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt K leży na boku AB , punkt L na boku AC oraz punkty K , O i L są współliniowe. Punkt R jest środkiem odcinka BL , zaś S jest środkiem odcinka CK . Udowodnić, że $\angle BAC = \angle SOR$.

Rozwiązanie:

Niech B', C' oznaczają punkty symetryczne do punktów B, C względem punktu O . Z twierdzenia *Talesa* mamy $SO \parallel KC'$ i $OR \parallel B'L$. Ponadto jeśli X jest punktem przecięcia prostej KC' i okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C , to z twierdzenia *Pascala* dla sześciokąta $ABB'XC'C$ wynika, że punkty K, O oraz przecięcie $B'X$ z AC leżą na jednej prostej. Oznacza to, że proste KO, AC i $B'X$ przecinają się w jednym punkcie, czyli punkt L leży na prostej $B'X$. Wobec tego $\angle SOR = \angle C'XB'$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że łuki BC i $B'C'$ są równej długości, więc $\angle BAC = \angle C'XB'$. $\square$

12. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H , a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O . Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Niech K i L będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami ACD i BCD , a P i Q punktami styczności sfery dopisanej odpowiednio z płaszczyznami ACD i BCD . Wówczas trójkąty KCP i LCQ są przystające. Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ . Trójkąty BQC i BOC są przystające, skąd wynika, że $\angle BCQ = \angle BCO = 90^\circ - \alpha$. Analogicznie $\angle ACP = 90^\circ - \beta$. Niech $\angle BCL = \psi$. Wtedy $\angle ACK = \psi + \beta - \alpha$ (gdyż $\angle PCK = \angle QCL$). Jednakże trójkąty BCH i BCL oraz ACH i ACK są przystające, więc

$$\gamma = \angle ACB = \angle BCH + \angle ACH = \angle BCL + \angle ACK = 2\psi + \beta - \alpha,$$

skąd $\psi = 90^\circ - \beta$. Zatem $CH \perp AB$. Analogicznie dowodzimy, że $BH \perp AC$, a to oznacza, że H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . $\square$

Uwaga:

Zachodzi następujące (nietrudne w dowodzie) twierdzenie

Twierdzenie. *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie P , a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie Q . Wówczas punkty P i Q są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC .*

Teza zadania jest bezpośrednią konsekwencją lematu, gdyż środek okręgu opisanego oraz ortocentrum w trójkącie są punktami izogonalnie sprzężonymi.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N -tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.
Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...
14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo –10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.