III Liceum Ogólnokształcące
im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Kołkówka, 20 marca – 24 marca 2017

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Kołkówka, 20 marca – 24 marca 2017

Dom Wczasów Dziecięcych
33-173 Jodłówka Tuchowska, 275b
tel. 14 652-68-24, 14 652-79-19

Skład tekstu:

Dominik Burek
Maciej Gawron

Wstęp

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej organizowany przez III LO w Tarnowie odbył się w dniach 30 marca - 2 kwietnia w Jodłówce Tuchowskiej, w Domu Wczasów Dziecięcych. Kadrę obozu stanowili: Dominik Burek (student IV roku matematyki IMUJ), Maciej Gawron (doktorant IV roku matematyki IMUJ).

W obozie uczestniczyło 20 uczniów z III LO w Tarnowie, V LO w Krakowie, II LO w Końskich, I LO w Piotrkowie Trybunalskim, Katolickiego Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie oraz Gimnazjum nr 1 w Końskich. Pełną listę uczestników obozu zamieszczono poniżej.

W tych dniach odbyły się zawody indywidualne a 1 kwietnia został rozegrany mecz matematyczny. Regulamin meczu znajduje się na końcu tej broszury. Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli pięć godzin na rozwiązanie trzech zadań. Szczegółowe wyniki zawodów indywidualnych przedstawiają tabele na następnych stronach.

Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Kadra obozu

Lista uczestników obozu

Tarnów

Mikołaj Sikora
Filip Gawron
Paweł Kolendo
Jakub Węgrecki
Przemysław Simajchel
Rafał Pyzik

Kraków

Małgorzata Róg
Jan Guzik
Radosław Żak
Mateusz Sołtys
Mariusz Trela
Tomasz Ślusarczyk
Roman Madej
Michał Woźny
Piotr Ryłko

Końskie

Maciej Dziuba
Mikołaj Grzebieluch
Tomasz Kosmulski
Paweł Wesołowski
Kamil Długosz

Rzeszów

Aleksandra Kowalska
Jan Fornal
Radomił Baran
Karolina Zając
Jan Dziuba
Adrian Maciej

Piotrków Trybunalski

Kamil Galewski
Jan Kociniak

Iława

Tomasz Makowski

Lublin

Jagoda Bracha
Rafał Szulc
Jakub Boguta

Rozkład punktów

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	17	3	4	8
2.	0	0	2	30
3.	1	0	0	31
4.	16	0	0	16
5.	4	0	6	22
6.	2	0	0	30
7.	31	0	0	0
8.	20	0	4	7
9.	0	0	0	31
10.	4	3	3	16
11.	8	0	0	18
12.	0	0	0	26

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Niech $N \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. W szachownicy $N \times N$ dwa przeciwległe narożne pola są pomalowane na czarno, pozostałe zaś są białe. Ruch polega na zamianie na przeciwne kolorów pól w pewnym wierszu lub kolumnie. Jaka jest minimalna liczba pól, jakie trzeba dodatkowo (przed wykonywaniem ruchów) przemalować na czarno, aby po wykonaniu pewnej liczby ruchów móc otrzymać całą czarną szachownicę.

2. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy).$$

3. Dany jest trójkąt ABC i jego okrąg opisany ω o środku w punkcie O. Proste styczne do ω w punktach B i C przecinają się w punkcie X. Okrąg Ω o środku w punkcie X i promieniu XB przecina dwusieczną kąta BAC w punkcie M leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Proste OM i BC przecinają się w punkcie P, natomiast punkty E i F to rzuty prostokątne punktu M na proste odpowiednio CA i AB. Pokazać, że proste PE i FP są prostopadłe.

4. W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $DE \parallel BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ADE a punkty F i G są punktami przecięcia prostej DE z prostymi odpowiednio BP i CP. Punkt $Q \neq P$ jest punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach PDG i PFE. Pokazać, że punkty A, P i Q są współliniowe.

5. Dla liczby całkowitej x, niech $\nu(x)$ oznacza największy nieparzysty dzielnik x. Dane są względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie a i b takie, że $a + \nu(b+1)$ i $b + \nu(a+1)$ są potęgami dwójki. Pokazać, że $a+1$ i $b+1$ są potęgami dwójki.

6. Alicja i Bob na zmianę piszą na tablicy liczby naturalne większe od jeden. Przy czym zabronione jest pisanie liczb, które są kombinacjami liniowymi o współczynnikach całkowitych nieujemnych liczb zapisanych już na tablicy (tzn. liczb postaci $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$, gdzie $k_1, k_2, \ldots, k_n$ to liczby całkowite nieujemne, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to liczby zapisane do tej pory na tablicy). Zaczyna

Alicja. Jeżeli gracz nie może wykonać ruchu to przegrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy ma strategię wygrywającą.

7. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b i c. Pokazać, że co najmniej jedna z liczb a^2+b+c, b^2+c+a i c^2+a+b nie jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Dowolnemu punktowi X w przestrzeni, przypisujemy liczbę rzeczywistą $f(X) \neq 0$ w taki sposób, że dla dowolnego czworościanu $ABCD$ i jego środka sfery wpisanej I zachodzi równość

$$f(I) = f(A)f(B)f(C)f(D).$$

Pokazać, że $f(X) = 1$ dla dowolnego punktu X.

9. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^\pi} + \frac{b^3c}{(3b+c)^\pi} + \frac{c^3a}{(3c+a)^\pi} \geqslant \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^\pi} + \frac{b^2ca}{(2b+c+a)^\pi} + \frac{c^2ab}{(2c+a+b)^\pi}.$$

10. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że istnieje nieskończenie wiele liczb $k > 1$ dla których liczba $1+k+k^2+\ldots+k^n$ dzieli liczbę $1+k^{1!}+k^{2!}+\ldots+k^{n!}$.

11. W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku w punkcie I jest styczny do boków AC i AB w punktach odpowiednio E i F. Punkty M, N i K są środkami boków odpowiednio BC, CA i AB. Prosta EF przecina proste MN i MK w punktach odpowiednio U i V. Punkt X jest środkiem łuku $\widehat{BAC}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC. Pokazać, że prosta XI połowi odcinek UV.

12. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz taki rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_0, a_1, \ldots, a_n$, że liczby $\dfrac{1}{a_0}, \dfrac{1}{a_1}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$ tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnić, że $a_0 \geqslant \left(\dfrac{2017}{2016}\right)^n$.

Zadania trudniejsze

1. W trójkącie ABC okręgi γ i Γ oznaczają odpowiednio okrąg wpisany i opisany. Niech Ω będzie okręgiem stycznym do półprostych AB i AC oraz zewnętrznie stycznym do Γ w punkcie A'. Styczne do γ poprowadzone z punktu A' przecinają Γ w punktach B' i C'. Punkt X jest punktem styczności cięciwy $B'C'$ z γ. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie BXC jest styczny do γ.

2. Dany jest wielomian $W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ o współczynnikach rzeczywistych, o tej własności, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność $W(x) \geqslant 0$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich c, d spełniona jest nierówność

$$a_0 + a_1(c+d) + a_2(c+d)(c+2d) + \ldots + a_n(c+d)(c+2d)\cdots(c+nd) \geqslant 0.$$

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p oraz liczby naturalne n, że liczby $(k+1)^n - 2k^n$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ dają parami różne reszty z dzielenia przez p.

4. Dany jest skończony graf G. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ oznaczamy przez A_n liczbę takich n-elementowych podzbiorów wierzchołków, że każde dwa wierzchołki w podzbiorze są połączone krawędzią. Wykazać, że

$$\frac{n!}{(n+1)^n} A_n^{n+1} \geqslant A_{n+1}^n.$$

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Niech $N \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. W szachownicy $N \times N$ dwa przeciwległe narożne pola są pomalowane na czarno, pozostałe zaś są białe. Ruch polega na zamianie na przeciwne kolorów pól w pewnym wierszu lub kolumnie. Jaka jest minimalna liczba pól, jakie trzeba dodatkowo (przed wykonywaniem ruchów) przemalować na czarno, aby po wykonaniu pewnej liczby ruchów móc otrzymać całą czarną szachownicę.

Rozwiązanie:

Wystarczy przemalować $2(N-2)$ pola, np. wszystkie pola poza narożnymi w pierwszym wierszu i ostatniej kolumnie. Wówczas wystarczy wykonać ruch na pierwszym wierszu i każdej kolumnie poza ostatnią.

Udowodnimy, że jest to optymalna liczba pól, które trzeba przemalować. Ponieważ, zastosowanie tego samego ruchu więcej niż dwukrotnie nie powoduje zmiany szachownicy, możemy przyjąć, że każdy ruch wykonywany jest co najwyżej raz. Ponadto, jeżeli ruch wykonywany na pierwszym wierszu, to musi być też wykonany na pierwszej kolumnie, oraz jeżeli jest wykonywany na ostatnim wierszu, to musi być też wykonany na ostatniej kolumnie. Niech ruch będzie wykonywany na a wierszach, które nie są brzegowe, i b kolumnach, które nie są brzegowe. Oznaczmy $m = N - 2$. Po wykonaniu ruchów kolor $a \cdot b + (m-a) \cdot (m-b)$ pól, które nie są brzegowe się nie zmienił. Oznacza to, że musiały być one przemalowane na początku. Dodatkowo na brzegu, mamy cztery możliwości ruchów, które dają nam: $2(m-b)+2(m-a)+2$ (brak ruchów na brzegu), $b+(m-b)+a+(m-a) = 2m$ (dwa ruchy na brzegu), $2(a+b)+2$ (cztery ruchy na brzegu) pól do przemalowania.

Wykażemy, że $f(a,b) = ab + (m-a)(m-b) + 2(a+b) + 2 \geqslant 2m$. Ponieważ $f(a,b)$ jest funkcją liniową ze względu na a i na b, to

$$f(a,b) \geqslant \min\{f(0,0), f(m,m), f(m,0), f(0,m)\} = \\ = \min\{m^2+2, m^2+2m+2, 2m+2, 2m+2\} \geqslant 2m.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$ab + (m-a)(m-b) + 2((m-a)+(m-b)) + 2 \geqslant 2m.$$

Oznacza to, ze w każdym przypadku musimy przemalować co najmniej $2m = 2(N-2)$ pól. □

2. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy).$$

Rozwiązanie:

Podstawiając $\boxed{x \leftarrow 1, y \leftarrow 0}$ do wyjściowego równania dostajemy $f(1) = f(1) + 0 + f(0)$ czyli $f(0) = 0$. Podstawiając $\boxed{y \leftarrow 0}$ dostajemy $f(x^3) = x^2 f(x)$. Podstawiając do wyjściowego równania $\boxed{y \leftarrow -x}$ dostajemy

$$f(-x^2) = x^2 f(x) + x^2 f(-x) + f(-x^2)$$

stąd $f(x) = -f(-x)$, czyli funkcja f jest nieparzysta.

Podstawiamy do wyjściowego równania $\boxed{x \leftarrow x, y \leftarrow -y}$ i otrzymujemy

$$f(x^3 - y^3 - xy) = x^2 f(x) - y^2 f(y) - f(xy).$$

Dodając tę równość do z wyjściowego równania dostajemy

$$f(x^3 - y^3 - xy) + f(x^3 + y^3 + xy) = 2x^2 f(x) = 2f(x^3).$$

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b znajdziemy takie x, y, że $x^3 - y^3 - xy = a$ oraz $x^3 + y^3 + xy = b$. Istotnie, wystarczy wziąć $x = \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$ zaś y wyznaczyć z równania $\frac{b-a}{2} = y^3 + xy$. Oznacza to, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi równość $f(a) + f(b) = 2f(\frac{a+b}{2})$. W szczególności

$$f(0) + f(a+b) = 2f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + f(b).$$

Czyli funkcja jest addytywna. Podstawiając $\boxed{x \leftarrow x + 1}$ w równości $f(x^3) = x^2 f(x)$ dostajemy

$$f((x+1)^3) = (x+1)^2 f(x+1),$$

czyli

$$f(x^3) + 3f(x^2) + 3f(x) + f(1) = (x^2 + 2x + 1)(f(x) + f(1)).$$

Podobnie dla $\boxed{x \leftarrow x - 1}$ dostajemy

$$f(x^3) - 3f(x^2) + 3f(x) - f(1) = (x^2 - 2x + 1)(f(x) - f(1)).$$

Dodajemy powyższe równości stronami i otrzymujemy

$$2f(x^3) + 6f(x) = 2(x^2 + 1)f(x) + 4xf(1).$$

Ponieważ $f(x^3) = x^2 f(x)$, to powyższa równość jest równoważna $f(x) = xf(1)$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcje tej postaci spełniają naszą równość. $\square$

3. Dany jest trójkąt ABC i jego okrąg opisany ω o środku w punkcie O. Proste styczne do ω w punktach B i C przecinają się w punkcie X. Okrąg Ω o środku w punkcie X i promieniu XB przecina dwusieczną kąta BAC w punkcie M leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Proste OM i BC przecinają się w punkcie P, natomiast punkty E i F to rzuty prostokątne punktu M na proste odpowiednio CA i AB. Pokazać, że proste PE i FP są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Niech $S \neq B$ będzie punktem wspólnym Ω i AB. Wówczas $\sphericalangle BSC = 90° - \sphericalangle A$, więc $CS \perp CA$, zatem $CS \parallel ME$. Oznacza to, że $\sphericalangle MCS = \sphericalangle CME$, więc trójkąty MBE i CMF są podobne. Wobec tego

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MF}{CE} = \frac{BF}{ME},$$

stąd

$$\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{MF}{CE} \cdot \frac{BF}{ME} = \frac{BF}{CE}.$$

Z drugiej strony prosta OM jest symedianą w trójkącie MBC, więc znany jest fakt, że

$$\frac{PB}{PC} = \left(\frac{MB}{MC}\right)^2.$$

Na podstawie powyższych równości dostajemy, że

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{EC}{FB} = 1,$$

więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy pokazaliśmy, że proste AP, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Niech prosta AM przecina proste PE, FP i EF w punktach odpowiednio K, Q i N. Ponieważ proste AP, BE i CF są współpękowe, to pęk prostych $K(E, A, F, B)$ jest harmoniczny. Jednakże prosta KA przechodzi przez środek odcinka EF, więc proste BK i EF są równoległe (wprost z definicji czwórki harmonicznej). Wobec tego na czworokącie $BKMF$ można opisać okrąg. W szczególności $\sphericalangle MBA = \sphericalangle NKF = \sphericalangle NKE$. Analogicznie dowodzimy, że na czworokącie $CEMQ$ można opisać okrąg, stąd $\sphericalangle MCE = \sphericalangle MQE = \sphericalangle MQF$. Jednakże $\sphericalangle NKE + \sphericalangle NEK = 90°$ oraz $\sphericalangle MBF + \sphericalangle MCE = 90°$, więc

$$\sphericalangle NEK = \sphericalangle EQK = \sphericalangle PQK.$$

Oznacza to, że na czworokącie $ENPQ$ można opisać okrąg, więc $\sphericalangle QPE = \sphericalangle QNE = 90°$ — co dowodzi prostopadłość prostych PE i FP. $\square$

4. W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $DE \parallel BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ADE a punkty F i G są punktami przecięcia prostej DE z prostymi odpowiednio BP i CP. Punkt $Q \neq P$ jest punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach PDG i PFE. Pokazać, że punkty A, P i Q są współliniowe.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω_1, ω_2 okręgi opisane na trójkątach odpowiednio PDG i PFE. Niech $\omega_1 \cap AB = \{D, M\}$ oraz $\omega_2 \cap AC = \{N, E\}$. Wystarczy pokazać, że punkt A leży na osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_2, co jest równoważne równości $AM \cdot AD = AN \cdot AE$ lub cykliczności czworokąta $MDNE$.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADG = \sphericalangle 180^\circ - \sphericalangle BDG = 180^\circ - \sphericalangle MPC,$$

więc na czworokącie $BMPC$ można opisać okrąg. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że na czworokącie $BPNC$ można opisać okrąg. Zatem punkty B, M, P, N i C leżą na okręgu. Wobec tego

$$\sphericalangle ANM = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE,$$

więc punkty M, D, N i E leżą na jednym okręgu — co dowodzi tezy zadania. $\square$

5. Dla liczby całkowitej x, niech $\nu(x)$ oznacza największy nieparzysty dzielnik x. Dane są względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie a i b takie, że $a + \nu(b+1)$ i $b + \nu(a+1)$ są potęgami dwójki. Pokazać, że $a+1$ i $b+1$ są potęgami dwójki.

Rozwiązanie:

Ustalmy liczby całkowite dodatnie k, l. Rozważmy ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowane wzorami

$$a_n = \frac{2^{n(k+l)} - 1}{2^{k+l} - 1}(2^k - 1), \quad b_n = \frac{2^{n(k+l)} - 1}{2^{k+l} - 1}(2^l - 1).$$

Udowodnimy, że jeżeli a, b są takimi liczbami całkowitymi, że $a + \nu(b+1)$ i $b + \nu(a+1)$ są potęgami dwójki oraz $2^k \mid\mid a+1, 2^l \mid\mid b+1$ to $a = a_s$ i $b = b_s$ dla pewnego s.

Przypuśćmy, że nie jest to prawda i wybierzmy taką parę a, b, której nie ma w ciągu o minimalnej sumie. Zapiszmy $a = 2^k c - 1, b = 2^l d - 1$. Mamy

$$2^k c + d - 1 = 2^m, \quad 2^l d + c - 1 = 2^n,$$

dla pewnych m, n całkowitych dodatnich. Zauważmy, że jeżeli $c = 1$ to z drugiego równania wynika, że $d = 1$. Wtedy $a = a_1, b = b_1$. Analogicznie

$d = 1 \Rightarrow c = 1$. Możemy zatem przyjąć $c, d > 1$. Ponieważ $c, d > 1$, to $2^k c + d - 1 \geqslant 2^k$ i $m \geqslant k$. Oznacza to, że $2^k \mid d - 1 = 2^k b'$ oraz analogicznie $2^l \mid c - 1 = 2^l a'$, dla pewnych nieparzystych liczb a', b'. Podstawiając do powyższych równań dostajemy

$$2^l a' + 1 + b' = 2^{m-k}, \quad 2^k b' + 1 + a' = 2^{n-l}.$$

Stąd $2^l \parallel b' + 1$ oraz $2^k \parallel a' + 1$. Wydzielając po raz kolejny przez 2^k i 2^l dostajemy

$$a' + \frac{1 + b'}{2^l} = 2^{m-k-l}, \quad b' + \frac{1 + a'}{2^k} = 2^{n-l-k}.$$

Przy czym wiadomo, że $\nu(1 + b') = \frac{1+b'}{2^l}$ oraz $\nu(1 + a') = \frac{1+a'}{2^k}$. Czyli $(a', b') = (\frac{a+1-2^k}{2^{k+l}}, \frac{b+1-2^l}{2^{k+l}})$ spełnia nasze założenia oraz $a' + b' < a + b$. Wynika stąd, że $a' = a_s, b' = b_s$. Łatwo widzimy, że stąd $a = a_{s+1}, b = b_{s+1}$.

Pozostaje zauważyć, że ponieważ $a + \nu(b + 1)$ jest parzyste, to a jest liczbą nieparzystą i rzeczywiście możemy założyć, że $k \geqslant 1$ (analogicznie $l \geqslant 1$). Oczywiście dla $n \geqslant 2$ liczby a_n i b_n nie są względnie pierwsze. Stąd $a = a_1 = 2^k - 1, b = b_1 = 2^l - 1$, co należało udowodnić. $\square$

6. Alicja i Bob na zmianę piszą na tablicy liczby naturalne większe od jeden. Przy czym zabronione jest pisanie liczb, które są kombinacjami liniowymi o współczynnikach całkowitych nieujemnych liczb zapisanych już na tablicy (tzn. liczb postaci $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n$, gdzie $k_1, k_2, \ldots, k_n$ to liczby całkowite nieujemne, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to liczby zapisane do tej pory na tablicy). Zaczyna Alicja. Jeżeli gracz nie może wykonać ruchu to przegrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Zaczniemy od udowodnienia znanego lematu:

Lemat. *Niech $a, b > 1$ będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Oznaczamy $\mathcal{L}(a, b) = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$, wówczas*

- *liczba $N = ab - a - b \notin \mathcal{L}(a, b)$ oraz N jest największą liczbą o tej własności,*
- *dla $z < N$ mamy $z \in \mathcal{L}(a, b) \iff N - z \notin \mathcal{L}(a, b)$.*

Dowód. Gdyby $ab - a - b = ax + by$, to $b \mid a(x + 1)$ czyli $x \equiv b - 1 \pmod b$. Oczywiście musi być $x > 0$, więc $x \geqslant b - 1$. Jednak wówczas $ax + by \geqslant ab - a > ab - a - b$.

Niech $M > N$. Załóżmy ponadto, że $a > b$. Wybierzmy taką liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, że spełniona jest kongruencja $ax \equiv M \pmod b$. Jeżeli $M \geqslant ax$, to $M = ax + by$ dla pewnego $y \geqslant 0$. W przeciwnym razie $ab - a - b < M < ax$, gdyby $x \leqslant b-2$, to $ab-a-b < ab-2a$ — sprzeczność. Oznacza to, że $x = b-1$, czyli $M \equiv -a \pmod{b}$. Ponieważ $N \equiv -a \pmod{b}$, to dla pewnego $k \geqslant 1$ zachodzi równość $M = N+kb = ab-a+(k-1)b = a(b-1)+b(k-1) \in \mathcal{L}(a,b)$.

Ponieważ $N \notin \mathcal{L}(a,b)$, to do $\mathcal{L}(a,b)$ nie mogą jednocześnie należeć z i $N-z$, gdyż zbiór $\mathcal{L}(a,b)$ jest zamknięty ze względu na sumę. Niech teraz $z \notin \mathcal{L}(a,b)$, wybierzmy $x \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ tak, aby spełniona była kongruencja $ax \equiv z \pmod{b}$. Ponieważ $z \notin \mathcal{L}(a,b)$, to $z < ax$ i dla pewnego $y \geqslant 1$ spełniona jest równość $ax - by = z$. Mamy

$$N - z = ab - a - b - ax + by = (b-x-1)a + (y-1)b \in \mathcal{L}(a,b).$$

□

Udowodnimy, że Alicja ma strategię wygrywającą. Alicja w pierwszym ruchu pisze liczbę pierwszą $a \geqslant 5$. Bob jest zmuszony napisać, pewną liczbę b, która jest względnie pierwsza z a. Pozostaje, więc tylko skończenie wiele liczb, które nie są zabronione. Oznacza to, że gra zakończy się zwycięstwem któregoś z graczy.

Jeżeli po napisaniu w drugim ruchu $N = ab - a - b$ Alicja ma strategię wygrywającą, to teza jest spełniona. Przypuśćmy, że to Bob ma strategię wygrywającą w sytuacji, w której na tablicy znajdują się liczby a, b, N i zgodnie z tą strategią należy napisać liczbę c w drugim ruchu. Pokażemy, że gdyby Alicja podkradła strategię Boba i w drugim ruchu zagrała c, a następnie kontynuowała zgodnie ze strategią Boba, to wygrałaby. W tym celu wystarczy zauważyć, że gdy zapisane są liczby a, b, c to nie można już zapisać N. Ponieważ c można było napisać, to $c \notin \mathcal{L}(a,b)$, więc z lematu $N - c \in \mathcal{L}(a,b)$. Oznacza to, że $N = (N-c) + c$ jest kombinacją liniową liczb a, b, c. □

7. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b i c. Pokazać, że co najmniej jedna z liczb a^2+b+c, b^2+c+a i c^2+a+b nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że liczby a^2+b+c, b^2+c+a i c^2+a+b są kwadratami liczb całkowitych. Ponieważ $a^2+b+c > a^2$, to $a^2+b+c \geqslant (a+1)^2$, więc $b+c \geqslant 2a+1$. Analogicznie dostajemy dwie pozostałe nierówności $c+a \geqslant 2b+1$ i $a+b \geqslant 2c+1$. Dodając je stronami otrzymujemy

$$2(a+b+c) \geqslant 2(a+b+c) + 3 \iff 0 \geqslant 3,$$

sprzeczność. □

8. Dowolnemu punktowi X w przestrzeni, przypisujemy liczbę rzeczywistą $f(X) \neq 0$ w taki sposób, że dla dowolnego czworościanu $ABCD$ i jego środka sfery wpisanej I zachodzi równość

$$f(I) = f(A)f(B)f(C)f(D).$$

Pokazać, że $f(X) = 1$ dla dowolnego punktu X.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolny punkt P w przestrzeni i czworościan foremny $ABCD$, którego środkiem jest punkt P. Niech A', B', C', D' będą środkami sfer wpisanych w czworościany $BCDP$, $CDAP$, $DABP$ i $ABCP$ odpowiednio. Zauważmy, że P jest również środkiem czworościanu $A'B'C'D'$. Z warunków zadania dostajemy

$$f(P) = f(A)f(B)f(C)f(D) \quad \text{oraz} \quad f(A') = f(P)f(B)f(C)f(D). \qquad (1)$$

Zatem $f(A)f(A') = f(P)^2$. Analogicznie dostajemy równości

$$f(A)f(A') = f(B)f(B') = f(C)f(C') = f(D)f(D') = f(P)^2. \qquad (2)$$

Mnożąc równości z (2) i wykorzystując (1) oraz równość

$$f(P) = f(A')f(B')f(C')f(D')$$

otrzymujemy zależność $f(P)^2 = f(P)^8$ z której wynika, że $f(P) \in \{-1, 1\}$ dla dowolnego punktu P.

Załóżmy, że dla pewnego punktu P zachodzi $f(P) = -1$. Ponieważ $|f(A)| = |f(B)| = |f(C)| = |f(D)| = 1$, to bez szkody możemy założyć, że $f(A) = -1$ i $f(B) = f(C) = f(D) = 1$ (przypadek w którym $f(B) = f(C) = f(D) = -1$ oraz $f(A) = 1$ jest analogiczny).

Niech A_1, B_1, C_1 i D_1 będą obrazami punktów A, B, C i D w symetrii względem płaszczyzn BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio. Oznaczmy przez A_2, B_2, C_2 i D_2 środki czworościanów odpowiednio A_1BCD, AB_1CD, ABC_1D i $ABCD_1$. Punkt P jest również środkiem czworościanów $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$. Korzystając ponownie ze wzoru danego w treści z zadania dostajemy

$$f(A_1)f(B)f(C)f(D) = f(A_2) \Longrightarrow f(A_2) = f(A_1)$$

oraz analogicznie $f(B_2) = -f(B_1)$, $f(C_2) = -f(C_1)$ i $f(D_2) = -f(D_1)$. Wobec tego

$$f(P) = f(A_2)f(B_2)f(C_2)f(D_2) = -f(A_1)f(B_1)f(C_1)f(D_1) = -f(P),$$

stąd $f(P) = 0$ — sprzeczność. □

Rozwiązanie:

Korzystając z oznaczeń ze sposobu pierwszego mamy

$$\begin{aligned} f(A_2) &= f(A_1)f(B)f(C)f(D) \\ f(B_2) &= f(A)f(B_1)f(C)f(D) \\ f(C_2) &= f(A)f(B)f(C_1)f(D) \\ f(D_2) &= f(A)f(B)f(C)f(D_1), \end{aligned}$$

które po wymnożeniu dają $f(P) = f(P)^4$, gdyż $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ i $ABCD$ mają wspólny środek P, więc $f(P) = 1$. $\square$

9. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^\pi} + \frac{b^3c}{(3b+c)^\pi} + \frac{c^3a}{(3c+a)^\pi} \geqslant \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^\pi} + \frac{b^2ca}{(2b+c+a)^\pi} + \frac{c^2ab}{(2c+a+b)^\pi}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dostajemy

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^\pi} + \frac{c^2ab}{(2c+a+b)^\pi} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^3b}{(3a+b)^\pi} \cdot \frac{c^2ab}{(2c+a+b)^\pi}} =$$

$$= \frac{2a^2bc}{\left(\sqrt{(3a+b)(2c+a+b)}\right)^\pi} \geqslant \frac{2a^2bc}{\left(\frac{(3a+b)+(2c+a+b)}{2}\right)^\pi} = \frac{2a^2bc}{(2a+b+c)^\pi}.$$

Analogicznie uzyskujemy pozostałe dwie nierówności

$$\frac{b^3c}{(3b+a)^\pi} + \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^\pi} \geqslant \frac{2b^2ca}{(2b+c+a)^\pi}$$

$$\frac{c^3a}{(3c+a)^\pi} + \frac{b^2ca}{(2b+c+a)^\pi} \geqslant \frac{2c^2ab}{(2c+a+b)^\pi}.$$

Dodając otrzymane trzy nierówności stronami dostajemy tezę. $\square$

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, że funkcja gamma dana wzorem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

rozszerza pojęcie silni na zbiór liczb rzeczywistych tzn. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x oraz, że $\Gamma(x) > 0$ dla $x > 0$.

Całkując przez podstawianie można uzyskać wzór

$$\frac{1}{A^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty t^{p-1}e^{-At}\,\mathrm{d}t,$$

dla dowolnych $A, p > 0$.

Wstawiając π pod p oraz kolejne mianowniki pod A dostajemy

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^\pi}+\frac{b^3c}{(3b+c)^\pi}+\frac{c^3a}{(3c+a)^\pi}-\frac{a^2bc}{(2a+b+c)^\pi}-\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^\pi}-\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^\pi}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\pi)}\int_0^\infty t^{\pi-1}(a^3be^{-(3a+b)t}+b^3ce^{-(3b+c)t}+c^3ae^{-(3c+a)t}-$$
$$-a^2bce^{-(2a+b+c)t}-b^2cae^{-(2b+c+a)t}-c^2abe^{-(2c+a+b)t})\,\mathrm{d}t.$$

Pozostaje pokazać, że funkcja podcałkowa jest dodatnia. Jednak z nierówności między średnimi

$$a^3be^{-(3a+b)t}+c^2abe^{-(2c+a+b)t}\geqslant 2a^2bce^{-(2a+b+c)t}.$$

Sumując trzy analogiczne nierówności dostajemy tezę. $\square$

10. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że istnieje nieskończenie wiele liczb $k>1$ dla których liczba $1+k+k^2+\ldots+k^n$ dzieli liczbę $1+k^{1!}+k^{2!}+\ldots+k^{n!}$.

Rozwiązanie:

Dzielimy wielomian $W(x)=1+x^{1!}+x^{2!}+\ldots+x^{n!}$ z resztą przez $P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$ i otrzymujemy: $W(x)=Q(x)P(x)+R(x)$, gdzie $\deg R<n$. Ponieważ $R(k)\mid P(k)$ dla nieskończenie wielu k oraz dla dostatecznie dużych k zachodzi nierówność $-P(k)<R(k)<P(k)$, to $R(x)$ ma nieskończenie wiele pierwiastków. Stąd $R\equiv 0$.

Udowodnijmy, że wielomian $\sum_{i=0}^n x^{a_i}$ jest podzielny przez $1+x+x^2+\ldots+x^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby ze zbioru $a_0,a_1,\ldots,a_n$ dają parami różne reszty z dzielenia przez $n+1$. Niech r_i oznacza resztę z dzielenia a_i przez $n+1$. Wtedy $1+x+x^2+\ldots+x^n\mid x^{n+1}-1\mid x^{a_i}-x^{r_i}$. Oznacza to, że

$$\sum_{i=0}^n x^{a_i}\equiv\sum_{i=0}^n x^{r_i}\pmod{1+x+x^2+\ldots+x^n}.$$

Ponieważ $\deg(\sum_{i=0}^n x^{r_i})\leqslant n$, to musi być $\sum_{i=0}^n x^{r_i}=c(1+x+\ldots+x^n)$. Wstawiając $x=1$ dostajemy, że $c=1$. Stąd $\sum_{i=0}^n x^{r_i}=1+x+\ldots+x^n$ i liczby r_i są parami różne.

Stosując uzyskany fakt, dostajemy, że liczby $0,1!,2!,\ldots,n!$ muszą dawać parami różne reszty z dzielenia przez $n+1$. Jeżeli $n+1>4$ jest liczbą złożoną, to dla pewnego $l\leqslant n$ mamy $n+1\mid l!$, czyli liczby w powyższym ciągu nie są parami różne. Jeżeli $n+1=p>2$ jest liczbą pierwszą, to z twierdzenia Wilsona $(p-1)!\equiv -1\pmod p$, stąd $(p-2)!\equiv 1\pmod p$. Dostajemy, że $p-2=1$, czyli $p=3$.

Dla $n = 3$ mamy $2! \equiv 3! \pmod 4$. Ostatecznie teza jest spełniona dla $n = 1$ i $n = 2$. $\square$

11. W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku w punkcie I jest styczny do boków AC i AB w punktach odpowiednio E i F. Punkty M, N i K są środkami boków odpowiednio BC, CA i AB. Prosta EF przecina proste MN i MK w punktach odpowiednio U i V. Punkt X jest środkiem łuku $\widehat{BAC}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC. Pokazać, że prosta XI połowi odcinek UV.

Rozwiązanie:

Rozpoczniemy od pokazania następującego lematu

Lemat. *Przy powyższych założeniach* $\sphericalangle BUC = 90^\circ$ *oraz punkty* B, I, U *są współliniowe.*

Dowód. Niech prosta BI przecina prostą EF w punkcie U'. Mamy

$$\sphericalangle CIU' = 180^\circ - \sphericalangle BIC = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC) = \sphericalangle CEU',$$

więc punkty I, E, U' i C leżą na jednym okręgu, stąd $\sphericalangle BU'C = \sphericalangle IEC = 90^\circ$. Wobec tego $MU' = MC = MB$, więc $\sphericalangle CMU' = 2\sphericalangle CBU' = \sphericalangle CBA$. Zatem $AB \parallel MU'$, stąd $U = U'$. $\square$

Na podstawie lematu widzimy, że punkty B, V, U i C leżą na okręgu o środku w punkcie M. Zauważmy, że prosta BX (i CX) jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie BIC. Istotnie:

$$\sphericalangle CBX = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC\right) = 180^\circ - \sphericalangle BIC.$$

Wobec tego prosta XI jest symedianą w trójkącie BIC tzn. proste XI i IM są izogonalne względem kąta BIC. Zatem $\sphericalangle MIC = \sphericalangle UIX$. Jednakże trójkąty UIV oraz BIC są podobne, więc XI połowi UV — co było do pokazania. $\square$

12. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz taki rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_0, a_1, \ldots, a_n$, że liczby $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnić, że $a_0 \geqslant \left(\frac{2017}{2016}\right)^n$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $x_i = \frac{1}{a_i}$ oraz $d = x_{i+1} - x_i$. Pokażemy, że

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} a_l = \frac{k! d^k}{x_0 x_1 \ldots x_k} \geqslant 1.$$

Stosujemy indukcję ze względu na k. Dla $k = 0$ teza jest oczywista. Z założenia indukcyjnego dla ciągów $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ oraz $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ dostajemy, że

$$\sum_{l=0}^{k+1}(-1)^{k+1-l}\binom{k+1}{l}a_l = \left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}a_l\right) - \left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k+1}{l}a_{l+1}\right) =$$

$$= \frac{k!d^k}{x_0x_1\dots x_k} - \frac{k!d^k}{x_1x_2\dots x_{k+1}} = \frac{k!d^k(x_{k+1}-x_0)}{x_0x_1\dots x_kx_{k+1}} = \frac{(k+1)!d^{k+1}}{x_0x_1\dots x_{k+1}}.$$

Ponieważ liczba $\frac{k!d^k}{x_0x_1\dots x_k}$ jest dodatnia, oraz (co wynika z powyższej równości) całkowita, to $\frac{k!d^k}{x_0x_1\dots x_k} \geqslant 1$.

Zauważmy, że

$$a_m = \sum_{l=0}^{m} a_l\binom{m}{l}\left(\sum_{k=l}^{m}(-1)^{k-l}\binom{m-l}{k-l}\right) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}a_l\right) \geqslant$$

$$\geqslant a_0 + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k} = a_0 + 2^m - 1.$$

Z nierówności

$$x_{n-1} > x_{n-1} - x_n = \frac{x_0 - x_{n-1}}{n-1}$$

wynika, że $nx_{n-1} > x_0$, czyli $na_0 > a_{n-1}$. Mamy stąd

$$na_0 \geqslant a_{n-1} + 1 \geqslant a_0 + 2^{n-1},$$

czyli $a_0 \geqslant \frac{2^{n-1}}{n-1}$. Pozostaje zauważyć, że uzyskane ograniczenie jest lepsze od żądanego w zadaniu. Dla $n = 2, 3, 4$ nierówność $\frac{2^{n-1}}{n-1} \geqslant \left(\frac{2017}{2016}\right)^n$ jest oczywiście spełniona. Dla $n \geqslant 5$ mamy

$$2(n-1) = \frac{4}{n}\binom{n}{2} \leqslant \binom{n}{2}\left(\frac{1007}{1008}\right)^2 \leqslant \left(1 + \frac{1007}{1008}\right)^n,$$

czyli

$$\frac{2^{n-1}}{n-1} = \frac{2^n}{2(n-1)} \geqslant 2^n \cdot \frac{1008^n}{2015^n} = \left(\frac{2016}{2015}\right)^n > \left(\frac{2017}{2016}\right)^n.$$

□

Zadania trudniejsze

1. W trójkącie ABC okręgi γ i Γ oznaczają odpowiednio okrąg wpisany i opisany. Niech Ω będzie okręgiem stycznym do półprostych AB i AC oraz zewnętrznie stycznym do Γ w punkcie A'. Styczne do γ poprowadzone z punktu A' przecinają Γ w punktach B' i C'. Punkt X jest punktem styczności cięciwy $B'C'$ z γ. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie BXC jest styczny do γ.

Rozwiązanie:

Na początku zauważmy, że styczność prostej $B'C'$ i okręgu γ jest konsekwencją twierdzenia Ponceleta.

Lemat. *Jeśli D jest punktem styczności γ z BC, to $\sphericalangle DAB = \sphericalangle A'AC$.*

Dowód. Rozpatrzmy złożenie inwersji o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ z obrazem względem dwusiecznej kąta BAC. Wówczas oznaczając przez $[\mathcal{F}]'$ obraz figury $\mathcal{F}$ w tym przekształceniu zauważamy, że $[B]' = B$, $[C]' = C$, $[BC]' = \Gamma$ oraz $[\gamma]' = \Omega$. Wobec tego $[D]' = A'$, więc w szczególności $\sphericalangle DAB = \sphericalangle A'AC$. $\square$

Uwaga. *Powyższy lemat można uzasadnić następująco: Punkty A i A' to środki jednokładności zewnętrznej i wewnętrznej par odpowiednio okręgów (γ, Ω) i (Γ, Ω), więc z twierdzenia Monge'a prosta AA' zawiera środek jednokładności wewnętrznej okręgów γ i Γ, który jest punktem izogonalnie sprzężonym do punktu Gergonna leżącego na prostej AD.*

Lemat. *Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$, które mają wspólne okręgi: wpisany $\gamma(I, r)$ i opisany $\Gamma(O, R)$. Niech punkty D, E, F, D', E', F' będą punktami styczności γ z bokami odpowiednio BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Wówczas prosta przechodząca przez środki odcinków EF i $E'F'$ jest równoległa do prostej DD'.*

Dowód. Bez szkody załóżmy, że punkty A', B' i C' leżą na mniejszych łukach CA, AB i BC odpowiednio. Niech $P = BC \cap B'C'$, $Q = AB \cap B'C'$, $R = AB \cap A'B'$ i $S = AC \cap A'B'$. Niech X będzie środkiem odcinka EF. Wówczas

$$IX \cdot IA = \frac{r}{\sin \frac{1}{2} \sphericalangle BAC} \cdot r \cdot \sin \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = r^2,$$

więc obrazem punktu X w inwersji względem γ jest punkt A. Wobec tego inwersja ta przekształca prostą łączącą środki odcinków EF i $E'F'$ na okrąg opisany na trójkącie AIA'. Zatem wystarczy pokazać, że PI przechodzi przez środek okręgu opisanego O' na trójkącie AIA', gdyż $DD' \perp PI$.

Niech $L = BC \cap AI$. Mamy

$$\begin{aligned}
\sphericalangle PIL &= 180^\circ - \sphericalangle AIP = 180^\circ - (\sphericalangle QIP + \sphericalangle RIQ + \sphericalangle AIR) = \\
&= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle PBQ + 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle QB'R + \frac{1}{2}\sphericalangle ASR\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sphericalangle PBQ + \sphericalangle QB'R - \sphericalangle AA'S - \sphericalangle SAA'\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle C'BA - \frac{1}{2}\sphericalangle ASB' = 90^\circ - \sphericalangle AA'I = \sphericalangle OIA,
\end{aligned}$$

więc punkty O, I, P są współliniowe. □

Przeformułujmy treść zadania następująco:

Przeformułowanie. *Zdefiniujmy punkt X jako punkt styczności okręgu przechodzącego przez punkty B i C z γ. Styczna w punkcie X do γ przecina Γ w punktach B' i C'. Z twierdzenie Ponceleta styczne w punktach B' i C' do γ przecinają się w punkcie A' na Γ. Jeśli D jest punktem styczności γ z BC, to należy pokazać, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle A'AC$.*

Niech punkty E, F, D', E', F' będą punktami styczności γ z bokami CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ odpowiednio (przyjmujemy, że B' leży na krótszym łuku AC). Niech $T_1 = EF \cap BC$, $T_1' = E'F' \cap B'C'$, $P = BC \cap B'C'$ i $T = EF \cap E'F'$.

Prosta AA' jest biegunową punktu T względem γ, więc $TI \perp AA'$. Podobnie dostajemy $T_1I \perp AD$. Zatem $\sphericalangle DAB = \sphericalangle A'AC \iff \sphericalangle IAA' = \sphericalangle DAI \iff TI = T_1I$.

Ponieważ $(T_1, B, D, C) = 1$ i $PB \cdot PC = PD^2$, to łatwo zauważyć, że P jest środkiem odcinka T_1D. Analogicznie dostajemy, że P jest środkiem odcinka $T_1'D'$, więc czworokąt $DD'T_1'T_1$ jest prostokątem. Wobec tego $T_1'I = T_1I$. Zatem pozostaje pokazać, że punkt I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie TT_1T_1'.

Niech M_1, M_1' będą środkami odcinków odpowiednio TT_1 i TT_1'. Na podstawie lematu $M_1M_1' \parallel DD'$, więc $M_1M_1' \parallel T_1T_1'$. Korzystając z twierdzenia Carnota mamy równość

$$M_1T^2 - M_1T_1^2 + 0 + M_1'T_1^2 - M_1'T^2 = 0,$$

więc zachodzi równość $M_1T^2 - M_1T_1^2 = M_1'T^2 - M_1'T_1^2$, która w połączeniu z zależnością (wynikającą z twierdzenia Talesa)

$$\frac{M_1T}{M_1T_1} = \frac{M_1'T}{M_1'T_1'}$$

pokazuje, że M_1 i M_1' są środkami odcinków TT_1 i TT_1' — co należało pokazać. □

2. Dany jest wielomian $W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ o współczynnikach rzeczywistych, o tej własności, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność $W(x) \geqslant 0$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich c, d spełniona jest nierówność

$$a_0 + a_1(c+d) + a_2(c+d)(c+2d) + \ldots + a_n(c+d)(c+2d)\cdots(c+nd) \geqslant 0.$$

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, że funkcja gamma dana wzorem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

rozszerza pojęcie silni na zbiór liczb rzeczywistych tzn. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Ustalmy liczby naturalne $A, B > 0$. Zauważmy, że

$$\int_0^{+\infty} x^Ae^{-Bx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{B^{A+1}}\int_0^{+\infty} t^Ae^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(A+1)}{B^{A+1}}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^{+\infty} W(x)\cdot x^Ae^{-Bx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n a_kx^k\right)x^Ae^{-Bx}\,\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{k=0}^n a_k\int_0^{+\infty} x^{A+k}e^{-Bx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n a_k\frac{\Gamma(A+k+1)}{B^{A+k+1}} = \\
&= \frac{\Gamma(A+1)}{B^{A+1}}\sum_{k=0}^n a_k\frac{(A+1)(A+2)\cdot\ldots\cdot(A+k)}{B^k} = \\
&= \frac{\Gamma(A+1)}{B^{A+1}}\sum_{k=0}^n a_k(c+d)(c+2d)\cdot\ldots\cdot(c+kd),
\end{aligned}$$

gdzie $c = \dfrac{A}{B}$ i $d = \dfrac{1}{B}$, stąd teza. □

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze p oraz liczby naturalne n, że liczby $(k+1)^n - 2k^n$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ dają parami różne reszty z dzielenia przez p.

4. Dany jest skończony graf G. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ oznaczamy przez A_n liczbę takich n-elementowych podzbiorów wierzchołków, że każde dwa wierzchołki w podzbiorze są połączone krawędzią. Wykazać, że

$$\frac{n!}{(n+1)^n}A_n^{n+1} \geqslant A_{n+1}^n.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ mamy pokazać, że $\frac{1}{2}A_2^2 \geqslant A_2$. Jednakże $A_1 = |V|$ oraz $A_2 = |E|$, czyli mamy pokazać, że $\frac{|V|^2}{2} \geqslant |E|$, a to jest oczywiste.

Załóżmy, że nierówność zachodzi dla n i udowodnijmy, że zachodzi również dla $n + 1$. Dla danego wierzchołka v oznaczmy przez f_v liczbę klik wielkości $n+1$, do których on należy, zaś przez g_v liczbę klik wielkości $n+2$, do których on należy. Stosujemy założenie indukcyjne do grafu złożonego z sąsiadów v i otrzymujemy $\frac{n!}{(n+1)^n} f_v^{n+1} \geqslant g_v^n$. Ponadto oczywiście $g_v \leqslant A_{n+2}$, czyli

$$g_v^{n+1} \leqslant A_{n+2} \frac{n!}{(n+1)^n} f_v^{n+1}.$$

Mamy

$$(n+2)A_{n+2} = \sum_{v \in V} g_v \leqslant \sum_{v \in V} \left(\frac{n!}{(n+1)^n} f_v^{n+1} A_{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} =$$

$$\left(\frac{n!}{(n+1)^n} A_{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} (n+1)A_{n+1}.$$

Po przekształceniu dostajemy, że

$$A_{n+2}^{n+1} \leqslant A_{n+1}^{n+2} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}.$$

Co kończy dowód. $\square$

Spis treści