III Liceum Ogólnokształcące
im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Jodłówka Tuchowska, 12 – 15 lutego 2016

Spis treści

Wstęp

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej organizowany przez III LO w Tarnowie odbył się w dniach 12-15 lutego w Jodłówce Tuchowskiej, w Domie Wczasów Dziecięcych. Kadrę obozu stanowili: Dominik Burek (student IV roku matematyki IMUJ), Maciej Gawron (doktorant IV roku matematyki IMUJ).

W obozie uczestniczyło 19 uczniów z III LO w Tarnowie, V LO w Krakowie oraz Gimnazjum Dwujęzycznego w Tarnowie. Pełną listę uczestników obozu zamieszczono poniżej.

W tych dniach odbyły się zawody indywidualne a 14 lutego został rozegrany mecz matematyczny. Regulamin meczu znajduje się na końcu tej broszury. Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli pięć godzin na rozwiązanie trzech zadań. Szczegółowe wyniki zawodów indywidualnych przedstawiają tabele na następnych stronach.

Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Kadra obozu

Lista uczestników obozu

III LO w Tarnowie

Edyta Garbarz
Filip Gawron
Łukasz Kluska
Paweł Kolendo
Krystian Krakowski
Michał Panek
Krzysztof Pióro
Kamil Poniewierski
Mikołaj Sikora
Przemysław Simajchel
Jakub Węgrecki
Katarzyna Wodzińska
Magdalena Karaś
Beata Czernecka

Gimnazjum Dwujęzyczne w Tarnowie

Rafał Pyzik

V LO w Krakowie

Jędrzej Kula
Stanisław Nowak
Artur Zubilewicz
Filip Lurka

WYNIKI

			12 lutego			13 lutego			14 lutego			15 lutego			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Suma
1.	Filip	Gawron	2	6	6	2	6	6	5	6	6	6	6	-	57
2.	Jędrzej	Kula	6	6	-	6	6	6	6	6	2	6	6	-	56
3.	Jakub	Węgrecki	-	-	6	6	6	0	6	6	6	6	6	6	54
4.	Artur	Zubilewicz	6	6	6	6	2	0	5	6	0	6	6	-	49
5.	Filip	Lurka	6	6	0	6	0	-	6	6	6	6	6	0	48
6.	Krystian	Krakowski	2	6	-	2	6	-	6	6	6	6	6	-	46
7.	Paweł	Kolendo	2	6	0	6	2	-	6	6	-	6	6	0	40
8.	Mikołaj	Sikora	2	6	-	2	2	-	6	6	-	6	6	0	36
9.	Stanisław	Nowak	0	0	5	2	6	0	5	6	5	-	-	-	29
10.	Beata	Czernecka	-	6	-	0	-	-	-	6	-	6	6	-	24
11.	Rafał	Pyzik	2	-	-	2	-	0	6	6	-	-	6	0	22
12.	Edyta	Garbarz	-	6	-	0	-	-	-	6	-	6	-	-	18
13.	Michał	Panek	-	-	-	-	-	0	6	6	-	6	-	-	18
14.	Krzysztof	Pióro	-	-	-	-	-	-	6	6	-	6	-	-	18
15.	Łukasz	Kluska	-	-	-	-	-	-	6	6	-	6	-	-	18
16.	Katarzyna	Wodzińska	-	6	-	2	-	-	-	6	-	-	-	-	14
17.	Przemysław	Simajchel	-	6	-	0	-	0	2	-	-	6	-	-	14
18.	Kamil	Poniewierski	-	-	-	0	-	-	6	-	-	6	-	-	12
19.	Magdalena	Karaś	0	0	-	0	-	-	-	-	-	6	-	-	6
		Trudność	0,2	0,6	0,2	0,4	0,3	0,1	0,7	0,8	0,3	0,8	0,5	0,1	

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	3	0	5	11
2.	11	0	0	8
3.	3	1	0	14
4.	5	0	6	7
5.	5	0	3	10
6.	2	0	0	16
7.	10	3	1	4
8.	15	0	0	3
9.	3	1	0	14
10.	15	0	0	3
11.	10	2	0	8
12.	1	0	0	17

Treści zadań - zawody indywidualne

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b i c układ równań

$$\begin{cases} a(b^2+c) = c(c+ab), \\ b(c^2+a) = a(a+bc), \\ c(a^2+b) = b(b+ca). \end{cases}$$

2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $AB = CD$ oraz proste AB i CD nie są równoległe. Punkty E i F są środkami przekątnych AC i BD. Prosta EF przecina odcinki AB i CD odpowiednio w punktach G i H. Udowodnić, że $\measuredangle AGH = \measuredangle DHG$.

3. Niech a i b będą takimi liczbami wymiernymi, że

$$s = a + b = a^2 + b^2.$$

Wykazać, że liczbę s można zapisać w postaci ułamka, którego mianownik jest względnie pierwszy z liczbą 6.

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

5. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Okrąg, którego środkiem jest środek odcinka BC i który przechodzi przez punkt H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie okrąg, którego środkiem jest środek odcinka CA i który przechodzi przez punkt H przecina prostą CA w punktach B_1 i B_2, zaś okrąg, którego środkiem jest środek odcinka AB i który przechodzi przez punkt H przecina prostą AB w punktach C_1 i C_2. Udowodnić, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu

6. Danych jest 3^{2k} monet, przy czym jedna z nich jest lżejsza od pozostałych. Mamy do dyspozycji trzy wagi szalkowe, przy czym jedna z nich jest zepsuta i jej wskazania są losowe. Udowodnić, że można wyznaczyć lżejszą monetę przy użyciu $3k+1$ ważeń.

7. W szachownicy $n \times n$ wpisano liczby od 1 do n^2 w ten sposób, że w polu o współrzędnych (i,j) znajduje się liczba $n \cdot (i-1)+j$. W jednym ruchu można wybrać dwa sąsiednie pola (sąsiadujące bokiem) i zastąpić liczby w tych polach ich średnią arytmetyczną (o ile ta średnia jest całkowita). Wyznaczyć wszystkie n dla których można doprowadzić do sytuacji w której w każdym polu jest wpisana ta sama liczba.

8. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki: $\measuredangle PAB = \measuredangle PCA$ oraz $\measuredangle PAC = \measuredangle PBA$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

9. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniających warunek

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| \leqslant 1 \quad \text{dla } k, m \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych k i m zachodzi nierówność

$$\left| \frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m} \right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

10. Koło gospodyń wiejskich liczy 100 członkiń. Każda gospodyni spotkała się na herbatce z dokładnie 56 innymi gospodyniami z koła. Zarząd koła składa się z 50 pań najbardziej zaangażowanych w działalność koła. Każde dwie z nich spotkały się już na herbatce. Udowodnić, że członkinie koła można podzielić na dwie grupy w taki sposób, że w obrębie każdej z grup dowolne dwie panie piły razem herbatkę.

11. Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q. Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q. Punkt R leży na krawędzi AB, przy czym $BR = \frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP, CD oraz $2 \cdot QR$ można zbudować trójkąt.

12. Niech $k > 2$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że liczba

$$2^{2^k - 1} - 2^k - 1$$

jest złożona.

Mecz Matematyczny

1. Liczby a_i, b_i, c_i, d_i spełniają warunki $0 \leqslant c_i \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant d_i$ oraz $a_i + b_i = c_i + d_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} c_i + \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

2. Rozstrzygnąć czy istnieje liczba całkowita dodatnia n dla której wielomian

$$P(X) = (X + 1^2)(X + 2^2) \ldots (X + n^2) + 1$$

jest iloczynem dwóch niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p oraz liczby całkowite a, b i c takie, że

$$p = a^2 + b^2 + c^2 \text{ oraz } p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

4. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia x taka, że dowolny element zbioru

$$\mathcal{S} = \{x^i + i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2015\}$$

ma co najmniej 2^{2016} dzielników.

5. Dane są liczby całkowite dodatnie $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2016} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2016}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

6. Dany jest prostokąt, który może być pokryty przez skończoną liczbę prostokątów o wymiarach $1 \times m$ oraz $n \times 1$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że prostokąt ten może zostać pokryty przy użyciu prostokątów jednego rodzaju.

7. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ w którym

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAE \quad \text{oraz} \quad \measuredangle CBA = \measuredangle DCA = \measuredangle EDA.$$

Niech P będzie punktem przecięcia prostych BD i CE. Pokazać, że prosta AP połowi odcinek CD.

8. W trójkącie ABC punkty K i L są środkami boków odpowiednio AB i AC. Punkt $P \neq A$ jest punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABL i AKC. Niech $Q \neq A$ będzie punktem przecięcia prostej AP i okręgu opisanego na trójkącie AKL. Pokazać, że $2AP = 3AQ$.

Rozwiązania - zawody indywidualne

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b i c układ równań

$$\begin{cases} a(b^2+c) = c(c+ab), \\ b(c^2+a) = a(a+bc), \\ c(a^2+b) = b(b+ca). \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Przekształćmy układ równań w sposób równoważny do postaci

$$\begin{cases} ab(b-c) = c(c-a), \\ bc(c-a) = a(a-b), \\ ca(a-b) = b(b-c). \end{cases}$$

Przypuśćmy, że któraś z liczb a, b, c jest równa 0, załóżmy bez straty ogólności, że $a = 0$. Wówczas pierwsze równanie przyjmuje postać $0 = c^2$ stąd $c = 0$ i postępując analogicznie z trzecim równaniem $b = 0$. Otrzymaliśmy rozwiązanie $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Zakładamy odtąd, że $abc \neq 0$. Przypuśćmy, że któreś dwie liczby spośród a, b, c są równe. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a = b$. Wówczas z drugiego równania otrzymamy $c = a$. Otrzymujemy $a = b = c$ i w takim przypadku wszystkie równania są spełnione.

Zakładamy odtąd, że liczby dane w zadaniu są parami różne. Mnożąc stronami dane równości dostaniemy

$$a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a) = abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Dzięki poczynionym założeniom możemy podzielić stronami przez prawą stronę otrzymując $abc = 1$. Układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} b-c = c^2(c-a), \\ c-a = a^2(a-b), \\ a-b = b^2(b-c). \end{cases}$$

Wybierzmy największą liczbę spośród a, b, c. Przypuśćmy, bez straty ogólności, że jest to a. Wówczas z równania drugiego dostaniemy

$$0 \leqslant a^2 = \frac{c-a}{a-b} < 0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zbiór rozwiązań jest postaci $(a, b, c) = (t, t, t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. $\square$

2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $AB = CD$ oraz proste AB i CD nie są równoległe. Punkty E i F są środkami przekątnych AC i BD. Prosta EF przecina odcinki AB i CD odpowiednio w punktach G i H. Udowodnić, że $\measuredangle AGH = \measuredangle DHG$.

Rozwiązanie:

Niech P będzie środkiem odcinka BC. Wtedy $EP \parallel AB$, $FP \parallel CD$ i $|EP| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD| = |FP|$. Wobec tego trójkąt EFP jest równoramienny i $\measuredangle PEF = \measuredangle EFP$. Zatem

$$\measuredangle HGA = \pi - \measuredangle BGH = \pi - \measuredangle PEF = \pi - \measuredangle EFP = \pi - \measuredangle GHC = \measuredangle DHG.$$

$\square$

3. Niech a i b będą takimi liczbami wymiernymi, że

$$s = a + b = a^2 + b^2.$$

Wykazać, że liczbę s można zapisać w postaci ułamka, którego mianownik jest względnie pierwszy z liczbą 6.

Rozwiązanie:

Zapiszmy

$$a = \frac{m}{k}, \qquad b = \frac{n}{k},$$

gdzie m, n, k są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz k jest najmniejszym możliwym wspólnym mianownikiem. Wynika stąd w szczególności, że liczby m, n, k nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.

Na mocy warunków zadania otrzymujemy

$$s = a + b = \frac{m+n}{k} = a^2 + b^2 = \frac{m^2+n^2}{k^2},$$

skąd dostajemy równość

$$(\star) \qquad (m+n)k = m^2 + n^2.$$

Z równości tej wynika, że liczby k i m są względnie pierwsze - ich ewentualny wspólny dzielnik pierwszy p dzieliłby lewą stronę oraz liczbę m^2, więc mielibyśmy $p \mid n^2$, lecz płynący stąd wniosek, że p jest wspólnym dzielnikiem liczb k, m, n, przeczyłby wcześniejszym założeniom. Analogicznie liczby k i n są względnie pierwsze.

Ponieważ liczba s daje się zapisać jako ułamek o mianowniku k, więc wystarczy udowodnić, że liczby k i 6 są względnie pierwsze.

Przypuśćmy, że $2 \mid k$. Wówczas liczby m i n nie są podzielne przez 2, więc ich kwadraty dają resztę 1 z dzielenia przez 4, co daje $m^2 + n^2 \equiv 2 \pmod 4$. Jest to niemożliwe - lewa strona równości $(\star)$ jest podzielna przez 4, gdyż jest iloczynem dwóch parzystych czynników.

Przypuśćmy, że $3 \mid k$. Liczby m i n są zatem niepodzielne przez 3; w efekcie ich kwadraty dają resztę 1 z dzielenia przez 3 oraz $m^2 + n^2 \equiv 2 \pmod 3$. To daje sprzeczność, gdyż lewa strona zależności $(\star)$ jest podzielna przez 3.

Dowiedliśmy więc, że k nie dzieli się przez 2 ani przez 3, skąd teza. $\square$

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy równanie w treści zadanie przez $(\star)$. Kładąc $(x, y) \to (0, 0)$ w $(\star)$ dostajemy $2f(0) = f(0)^2$, stąd $f(0) = 0$ lub $f(0) = 2$.

- Załóżmy, że $f(0) = 2$. Wówczas dla $(x, y) \to (0, x)$ mamy równość $4 = 2f(x) + 2x$, więc mamy pierwsze rozwiązanie $(\star)$ — $\boxed{f(x) = 2 - x}$.

- Niech $f(0) = 0$. Wtedy dla $(x, y) \to (x, 0)$ dostajemy $(\star\star)$ $f(x^2) = xf(x)$, natomiast dla podstawień $(x, y) \to (x, -x)$ oraz $(x, y) \to (-x, x)$ mamy

$$\begin{cases} f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x), \\ f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) + xf(-x). \end{cases}$$

  Odejmując te równania stronami otrzymujemy równość $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, stąd pierwsze z powyższych równań przyjmuje postać $f(x)^2 = -xf(x)$, więc dla dowolnej liczby rzeczywistej x wiemy, że $f(x) = -x$ lub $f(x) = 0$.

  Załóżmy, że istnieją liczby rzeczywiste a i b takie, że $f(a) = 0$ oraz $f(b) = -b$. Wtedy podstawienia $(x, y) \to (a, b)$ oraz $(x, y) \to (b, a)$ w $(\star)$ wraz z równością $(\star\star)$ dają

$$\begin{cases} f(ab) = af(a+b), \\ -b^2 + f(ab) = -ab + bf(a+b). \end{cases}$$

Odejmując powyższe równania stronami otrzymujemy $-b(a-b) = (a-b)f(a+b)$, więc jeśli $a = b$ to $-b = f(b) = f(a) = 0$, stąd $a = b = 0$. W przeciwnym wypadku $f(a+b) = -b$, więc jeśli $f(a+b) = 0$ to $b = 0$, a gdy $f(a+b) = -a-b$ to $a = 0$. Oznacza to, że $\boxed{f(x) = -x}$ dla $x \in \mathbb{R}$ lub $\boxed{f(x) = 0}$ dla $x \in \mathbb{R}$, skąd dostajemy dwa inne rozwiązania ($\star$).

Ostatecznie, rozwiązania ($\star$) należą do zbioru $\{0, -x, 2-x\}$. $\square$

5. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Okrąg, którego środkiem jest środek odcinka BC i który przechodzi przez punkt H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie okrąg, którego środkiem jest środek odcinka CA i który przechodzi przez punkt H przecina prostą CA w punktach B_1 i B_2, zaś okrąg, którego środkiem jest środek odcinka AB i który przechodzi przez punkt H przecina prostą AB w punktach C_1 i C_2. Udowodnić, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu

Rozwiązanie:

Niech A_0, B_0 i C_0 oznaczają środki boków odpowiednio BC, CA i AB. Symetralna odcinka A_1A_2 jest też symetralną odcinka BC. Analogicznie symetralna odcinka B_1B_2 jest symetralną odcinka AC, a symetralna odcinka C_1C_2 — symetralną odcinka AB. Wynika stąd, że jeśli punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu, to jego środkiem jest środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC. Ponieważ trójkąt OA_0A_1 jest prostokątny, więc

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_1A_0^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \tag{0-1}$$

Niech K będzie środkiem odcinka AH a L — środkiem odcinka CH. Ponieważ punkty A_0 i B_0 są środkami odcinków BC i CA, więc $A_0L \parallel BH$ i $B_0L \parallel AH$. Wynika stąd, że odcinki A_0L i B_0L są prostopadłe do boków AC i BC, zatem równoległe do odcinków OB_0 i OA_0. Wykazaliśmy więc, że figura OA_0LB_0 jest równoległobokiem i wobec tego odcinki OA_0 i B_0L są równe i równoległe. Końce odcinka B_0L są środkami boków trójkąta AHC, więc ten odcinek jest równoległy do obu odcinków HK i KA. Ma też taką samą długość, jak każdy z nich. Czworokąt AKA_0O jest więc równoległobokiem, zatem $A_0K = OA = R$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie ABC. Równoległobokiem jest też czworokąt HA_0OK, więc suma kwadratów wszystkich jego czterech boków jest równa sumie kwadratów obu przekątnych:

$$OA_0^2 + A_0H^2 = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2. \tag{0-2}$$

Z równości (0-1) i (0-2) wynika, że $AO_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$, więc też $AO_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$. Analogicznie $BO_1^2 = BO_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$ i $CO_1^2 = CO_2^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$, stąd punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na okręgu o środku w punkcie O i promieniu $\sqrt{\frac{1}{2}(OH^2 + R^2)}$. □

Inne rozwiązanie:

Oznaczmy okręgi skonstruowane w treści zadania przez ω_A, ω_B i ω_C. Na początku pokażemy, że punkty B_1, B_2, C_1 i C_2 leżą na jednym okręgu. Na mocy twierdzenia o trzech osiach potęgowych wystarczy udowodnić, że oś potęgowa okręgów ω_B i ω_C przechodzi przez punkt A.

Niech M i N będą środkami odpowiednio boków AB i AC. Oś potęgowa okręgów ω_B i ω_C jest prostopadła do prostej MN i przechodzi przez punkt H, a ponieważ $MN \parallel BC$, więc oś potęgowa pokrywa się z wysokością trójkąta ABC opuszczaną z punktu A na bok BC, zatem pokazaliśmy, że punkty B_1, B_2, C_1 i C_2 leżą na jednym okręgu. Środkiem tego okręgu jest przecięcie się symetralnych odcinków B_1B_2 i C_1C_2 czyli punkt O — środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Analogicznie pokazujemy, że punkty A_1, A_2, B_1 i B_2 leżą na okręgu o środku w punkcie O, co oznacza, że powstałe dwa okręgi się pokrywają, więc dostajemy tezę zadania. □

6. Danych jest 3^{2k} monet, przy czym jedna z nich jest lżejsza od pozostałych. Mamy do dyspozycji trzy wagi szalkowe, przy czym jedna z nich jest zepsuta i jej wskazania są losowe. Udowodnić, że można wyznaczyć lżejszą monetę przy użyciu $3k + 1$ ważeń.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeżeli wiemy, która waga jest zepsuta, to mając 3^n monet możemy wyznaczyć lżejszą monetę w n ważeniach. Udowodnijmy, ten fakt indukcyjnie ze względu na n.

Jeżeli $n = 0$ to mamy 1 monetę i nie potrzebujemy żadnych ważeń.

Jeżeli mamy 3^n monet to dzielimy je na trzy równoliczne zbiory A, B, C. Kładziemy A i B na przeciwnych szalach dobrej wagi. Jeżeli któryś ze zbiorów A, B okazał się lżejszy, to lżejsza moneta musi być w tym zbiorze. I możemy zastosować dla tego zbioru założenie indukcyjne. Jeżeli waga A była równa wadze B to lżejsza moneta znajduje się w zbiorze C. I również korzystamy z założenia indukcyjnego tym razem dla zbioru C.

Udowodnijmy, że mając 9 monet możemy w trzech ważeniach wyznaczyć lżejszą monetę lub w czterech ważeniach wyznaczyć lżejszą monetę i zepsutą wagę. Ponumerujmy monety od 1 do 9. Dla $i = 1, 2, \ldots, 9$, oznaczmy przez L_i zdanie mówiące, że i-ta moneta jest lżejsza.

Na pierwszej wadze ważymy monety $1,2,3$ i $4,5,6$ (dwie pierwsze wiersze) na drugiej wadze ważymy monety $1,4,7$ i $2,5,8$ (dwie pierwsze kolumny). Zauważmy, że pierwsza waga podaje nam w którym wierszu znajduje się lżejsza moneta, druga w której kolumnie, przy czym, któraś waga mogła się pomylić. Załóżmy, bez straty ogólności, że pierwsza waga wskazała wiersz $1,2,3$ zaś druga waga wskazała kolumnę $3,6,9$. Wówczas dokonujemy trzeciego ważenia na trzeciej wadze kładąc na szalach odpowiednio $1,2$ i $6,9$. Rozważmy możliwe wyniki:

- $\{1,2\} = \{6,9\}$

  Wówczas wagi mówią odpowiednio $\begin{cases} L_1 \vee L_2 \vee L_3 \\ L_3 \vee L_6 \vee L_9 \\ (\sim L_1) \wedge (\sim L_2) \wedge (\sim L_6) \wedge (\sim L_9) \end{cases}$

  Niezależenie od tego które dwa zadania spośród powyższych trzech są prawdziwe musi zachodzić L_3.

- $\{1,2\} > \{6,9\}$

  Wówczas wagi mówią odpowiednio $\begin{cases} L_1 \vee L_2 \vee L_3 \\ L_3 \vee L_6 \vee L_9 \\ L_6 \vee L_9 \end{cases}$

  Pierwsza i trzecia waga mówią zdania wykluczające w związku z tym jedna z nich jest zepsutą wagą. Oznacza to, że druga waga jest wagą dobrą. Wówczas ważymy na drugiej wadze monetę 3 i 6, w ten sposób dowiadujemy się która z monet $3,6,9$ jest lżejsza. Stąd wnioskujemy również która waga jest zła.

- $\{6,9\} > \{1,2\}$

  Ten przypadek jest analogiczny do powyższego.

Udowodnimy tezę zadania indukcyjnie ze względu na k. Dla $k = 1$ mamy 9 monet i postępujemy jak wyżej. Przypuśćmy, że mamy 9^k monet. Dzielimy je na 9 równolicznych grup i dla tych grup stosujemy powyższe rozumowanie. Albo udało nam się wyznaczyć lżejszą grupę w 3 ważeniach i dla tej lżejszej grupy stosujemy założenie indukcyjne. Wykonujemy wtedy w sumie co najwyżej $3(k-1)+1+3 = 3k+1$ ważeń. Albo udało nam się wyznaczyć lżejszą grupę oraz zepsutą wagę używając 4 ważeń. Wówczas stosujemy rozumowanie dla tej grupy, wiedząc która waga jest dobra. W tym przypadku użyliśmy $(2k-2)+4 = 2k+2 \leqslant 3k+1$ ważeń. □

7. W szachownicy $n \times n$ wpisano liczby od 1 do n^2 w ten sposób, że w polu o współrzędnych (i, j) znajduje się liczba $n \cdot (i-1) + j$. W jednym ruchu można wybrać dwa sąsiednie pola (sąsiadujące bokiem) i zastąpić liczby w tych polach ich średnią arytmetyczną (o ile ta średnia jest całkowita). Wyznaczyć wszystkie n dla których można doprowadzić do sytuacji w której w każdym polu jest wpisana ta sama liczba.

Rozwiązanie:

Sąsiedzi liczby k należą do zbioru $\{k-1, k+1, k-n, k+n\}$. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą to wszystkie te liczby są innej parzystości niż k dlatego nie można wykonać ani jednego ruchu.

Zauważmy, że podczas wykonywania ruchów suma liczb w polach szachownicy nie zmienia się i wynosi $1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Gdyby we wszystkich polach była ta sama liczba musiałaby ona wynosić $\frac{n^2+1}{2}$ co jest liczbą całkowitą jedynie dla nieparzystych n.

Wobec powyższych rozważań jedyną możliwą wartością n jest $n = 1$. □

8. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki: $\measuredangle PAB = \measuredangle PCA$ oraz $\measuredangle PAC = \measuredangle PBA$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio punkty przecięcia prostych AP, BP, CP z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Na mocy równości $\measuredangle BAK = \measuredangle ACM$ długości łuków BK i AM są równe. Analogicznie, długości łuków KC i LA są równe. Odcinki LC, AK, MB są więc równoległe oraz mają wspólną symetralną, przechodzącą przez punkt O. Na tej symetralnej leży również punkt P, jako punkt przecięcia przekątnych MC i BL trapezu równoramiennego $MBCL$. Zatem w szczególności $\measuredangle APO = 90°$. □

Inne rozwiązanie:

Niech M i N będą środkami boków AC i AB odpowiednio. Na podstawie warunków zadania stwierdzamy, że trójkąty APC oraz APB są podobne, stąd $\measuredangle AMP = \measuredangle BNP$, więc na czworokącie $ANPM$ można opisać okrąg. Jednocześnie punkt O leży na okręgu opisanym na trójkącie AMN, gdyż $\measuredangle AMO = \measuredangle ONA = 90°$, zatem punkty A, M, N, O i P leżą na jednym okręgu i $\measuredangle APO = \measuredangle ONA = 90°$. □

9. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniających warunek

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| \leqslant 1 \text{ dla } k, m \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych k i m zachodzi nierówność

$$\left|\frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m}\right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

Rozwiązanie:

Pokażemy, że dla $k, m \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$|a_{km} - ka_m| < k. \tag{0-3}$$

Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne względem k. Dla $k = 1$ nierówność (0-3) zachodzi trywialnie. Załóżmy, że (0-3) zachodzi dla pewnego k oraz wszystkich liczb naturalnych m. Wtedy

$$\begin{aligned}|a_{(k+1)m} - (k+1)a_m| &= |a_{km+m} - a_{km} - a_m + a_{km} - ka_m| \leqslant \\ &\leqslant |a_{km+m} - a_{km} - a_m| + |a_{km} - ka_m| \leqslant \\ &\leqslant 1 + |a_{km} - ka_m| < k + 1,\end{aligned}$$

stąd na mocy indukcji, (0-3) zachodzi dla dowolnych $k, m \in \mathbb{N}$.

Zamieniając miejscami k i m w (0-3) dostajemy nierówność

$$|a_{km} - ma_k| < m. \tag{0-4}$$

Ostatecznie, łącząc (0-3) i (0-4) mamy

$$\left|\frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m}\right| = \left|\frac{ma_k - ka_m}{mk}\right| \leqslant \left|\frac{a_{km} - ma_k}{mk}\right| + \left|\frac{a_{km} - ka_m}{mk}\right| < \frac{m}{mk} + \frac{k}{mk} = \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

□

10. Koło gospodyń wiejskich liczy 100 członkiń. Każda gospodyni spotkała się na herbatce z dokładnie 56 innymi gospodyniami z koła. Zarząd koła składa się z 50 pań najbardziej zaangażowanych w działalność koła. Każde dwie z nich spotkały się już na herbatce. Udowodnić, że członkinie koła można podzielić na dwie grupy w taki sposób, że w obrębie każdej z grup dowolne dwie panie piły razem herbatkę.

Rozwiązanie:

Liczba wszystkich spotkań pomiędzy Paniami z zarządu koła, oraz pozostałymi Paniami wynosi $50 \cdot (56 - 49) = 50 \cdot 7$. Liczba wszystkich spotkań wynosi $\frac{56 \cdot 100}{2}$, zaś liczba spotkań pomiędzy Paniami z zarządu wynosi $\frac{50 \cdot 49}{2}$. Oznacza to, że liczba spotkań pomiędzy Paniami które nie są w zarządzie koła wynosi $56 \cdot 50 - 7 \cdot 50 - 25 \cdot 49 = 25 \cdot 49 = \frac{50 \cdot 49}{2}$. Oznacza to, że każda Pani spoza zarządu spotkała się z każdą inną Panią spoza zarządu. Otrzymujemy że jednym z żądanych podziałów jest podział na Panie w zarządzie koła i Panie spoza zarządu koła. $\square$

11. Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q. Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q. Punkt R leży na krawędzi AB, przy czym $BR = \frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP, CD oraz $2 \cdot QR$ można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie:

Niech S będzie środkiem krawędzi BC, zaś T - punktem symetrycznym do punktu C względem punktu Q Ponieważ $BS = \frac{1}{2}BC = BR$, więc punkty R i S leżą symetrycznie względem dwusiecznej BQ kąta ABC, a zatem $QR = QS$. Ponadto trójkąt CTB jest obrazem trójkąta CQS w jednokładności o środku w punkcie C i skali 2, co daje $BT = 2 \cdot QS = 2 \cdot QR$. Wreszcie końce odcinków TP i CD są odpowiednio symetryczne do siebie względem punktu Q, skąd $PT = CD$.

Z wyprowadzonych zależności otrzymujemy, że trójkąt BTP jest zbudowany z odcinków o długościach BP, $BT = 2 \cdot QR$ oraz $PT = CD$, skąd wynika teza (punkty B, T, P nie leżą na jednej prostej, gdyż punkt P znajduje się poza płaszczyzną BCT). $\square$

12. Niech $k > 2$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że liczba

$$2^{2^k-1} - 2^k - 1$$

jest złożona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $M = 2^{2^k-1} - 2^k - 1$. Jeżeli k jest liczbą parzystą to mamy $M \equiv 0 \pmod 3$. Ponadto $M > 3$ i liczba M jest złożona. Niech k będzie liczbą nieparzystą, zapiszmy $k + 1 = 2^a \cdot q$, gdzie q jest liczbą nieparzystą. Mamy

$$2M = 2^{2^k} - 1 - (2^{k+1} + 1) = (2-1)(2+1)(2^2+1)\ldots(2^{2^{k-1}}+1) - (2^{k+1}+1).$$

Zauważmy, że $2^{2^a}+1 \mid 2M$. Istotnie $2^{2^a}+1 \mid (2-1)(2+1)(2^2+1)\ldots(2^{2^{k-1}}+1)$ gdyż $a \leqslant k-1$, oraz $2^{2^a}+1 \mid 2^{k+1}+1 = (2^{2^a})^q + 1^q = (2^{2^a}+1)(2^{2^a(q-1)} - 2^{2^a(q-2)} \pm \ldots + 1)$. $\square$

Rozwiązania - Mecz Matematyczny

1. Liczby a_i, b_i, c_i, d_i spełniają warunki $0 \leqslant c_i \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant d_i$ oraz $a_i + b_i = c_i + d_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} c_i + \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

Rozwiązanie:

Indukcja. Dla $n = 1$ dana nierówność oczywiście zachodzi. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla $n > 1$. Niech więc dane będą liczby a_i, b_i, c_i, d_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$) spełniające warunki $0 \leqslant c_i \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant d_i$ oraz $a_i + b_i = c_i + d_i$. Oznaczmy

$$A = \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad B = \prod_{i=1}^{n} b_i, \quad C = \prod_{i=1}^{n} c_i, \quad D = \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

Z założenia indukcyjnego mamy nierówność $A+B \leqslant C+D$, czyli $0 \leqslant A-C \leqslant B-D$ mamy zaś dowieść, że $Aa_{n+1} + Bb_{n+1} \leqslant Cc_{n+1} + Dd_{n+1}$. Ponieważ $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$, więc $(A-C)a_{n+1} \leqslant (B-D)b_{n+1}$. Zatem

$$\begin{aligned} Aa_{n+1} - Cc_{n+1} &= (A-C)a_{n+1} + C(a_{n+1} - c_{n+1}) \leqslant \\ &\leqslant (B-D)b_{n+1} + D(d_{n+1} - b_{n+1}) = Dd_{n+1} - Bb_{n+1}. \end{aligned}$$

□

2. Rozstrzygnąć czy istnieje liczba całkowita dodatnia n dla której wielomian

$$P(X) = (X+1^2)(X+2^2)\ldots(X+n^2)+1$$

jest iloczynem dwóch niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że dla pewnego n mamy równość $P(X) = Q(X)R(X)$, gdzie $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$. Wówczas dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $Q(-k^2)R(-k^2) = 1$, stąd $Q(-k^2) = R(-k^2)$. Oznacza to, że wielomian $(Q-R)(X)$ jest podzielny przez $(X+1^2)(X+2^2)\ldots(X+n^2)$, a ponieważ jego stopień jest nie większy niż $n-1$, wiec $(Q-R)(X) \equiv 0$. Zatem $P(X) = Q(X)^2$, więc $(n!)^2 + 1 = P(0)^2$ — co jest niemożliwe. □

3. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p oraz liczby całkowite a, b i c takie, że
$$p = a^2 + b^2 + c^2 \text{ oraz } p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Rozwiązanie:

Oczywiście możemy założyć, że $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Jeżeli $p = 2$, wtedy $a = b = 1$ i $c = 0$. Załóżmy więc, że $p \geqslant 3$. Wówczas

$$(a^2 + b^2 + c^2) \mid (a^4 + b^4 + c^4 - (a^2 + b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \mid 2(a^4 - (bc)^2) \Longrightarrow p \mid (a^2 - bc)(a^2 + bc),$$

stąd $p \mid (a^2 - bc)$ lub $p \mid (a^2 + bc)$.

Jeżeli $a^2 + b^2 + c^2 = p$ dzieli $(a^2 + bc)$, to ponieważ

$$(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant a^2 + 2bc \geqslant a^2 + bc,$$

więc $b = c = 0$ lub $a = b = c = 0$. Równość $a = b = c = 0$ przeczy warunkom zadania, natomiast związek $b = c = 0$ implikuje, że $p = a^2$ — co jest niemożliwe.

Przypuśćmy, że $p \mid (a^2 - bc)$. Wówczas łącząc to z nierównością

$$a^2 + b^2 + c^2 > a^2 - bc \geqslant 0$$

uzyskujemy równość $a^2 = bc$, ponieważ $a \geqslant b \geqslant c$, więc $a = b = c$. Zatem $p = 3a^2$ jest liczbą pierwszą, stąd $a = 1$.

Ostatecznie wszystkie czwórki liczb (p, a, b, c) spełniających warunki zadania to $\boxed{(2, \pm 1, \pm 1, 0)}$ oraz $\boxed{(3, \pm 1, \pm 1, \pm 1)}$. □

4. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia x taka, że dowolny element zbioru
$$\mathcal{S} = \{x^i + i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2015\}$$
ma co najmniej 2^{2016} dzielników.

Rozwiązanie:

Rozpoczniemy od wykazania następującego faktu:

Lemat:

Zbiór dzielników pierwszych wartości dowolnego niestałego wielomianu P o współczynnikach całkowitych jest nieskończony.

Dowód:

Przyjmijmy, że dzielników pierwszych wielomianu P jest jedynie skończenie wiele, niech to będzie zbiór $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Jeśli wyraz wolny P jest równy 0, teza jest oczywista. Przyjmijmy, więc, że jest równy $a_0 \neq 0$. Rozważając wielomian $g(x) = \dfrac{P(a_0x)}{a_0}$ możemy założyć, że $a_0 = 1$. Weźmy teraz liczbę $A = p_1p_2 \dots p_n$, wówczas liczba $P(A)$ posiada dzielnik pierwszy nie należący do $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Sprzeczność. $\square$

Dla $i \in \{1, 2, \dots, 2015\}$ rozpatrzmy wielomian $P_i(X) = X^i + i$. Na podstawie lematu zbiór $\mathbb{P}_i$ — dzielników pierwszych wartości wielomianu P_i jest nieskończony. Dla dowolnego $p \in \mathbb{P}_i$ istnieje $x_p \in \mathbb{Z}$ takie, że $x_p^i + i \equiv 0 \pmod{p}$. Dla $i = 1$ wybieramy dowolny podzbiór $\mathbb{P}_i^{2016} \subseteq \mathbb{P}_i$ mający 2016 elementów. Jeśli $i \geqslant 2$ podzbiór $\mathbb{P}_i^{2016} \subseteq \mathbb{P}_i$, który posiada 2016 elementów wybieramy w taki sposób aby, zbiory $\mathbb{P}_i^{2016}$ oraz $\mathbb{P}_j^{2016}$ były rozłączne dla $j < i$.

Dla $i \in \{1, 2, \dots, 2015\}$ niech $\mathbb{P}_i = \{p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,n}\}$. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach układ kongruencji

$$x \equiv x_{p_{i,j}} \pmod{p_{i,j}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2015,\ 1 \leqslant j \leqslant 2016$$

posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich. Ponadto dla ustalonego $i \in \{1, 2, \dots, 2015\}$ mamy $x^i + i \equiv x_p^i + i \equiv 0 \pmod{p}$ dla dowolnej liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}_i$. Zatem liczba $x^i + i$ posiada co najmniej 2016 różnych dzielników pierwszych, więc posiada co najmniej 2^{2016} dzielników. $\square$

5. Dane są liczby całkowite dodatnie $a_1 < a_2 < \dots < a_{2016} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{a_1, a_2, \dots, a_{2016}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Rozwiązanie:

Dla zbioru $X \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_{2016}\}$ niech $\mathcal{S}_0(X)$, $\mathcal{S}_1(X)$ i $\mathcal{S}_2(X)$ oznaczają odpowiednio liczbę elementów, sumę elementów i sumę kwadratów elementów zbioru X.

Wystarczy udowodnić, że istnieją takie dwa różne podzbiory C i D zbioru $\{a_1, a_2, \dots, a_{2016}\}$, dla których $\mathcal{S}_i(C) = \mathcal{S}_i(D)$ dla $i = 0, 1, 2$. Wówczas zbiory $A = C \setminus D$ oraz $B = D \setminus C$ są niepuste i spełniają warunki zadania.

Dla dowolnego podzbioru $X \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_{2016}\}$ mamy nierówność $(\star)$

$$\mathcal{S}_0(X) < 10^4,\ \mathcal{S}_1(X) < 2016 \cdot 10^{100} < 10^{104},\ s_2(X) < 2016 \cdot 10^{200} < 10^{204}.$$

Oznaczając $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}_0(X) + 10^4\mathcal{S}_1(X) + 10^{108}\mathcal{S}_2(X)$ uzyskujemy

$$\mathcal{S}(X) < 10^{313} < (10^3)^{105} < 2^{1050} < 2^{2016}.$$

Stąd istnieją takie dwa różne podzbiory C, D zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$, że $S(C) = S(D)$. Z nierówności $(\star)$ wynika, że $\mathcal{S}_i(C) = \mathcal{S}_i(D)$ dla $i = 0, 1, 2$, co kończy rozwiązanie zadania. $\square$

6. Dany jest prostokąt, który może być pokryty przez skończoną liczbę prostokątów o wymiarach $1 \times m$ oraz $n \times 1$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że prostokąt ten może zostać pokryty przy użyciu prostokątów jednego rodzaju.

Rozwiązanie:

Niech liczby naturalne a i b oznaczają wymiary wyjściowego prostokąta. Podzielmy ten prostokąt na kwadraty 1×1 i oznaczmy je kolejno przez

$$(1,1), (1,2), \ldots, (1,b), (2,1), (2,2), \ldots, (2,b), \ldots, (a,1), (a,2), \ldots, (a,b).$$

W pole o numerze (i,j) wpisujemy liczbę $\epsilon_1^i \epsilon_2^j$, gdzie

$$\epsilon_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{oraz} \quad \epsilon_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right).$$

Łatwo zauważyć, że suma wpisanych liczb w każdy prostokąt $1 \times m$ oraz $n \times 1$ jest równa zero. Zatem skoro wyjściowy prostokąt został nimi pokryty, to suma wszystkich wpisanych liczb jest równa 0. Mamy więc

$$0 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant a \\ 1 \leqslant j \leqslant b}} \epsilon_1^i \epsilon_2^j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant a} \epsilon_1^i \sum_{1 \leqslant j \leqslant b} \epsilon_2^j,$$

stąd jedna z powyższych sum jest równa zero, ale to oznacza, że $n \mid a$ lub $m \mid b$. $\square$

7. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ w którym

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAE \quad \text{oraz} \quad \measuredangle CBA = \measuredangle DCA = \measuredangle EDA.$$

Niech P będzie punktem przecięcia prostych BD i CE. Pokazać, że prosta AP połowi odcinek CD.

Rozwiązanie:

Skoro trójkąty ABC i ADE są podobne oraz $\measuredangle CAE = \measuredangle BAD$, więc podobne są również trójkąty ACE i ABD, stąd $\measuredangle PCA = \measuredangle PBA$ — co oznacza, że punkty A, B, C i P leżą na jednym okręgu ω_1. Analogicznie, punkty P, A, E i D leżą na okręgu ω_2. Na podstawie równości $\measuredangle DCA = \measuredangle CBA$ oraz $\measuredangle ADC = \measuredangle AED$ wnioskujemy, że prosta CD jest styczną zewnętrzną do okręgów ω_1 i ω_2. Prosta AP jest więc osią potęgową ω_1 i ω_2, która oczywiście połowi odcinek styczny CD. $\square$

8. W trójkącie ABC punkty K i L są środkami boków odpowiednio AB i AC. Punkt $P \neq A$ jest punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABL i AKC. Niech $Q \neq A$ będzie punktem przecięcia prostej AP i okręgu opisanego na trójkącie AKL. Pokazać, że $2AP = 3AQ$.

Rozwiązanie:

Rozważmy przekształcenie ϕ będące złożeniem symetrii względem dwusiecznej kąta BAC z inwersją względem okręgu o środku w punkcie A i promieniu równym $\sqrt{\frac{1}{2}AB \cdot AC}$. Przez X^* oznaczymy obraz punktu X poprzez przekształcenie ϕ. Wówczas $K^* = C$ oraz $L^* = B$. Punkt P^* jest punktem przecięcia środkowych B^*L^* i C^*K^* w trójkącie AL^*K^*, gdyż są to obrazy odpowiednio okręgów ALB i AKC poprzez ϕ. Zatem P^* jest środkiem ciężkości trójkąta AL^*K^*. Punkt Q^* jest przecięciem prostej AP^* z odcinkiem L^*K^*, czyli środkiem odcinka K^*L^*. Ponieważ środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w stosunku $2:1$, stąd $3AP^* = 2AQ^*$ co oznacza, że $2AP = 3AQ$. $\square$

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

    Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Literatura

[1] http://archom.ptm.org.pl/

[2] http://artofproblemsolving.com/community/c89

[3] http://www.matematyka.pl/

[4] http://students.mimuw.edu.pl/~tc319421/dwustosunek.pdf

[5] http://www.om.edu.pl/

[6] http://www.omg.edu.pl/