III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Jodłówka Tuchowska, 30 marca – 2 kwietnia 2016

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Jodłówka Tuchowska, 30 marca – 2 kwietnia 2016

Dom Wczasów Dziecięcych
33-173 Jodłówka Tuchowska, 275b
tel. 14 652-68-24, 14 652-79-19

Skład tekstu:

Dominik Burek
Maciej Gawron

Wstęp

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej organizowany przez III LO w Tarnowie odbył się w dniach 30 marca - 2 kwietnia w Jodłówce Tuchowskiej, w Domu Wczasów Dziecięcych. Kadrę obozu stanowili: Dominik Burek (student IV roku matematyki IMUJ), Maciej Gawron (doktorant IV roku matematyki IMUJ).

W obozie uczestniczyło 20 uczniów z III LO w Tarnowie, V LO w Krakowie, II LO w Końskich, I LO w Piotrkowie Trybunalskim, Katolickiego Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie oraz Gimnazjum nr 1 w Końskich. Pełną listę uczestników obozu zamieszczono poniżej.

W tych dniach odbyły się zawody indywidualne a 1 kwietnia został rozegrany mecz matematyczny. Regulamin meczu znajduje się na końcu tej broszury. Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli pięć godzin na rozwiązanie trzech zadań. Szczegółowe wyniki zawodów indywidualnych przedstawiają tabele na następnych stronach.

Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Kadra obozu

Lista uczestników obozu

III LO w Tarnowie

Edyta Garbarz
Filip Gawron
Paweł Kolendo
Jakub Węgrecki

V LO w Krakowie

Aleksandra Cynk
Jędrzej Kula
Stanisław Nowak
Błażej Rozwoda
Mariusz Trela
Krzysztof Michalik
Artur Zubilewicz

II LO w Końskich

Piotr Ambroszczyk
Konrad Komisarczyk

I LO w Piotrkowie Trybunalskim

Natalia Kucharczuk
Jan Kociniak
Tomasz Urbański
Piotr Żuber

Katolickie Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie

Radosław Żak

Gimnazjum nr 1 w Końskich

Maciej Dziuba
Mikołaj Grzebieluch

WYNIKI

			30 marca				31 marca				1 kwietnia				2 kwietnia				
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Suma
1.	Maciej	Dziuba	6	-	-	-	2	-	6	6	5	-	-	-	6	6	2	-	39
2.	Tomasz	Urbański	6	-	-	-	6	6	-	6	6	-	-	-	-	-	6	-	36
	Radosław	Żak	6	-	-	-	6	6	-	-	6	6	-	-	-	-	6	-	36
4.	Filip	Gawron	6	0	-	-	0	6	-	6	5	-	6	-	5	-	0	-	34
5.	Artur	Zubilewicz	6	-	-	-	6	-	-	6	6	6	-	-	-	-	-	-	30
	Konrad	Komisarczyk	6	-	-	-	5	-	-	6	5	-	-	-	6	-	2	-	30
7.	Jakub	Węgrecki	6	-	2	-	6	-	-	2	2	-	6	-	5	-	0	-	29
8.	Piotr	Ambroszczyk	6	6	6	6													24
9.	Krzysztof	Michalik	6	-	-	-	5	-	-	6	-	-	-	-	-	-	6	-	23
10.	Stanisław	Nowak	6	-	2	-	0	6	0	6	-	-	-	-	-	-	-	-	20
11.	Natalia	Kucharczuk	6	-	-	6	-	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	18
12.	Jędrzej	Kula	6	-	-	-	0	-	-	0	5	6	-	-	-	-	-	-	17
13.	Aleksandra	Cynk	2	-	-	-	6	-	2	2	-	0	-	0					12
	Jan	Kociniak	6	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	12
	Błażej	Rozwoda	6	-	-	-	6	-	-	-									12
16.	Piotr	Żuber	6	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	11
17.	Edyta	Garbarz	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6
	Mikołaj	Grzebieluch	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6
	Paweł	Kolendo	6	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6
		Trudność	0,96	0,05	0,09	0,11	0,42	0,21	0,07	0,40	0,50	0,16	0,11	0,00	0,19	0,05	0,19	0,00	

1.	Piotr	Ambroszczyk					6	6	6	-	5	6	0	-	6	-	6	-	41
2.	Mariusz	Trela	6	-	-	-	6	-	6	-	-	-	-	6	6	6	-	-	36

Rozkład punktów

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	18	0	1	0
2.	1	0	0	18
3.	1	0	2	16
4.	2	0	0	17
5.	6	2	1	10
6.	4	0	0	14
7.	1	0	1	16
8.	7	0	2	9
9.	5	5	1	5
10.	3	0	0	14
11.	2	0	0	15
12.	0	0	0	16
13.	2	2	0	12
14.	1	0	0	16
15.	3	0	2	11
16.	0	0	0	16

Treści zadań

Zawody indywidualne

5. Prostokąt $\mathcal{R}$ został podzielony na skończenie wiele mniejszych prostokątów w taki sposób, że ich boki są równoległe do boków prostokąta $\mathcal{R}$. Dowolna prosta równoległa do boków $\mathcal{R}$ i przecinająca jego wnętrze, przecina również wnętrze mniejszego prostokąta z podziału. Udowodnić, że istnieje prostokąt nie mający punktu wspólnego z brzegiem $\mathcal{R}$.

6. Dla danej liczby całkowitej dodatniej $n \geqslant 1$ oraz liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rozważmy wielomiany $f(x)$, $g(x)$ zadane jako

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} x^k.$$

Udowodnić, że jeżeli liczby 1 i 2^{n+1} są pierwiastkami g, to f posiada pierwiastek w przedziale $(0, 2^n)$.

7. Punkt M leży na boku AB czworokąta wypukłego $ABCD$ w taki sposób, że w czworokąty $AMCD$ oraz $MBCD$ można wpisać okręgi o środkach odpowiednio O_1 i O_2. Prosta O_1O_2 jest prostopadła do dwusiecznej kąta CMD. Pokazać, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

8. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać, że jeżeli dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ zachodzi podzielność

$$2^n - 1 \mid 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k},$$

to $k \geqslant n$.

9. Znaleźć największą możliwą wartość liczby $(x^3 + 1)(y^3 + 1)$, jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y = 1$.

10. Ostrosłup czworokątny $SABCD$ jest wpisany w sferę. Punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 są rzutami punktów A, B, C i D na proste odpowiednio SC, SD, SA i SB. Załóżmy, że punkty S, A_1, B_1, C_1 i D_1 leżą na jednej sferze. Pokazać, że punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 są współpłaszczyznowe.

11. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że n^2 dzieli liczbę $2^n + 3^n$.

12. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Rozważmy zbiór $2n^2$ prostych na płaszczyźnie, z których żadne dwie nie są równoległe oraz żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Proste dzielą płaszczyznę na pewne obszary w kształcie wielokąta. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich tych obszarów, które mają skończone pole. Pokazać, że możemy pokolorować n prostych na czerwono w taki sposób, że nie istnieje obszar ze zbioru $\mathcal{S}$, którego brzeg jest w całości pomalowany na czerwono.

13. Pokazać, że dowolny czworokąt wypukły można podzielić na pięć wielokątów, z których każdy posiada oś symetrii.

14. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dla $n \geqslant 3$, będą parami względnie pierwszymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Załóżmy, że liczby $\prod\limits_{i \neq k} a_i$ dają resztę r przy dzieleniu przez a_k dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pokazać, że $r \leqslant n - 2$.

15. W Jodłówce Tuchowskiej znajdują się trzy szkoły A, B i C. Do każdej ze szkół uczęszcza co najmniej jeden uczeń. Wiadomo, że wśród dowolnych trzech uczniów, po jednym z każdej szkoły, istnieją dwaj uczniowie którzy się wzajemnie znają oraz dwaj którzy się wzajemnie nie znają. Pokazać, że spełniony jest co najmniej jeden z poniższych warunków:

- Istnieje uczeń ze szkoły A znający wszystkich uczniów ze szkoły B,
- Istnieje uczeń ze szkoły B znający wszystkich uczniów ze szkoły C,
- Istnieje uczeń ze szkoły C znający wszystkich uczniów ze szkoły A.

16. Czy istnieje ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ parami względnie pierwszych liczb naturalnych taki, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

nie jest iloczynem niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych?

Grupa Zaawansowana

1. Niech x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 będą liczbami rzeczywistymi o zerowej sumie. Pokazać, że

$$|\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos x_3| + |\cos x_4| + |\cos x_5| \geqslant 1.$$

2. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Udowodnić, że liczba $2^{2^n} + 1$ ma dzielnik pierwszy, który jest większy niż $2^{n+2}(n+1)$.

3. Niech $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $k \in S$. Wykazać, że istnieje dokładnie kn^{n-1} funkcji $f \colon S \to S$, takich, że dla dowolnego $s \in S$ istnieje takie $j \geqslant 0$, że $f^j(s) \leqslant k$, gdzie $f^j(x)$ oznacza j-krotne złożenie funkcji f.

4. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Okrąg ω jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach M i N oraz do okręgu opisanego na trójkącie BOC. Pokazać, że prosta MN połowi odcinek AI, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

5. Wysokości AA_1, BB_1 i CC_1 trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Proste przechodzące przez H i prostopadłe do prostych B_1C_1 i A_1C_1 przecinają proste odpowiednio CA i CB w punktach P i Q (w tej kolejności). Pokazać, że prosta przechodząca przez C i prostopadła do A_1B_1 połowi odcinek PQ.

6. Pokazać, że istnieje nierozkładalny wielomian P postaci

$$P(X) = X^{2016} + a_{2015}X^{2015} + \ldots + a_1X + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_{2015}$ są niezerowymi liczbami całkowitymi taki, że $|P(x)|$ jest liczbą złożoną dla dowolnej liczby całkowitej x.

7. Niech $a > 1$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita nieujemna n, że liczba $2^{2^n} + a$ nie jest pierwsza.

8. W szachownicy $n \times n$ wpisano liczby od 1 do n^2 w taki sposób, że liczby wpisane w dwa pola dzielące wspólny bok, różnią się o co najwyżej n. Pokazać, że istnieje kwadrat 2×2 taki, że sumy liczb wpisanych na przekątnych tego kwadratu są równe.

9. Niech $P_1, P_2, \ldots, P_n$ będą punktami na płaszczyźnie. Udowodnić, że dla pewnego i od 1 do n zbiór odległości pomiędzy punktem P_i a pozostałymi punktami ma co najmniej $\sqrt{\left(n-\frac{3}{4}\right)}-\frac{1}{2}$ różnych elementów.

10. Niech I będzie środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg o opisany na trójkącie BIC przecina ω w punktach X i Y. Wspólne styczne zewnętrzne do o i ω przecinają się w punkcie Z. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie XYZ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a^4+2b^2c^2}{a^2+2bc}}+\sqrt{\frac{b^4+2c^2a^2}{b^2+2ca}}+\sqrt{\frac{c^4+2a^2b^2}{c^2+2ab}} \geqslant a+b+c.$$

12. Niech φ oznacza funkcję *Eulera*. Wykazać, że istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2016}$ takie, że

$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \ldots > \varphi(a_{2016}).$$

13. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y i z, że

$$abc + xyz \equiv ab + bc + ca - xy - yz - zx \equiv 0 \pmod{a+b+c+x+y+z}.$$

Pokazać, że liczba $a+b+c+x+y+z$ jest złożona.

14. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, ponadto niech f^k oznacza k-krotne złożenie funkcji f. Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazwiemy *ładną* jeżeli równość

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n,$$

zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie m, że dla dowolnej ładnej funkcji zachodzi $f^{2016}(m) = m$.

15. W trójkącie ABC punkty O i I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego. Punkty D, E i F leżące na bokach odpowiednio BC, CA i AB są takie, że $BD + BF = CA$ oraz $CD + CE = AB$. Okręgi opisane na trójkątach BFD i CDE przecinają się w punkcie $P \neq D$. Pokazać, że $OP = OI$.

16. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej k. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ przez $f(n)$ oznaczmy najmniejszą liczbę całkowitą dla której ostnieje n-elementowy zbiór liczb całkowitych $\mathcal{A}$ taki, że $S\left(\sum_{x \in \mathcal{B}} x\right) = f(n)$ dla dowolnego niepustego podzbioru $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Pokazać, że istnieją liczby rzeczywiste $0 < k_1 < k_2$ takie, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$k_1 \log_{10} n \leqslant f(n) \leqslant k_2 \log_{10} n.$$

Mecz Matematyczny

1. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych liczby rzeczywistych dodatnich x, y spełniona jest równość

$$(x+y)f((f(x)y)) = x^2 f(f(x)+f(y)).$$

2. Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ są takie, że

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$, gdzie przyjmujemy, że $x_{2017} = x_1$, $x_{2018} = x_2$. Wyznaczyć największą możliwą wartość liczby

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i x_{i+2}.$$

3. Niech f i g będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych takimi, że punkty $(f(i), g(i))$ dla $1 \leqslant i \leqslant 2016$, są na płaszczyźnie kolejnymi wierzchołkami 2016-kąta foremnego. Pokazać, że co najmniej jeden z wielomianów f i g ma stopień nie mniejszy niż 2015.

4. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej n. Pokazać, że $S(n!) \geqslant \lfloor \log n \rfloor$.

5. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że liczba n^2+1 jest bezkwadratowa.

6. Dane są różne liczby całkowite $a, b > 1$. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że liczba $(a^n-1)(b^n-1)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Na przyjęciu spotkało się n osób. Udowodnić, że można te osoby usadzić przy co najwyżej dwóch stołach w ten sposób, że każda osoba ma parzystą liczbę znajomych przy swoim stoliku.

8. Każdy punkt przestrzeni pomalowano na biało lub czarno. Udowodnić, że istnieje takich 5 punktów jednego koloru, że jeden z nich jest środkiem czworościanu o wierzchołkach w pozostałych punktach.

9. W każdym punkcie kratowym płaszczyzny, który ma niedodatnią współrzędną x położono jeden pionek. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu pewnej pary pionków stojących na sąsiadujących w pionie lub poziomie punktach A i B i „zbicie" jednym z nich drugiego, tj. zdjęcie pionka z pola A i przestawienie pionka z pola B na taki punkt C, że A jest środkiem odcinka BC (w punkcie C, na który przestawiamy pionek z punktu B, nie mógł dotychczas stać żaden pionek). Znaleźć największe x, dla którego istnieje skończona sekwencja dozwolonych ruchów, po której pewien pionek znajduje się w punkcie (x, y) (dla pewnego y).

10. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty M i N są środkami odpowiednio łuków ABC i BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Pokazać, że punkty M, I i N są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC + BC = 3AB$.

11. Sfera ω wpisana w ostrosłup czworokątny $ABCDS$ jest styczna do ścian ABS i CBS w punktach odpowiednio K i L. Półproste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, natomiast półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie Q. Pokazać, że jeśli PK i QL się przecinają, to punkt styczności ω z płaszczyzną $ABCD$ leży na prostej BD.

12. Skonstruować za pomocą cyrkla i linijki czworokąt, który jest wpisany w okrąg o promieniu R i opisany na okręgu o promieniu r, znając promienie r i R oraz kąt α między przekątnymi czworokąta.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

5. Prostokąt $\mathcal{R}$ został podzielony na skończenie wiele mniejszych prostokątów w taki sposób, że ich boki są równoległe do boków prostokąta $\mathcal{R}$. Dowolna prosta równoległa do boków $\mathcal{R}$ i przecinająca jego wnętrze, przecina również wnętrze mniejszego prostokąta z podziału. Udowodnić, że istnieje prostokąt nie mający punktu wspólnego z brzegiem $\mathcal{R}$.

Rozwiązanie:

Linię, która przecina wnętrze prostokąta $\mathcal{R}$ i nieprzecina wnętrza żadnego mniejszego prostokąta z podziału, nazwiemy *zakazaną linią*. Prostokąt nie mający punktów wspólnych z bokami prostokąta $\mathcal{R}$ nazwiemy *prostokątem brzegowym.*

Załóżmy, że istnieje podział prostokąta $\mathcal{R}$ taki, że nie istnieje zakazana linia oraz brzegowy prostokąt. Z wszystkich takich podziałów wybierzmy podział o najmniejszej liczbie prostokątów w podziale. Liczba prostokątów w takim podziale musi być większa od 2, w przeciwnym razie istniałaby zakazana linia.

Możemy założyć, że żadne dwa prostokąty w podziale nie mają wspólnego boku, gdyż zastępując je prostokątem tworzonym przez nich, zmniejszamy liczbę prostokątów w podziale przy jednoczesnym braku prostokątów brzegowych i zakazanych linii.

Oznaczmy wierzchołki prostokąta $\mathcal{R}$ przez $ABCD$. W lewym dolnym i prawym dolnym rogu $\mathcal{R}$ znajdują się prostokąty a i b (przy wierzchołkach odpowiednio A i B). Odnotujmy, że $a \neq b$ oraz dopuszczamy możliwość styczności a i b. Możemy założyć, że wysokość a nie przewyższa wysokości b (przez wysokość prostokąta z podziału rozumiemy jego bok równoległy do AD). Rozpatrzmy prostokąt c, który sąsiaduje z prostokątem a i ma wspólny bok z AB. Wysokości prostokątów a i c są różne, więc dostajemy dwa przypadki:

- Wysokość c jest mniejsza od wysokości a. Wtedy rozpatrujemy prostokąt z podziału d, który jest styczny do a i c. Widzimy, że d nie ma punktów wspólnych z bokami AD, BC i AB, więc musi posiadać punkt wspólny z CD, stąd prosta zawierająca wysokości prostokątów c i d tworzą linię zakazaną — sprzeczność.

- Wysokość c jest większa od wysokości a. Wtedy rozpatrujemy prostokąt z podziału d, który jest styczny do a i c. Widzimy, że d nie ma punktów wspólnych z bokami AD, BC i AB, więc musi posiadać punkt wspólny z CD, stąd prosta zawierająca wysokości prostokątów a i d tworzą linię zakazaną — sprzeczność.

W obu powyższych przypadkach dostaliśmy sprzeczność, więc zakładając brak zakazanych lini musi istnieć prostokąt brzegowy. $\square$

6. Dla danej liczby całkowitej dodatniej $n \geqslant 1$ oraz liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rozważmy wielomiany $f(x)$, $g(x)$ zadane jako

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} x^k.$$

Udowodnić, że jeżeli liczby 1 i 2^{n+1} są pierwiastkami g, to f posiada pierwiastek w przedziale $(0, 2^n)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$g(2x) - g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} 2^k x^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = f(x),$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. W szczególności

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2^n) = (g(2)-g(1))+(g(4)-g(2))+\ldots+\left(g\left(2^{n+1}\right)-g\left(2^n\right)\right)$$

$$= g\left(2^{n+1}\right) - g(1) = 0.$$

Wśród liczb postaci $f\left(2^i\right)$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$ istnieje więc taka, że $f\left(2^i\right) = 0$ lub dwie liczby $f\left(2^i\right)$, $f\left(2^j\right)$ przeciwnych znaków (gdzie $i < j$). W pierwszym przypadku 2^i jest szukanym pierwiastkiem f, a w drugim przypadku f posiada pierwiastek w przedziale $\left(2^i, 2^j\right)$. W obu sytuacjach żądany warunek jest spełniony i rozwiązanie zadania jest zakończone. $\square$

7. Punkt M leży na boku AB czworokąta wypukłego $ABCD$ w taki sposób, że w czworokąty $AMCD$ oraz $MBCD$ można wpisać okręgi o środkach odpowiednio O_1 i O_2. Prosta O_1O_2 jest prostopadła do dwusiecznej kąta CMD. Pokazać, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie:

Jeżeli $AB \parallel CD$, to okręgi wpisane w czworokąty $AMCD$ oraz $MBCD$ są przystające, stąd na podstawie warunków zadania nasza konfiguracja jest symetryczna względem dwusiecznej kąta CMD, stąd $ABCD$ jest trapezem równoramiennym (lub prostokątem).

Załóżmy teraz, że AB i CD przecinają się w punkcie K. Możemy założyć, że punkt A leży między punktami K i B. Prosta O_1O_2 jest dwusieczną kąta

KAD i tworzy równe kąty z prostymi CM i DM, stąd $\sphericalangle DMK = \sphericalangle KCM$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle DO_2K = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle MKD - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\left(\sphericalangle MKD + \sphericalangle DMK\right)\right) =$$
$$= \frac{\sphericalangle DMK}{2} = \frac{\sphericalangle KCM}{2} = \sphericalangle DCO_1,$$

więc na czworokącie CDO_1O_2 można opisać okrąg.

Podobny rachunek na kątach daje nam, że

$$\sphericalangle KCB = 2\sphericalangle DCO_2 = 2\sphericalangle DO_1K =$$
$$= 2\left(180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle MKD - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\left(\sphericalangle MKD + \sphericalangle DAK\right)\right)\right) =$$
$$= 2 \cdot \frac{\sphericalangle DAK}{2} = \sphericalangle DAK,$$

więc na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. $\square$

8. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać, że jeżeli dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ zachodzi podzielność

$$2^n - 1 \mid 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k},$$

to $k \geqslant n$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący lemat:

Lemat. *Załóżmy, że $b > 1$ i a jest wielokrotnością liczby $b^n - 1$, dla liczb całkowitych dodatnich a, b i n. Wówczas a posiada co najmniej n niezerowych cyfr w zapisie o podstawie b.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje wielokrotność A liczby $b^n - 1$, której zapis przy podstawie b liczy mniej niż n niezerowych cyfr. Załóżmy ponadto, że A posiada najmniejszą sumę cyfr i najmniejszą liczbę niezerowych cyfr spośród wszystkich takich liczb. Niech $A = a_1b^{n_1} + ab^{n_2} + \ldots + a_sb^{n_s}$, gdzie $n_1 > n_2 > \ldots > n_s$. Pokażemy, że $s = n$.

Niech $n_i \equiv n_j \equiv r \pmod{n}$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Liczba

$$B = A - a_ib^{n_i} - a_jb^{n_j} + (a_i + a_j)b^{nn_1+r}$$

jest wielokrotnością $b^n - 1$ mniejszą od A. Ponadto ma taką samą sumę cyfr co A, gdy $a_i + a_j < b$, stąd $b \leqslant a_i + a_j < 2b$ na podstawie minimalności. Jeśli $c = a_i + a_j - b$, to

$$B = b^{nn_1+r+1} + cb^{nn_1+r} + a_1b^{n_1} + \ldots + a_{i-1}b^{n_{i-1}} + a_{i+1}b^{n_{i+1}} + \ldots +$$
$$+ a_{j-1}b^{n_{j-1}} + a_{j+1}b^{n_{j+1}} + \ldots + a_sb^{n_s}.$$

Zatem suma cyfr liczby B przy podstawie b wynosi $a_1 + a_2 + \ldots + a_s + 1 + c - a_i - a_j < a_1 + a_2 + \ldots + a_s$ — sprzeczność z minimalnością A. Wobec tego liczby $n_1, n_2, \ldots, n_s$ dają różne reszty z dzielenia przez n, więc $s \leqslant n$.

Gdyby $s < n$, to rozważmy liczbę $C = a_1 b^{r_1} + a_2 b^{r_2} + \ldots + a_s b^{r_s}$, która jest wielokrotnością $b^n - 1$, gdzie r_i jest resztą z dzielenia n_i przez n dla $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Wówczas $C < b^n - 1$ — sprzeczność. □

Korzystając z lematu dla $b = 2$ oraz $a = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}$, widzimy, że zapis dwójkowy liczby $2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}$, ma co najmniej n jedynek, stąd $k \geqslant n$. □

Rozwiązanie:

Wybierzmy najmniejsze takie k, że istnieją liczby $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$ o tej własności,że

$$2^n - 1 \mid 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k},$$

ponadto wśród wyborów takich ciągów długości k wybierzmy taki, że maksymalna liczba w tym ciągu jest najmniejsza możliwa. Zauważmy, że liczby n_i są parami różne, ostotnie gdyby $n_i = n_j$ to zastępując tę parę liczb przez $n_i + 1$ dostaniemy krótszy ciąg spełniający warunki. Ponadto $n_k \leqslant n - 1$ ponieważ w przeciwnym razie, możemy zastąpić n_k przez $n_k - n$ i otrzymać ciąg o mniejszej największej liczbie w ciągu. Ostatecznie nasz wybrany ciąg składa się z różnych liczb ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Jednakże,

$$2^n - 1 \mid 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k} \leqslant 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

czyli w powyższej nierównośći musi zachodzić równość i

$$\{n_1, \ldots, n_k\} = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

co za tym idzie $k \geqslant n$. □

9. Znaleźć największą możliwą wartość liczby $(x^3+1)(y^3+1)$, jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y = 1$.

Rozwiązanie:

Niech $p = xy$. Wówczas

$$(x^3+1)(y^3+1) = (xy)^3 + (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 1 = p^3 - 3p + 2 = 4 + (p+1)^2(p-2).$$

Ponieważ $p \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$, więc $p - 2 < 0$. Zatem $(x^3+1)(y^3+1) \leqslant 4$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $xy = -1$ (oraz $x + y = 1$) tzn. gdy

$$\{x, y\} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

$\square$

10. Ostrosłup czworokątny $SABCD$ jest wpisany w sferę. Punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 są rzutami punktów A, B, C i D na proste odpowiednio SC, SD, SA i SB. Załóżmy, że punkty S, A_1, B_1, C_1 i D_1 leżą na jednej sferze. Pokazać, że punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 są współpłaszczyznowe.

Rozwiązanie:

Odcinki AA_1 i CC_1 są wysokościami trójkąta SAC, więc $SC \cdot SA_1 = SA \cdot SC_1$, stąd inwersja ϕ o środku w punkcie S i promieniu $\sqrt{SC \cdot SA_1}$ przeprowadza A_1 na C i C_1 na A. Ponieważ $SB \cdot SD_1 = SD \cdot SB_1$, więc jeśli $\phi(B) = B_2$ oraz $\phi(D) = D_2$, to $B_2D_2 \parallel BD$. Z drugiej strony punkty A, C, B_2, D_2 są współpłaszczyznowe jako obrazy punktów leżących na sferze poprzez ϕ. Jeżeli prosta B_2D_2 nie leżałaby w płaszczyźnie $ABCD$, wówczas proste B_2D_2 i AC byłyby skośne, więc jedyną możliwością jest sytuacja w której $B_2 = D$ oraz $D_2 = B$. Ostatecznie punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 leżą na płaszczyźnie będącej obrazem poprzez ϕ sfery opisanej na ostrosłupie $SABCD$. $\square$

11. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że n^2 dzieli liczbę $2^n + 3^n$.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że jeśli dla pewnej liczby naturalnej a mamy podzielność $a^2 \mid 2^a + 3^a$, to dla liczby naturalnej $b := \dfrac{2^a + 3^a}{a}$ zachodzi podzielność $b^2 \mid 2^b + 3^b$, stąd oczywiście dostaniemy tezę zadania.

Niech $k := \dfrac{b}{a} \in \mathbb{N}$. Łatwo zauważyć, że k jest liczbą nieparzystą, stąd

$$\begin{aligned}\frac{2^b + 3^b}{2^a + 3^a} &= (2^a)^{k-1} - (2^a)^{k-2} \cdot 3^a + \ldots - 2^a \cdot (3^a)^{k-2} + (3^a)^{k-1} \equiv \\ &\equiv (-3^a)^{k-1} - (-3^a)^{k-2} \cdot 3^a + \ldots - (-3^a) \cdot (3^a)^{k-2} + (3^a)^{k-1} \\ &= \underbrace{(3^a)^{k-1} + (3^a)^{k-1} + \ldots + (3^a)^{k-1}}_{k} = k \cdot (3^a)^{k-1} \equiv 0 \pmod{k}.\end{aligned}$$

Zatem liczba $2^b + 3^b$ jest podzielna przez

$$k \cdot (2^a + 3^a) = \frac{b}{a} \cdot (2^a + 3^a) = \frac{2^a + 3^a}{a^2} \cdot (2^a + 3^a) = \left(\frac{2^a + 3^a}{a}\right)^2 = b^2.$$

$\square$

12. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Rozważmy zbiór $2n^2$ prostych na płaszczyźnie, z których żadne dwie nie są równoległe oraz żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Proste dzielą płaszczyznę na pewne obszary w kształcie wielokąta. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich tych obszarów, które mają skończone pole. Pokazać, że możemy pokolorować n prostych na czerwono w taki sposób, że nie istnieje obszar ze zbioru $\mathcal{S}$, którego brzeg jest w całości pomalowany na czerwono.

Rozwiązanie:

Niech $\mathcal{L}$ oznacza zbiór wszystkich $2n^2$ prostych. Wybierzmy maksymalny (względem inkluzji) podzbiór $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ taki, że dla dowolnego kolorowania prostych ze zbioru $\mathcal{B}$, żaden obszar z $\mathcal{S}$ nie będzie miał w całości pomalowanego brzegu. Oznaczając przez k liczbę elementów zbioru $\mathcal{B}$ pokażemy, że $k \geqslant n$.

Pokolorujmy wszystkie proste z $\mathcal{L} \setminus \mathcal{B}$ na niebiesko. Punkt nazwiemy *czerwonym,* jeśli jest przecięciem dwóch czerwonych prostych. Widzimy, że istnieje dokładnie $\binom{k}{2}$ czerwonych punktów.

Rozważmy teraz dowolną niebieską prostą l. Dzięki maksymalności zbioru $\mathcal{B}$ wiemy, że istnieje co najmniej jeden obszar $A \in \mathcal{S}$, którego jedyny niebieski bok leży na prostej l. Ponieważ A ma co najmniej trzy boki, więc posiada co najmniej jeden czerwony wierzchołek. Powiemy, że ten wierzchołek jest *związany* z prostą l.

Ponieważ dowolny czerwony punkt należy do czterech obszarów (przy czym kilka z nich może być nieograniczonych), więc jest on związany z co najwyżej czterema niebieskimi prostymi. Zatem liczba wszystkich niebieskich prostych nie przekracza $4\binom{k}{2}$. Z drugiej strony liczba ta jest równa dokładnie $2n^2 - k$. Oznacza to, że zachodzi nierówność

$$2n^2 - k \leqslant 4\binom{k}{2} \Longrightarrow 2n^2 \leqslant 2k^2 - k \leqslant 2k^2,$$

więc $k \geqslant n$. $\square$

13. Pokazać, że dowolny czworokąt wypukły można podzielić na pięć wielokątów, z których każdy posiada oś symetrii.

Rozwiązanie:

Jeżeli $AB + CD = AD + BC$, to w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Łącząc środek tego okręgu z punktami styczności otrzymamy 4 deltoidy. Wystarczy teraz jeden z nich podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

Załóżmy, że $AB+CD > AD+BC$. Wówczas konstruujemy trójkąt o środku w punkcie O_1 styczny do boków AB, AD i BC w punktach odpowiednio P_1, Q_1 i R_1. Analogicznie konstruujemy okrąg o środku w punkcie O_2 styczny do boków AB, BC i CD w punktach odpowiednio P_2, Q_2 i R_2. Prowadząc odcinki O_1P_1, O_1Q_1, O_1R_1 oraz O_2P_2, O_2Q_2, O_2R_2 dostajemy deltoidy: $AP_1O_1Q_1$,

$DO_1Q_1R_1$, $BP_2O_2Q_2$, $CQ_2O_2R_2$ oraz sześciokąt $P_2O_2R_2R_1O_1P_1$. Pozostaje zauważyć, że każdy z powyższych wielokątów ma oś symetrii. $\square$

14. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dla $n \geqslant 3$, będą parami względnie pierwszymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Załóżmy, że liczby $\prod\limits_{i \neq k} a_i$ dają resztę r przy dzieleniu przez a_k dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pokazać, że $r \leqslant n - 2$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $r = 0$, to problem jest trywialny. Załóżmy, że $r > 0$. Niech $P := \prod a_i$, $P_i := \dfrac{P}{a_i} = \prod\limits_{i \neq k} a_i$. Rozważmy sumę $S := P_1 + P_2 + \ldots + P_n - r$. Łatwo widzimy, że $a_k \mid S$ dla dowolnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gdyż

$$S = P_1 + P_2 + \ldots + (P_k - r) + \ldots + P_n$$

oraz $a_i \mid P_l$ dla $l \neq k$ i $a_k \mid P_k - r$. Ponieważ liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są względnie pierwsze, więc $P \mid S$. Zatem $S \geqslant P$, stąd dostajemy nierówność

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = S + r > P,$$

z której wnosimy, że istnieje $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $P_j > \dfrac{P}{n}$. Oznacza to, że $a_j < n$ a ponieważ $r < a_j$, więc $r \leqslant a_j - 1 \leqslant (n-1) - 1 = n - 2$. $\square$

15. W Jodłówce Tuchowskiej znajdują się trzy szkoły A, B i C. Do każdej ze szkół uczęszcza co najmniej jeden uczeń. Wiadomo, że wśród dowolnych trzech uczniów, po jednym z każdej szkoły, istnieją dwaj uczniowie którzy się wzajemnie znają oraz dwaj którzy się wzajemnie nie znają. Pokazać, że spełniony jest co najmniej jeden z poniższych warunków:

- Istnieje uczeń ze szkoły A znający wszystkich uczniów ze szkoły B,
- Istnieje uczeń ze szkoły B znający wszystkich uczniów ze szkoły C,
- Istnieje uczeń ze szkoły C znający wszystkich uczniów ze szkoły A.

Rozwiązanie:

Załóżmy przeciwnie i rozważmy ucznia a ze szkoły A, który zna jak najwięcej uczniów ze szkoły B. Istnieje uczeń $b \in B$ nieznany przez ucznia a. Podobnie, możemy wziąć ucznia $c \in C$ nieznanego przez ucznia b i nieznającego pewnego ucznia $a' \in A$. Stosując założenie zadania dla zbiorów uczniów $\{a, b, c\}$ i $\{a', b, c\}$ widzimy, że pary uczniów a i c oraz a' i b znają się wzajemnie. Jako, że b zna a' i nie zna a wnosimy, że $a \neq a'$. Na podstawie maksymalności w wyborze ucznia a dostajemy, że istnieje uczeń $b' \in B$, znany przez a ale nie przez a'. Jeśli teraz uczniowie b' i c się znają to w zbiorze $\{a, b', c\}$ nie znajdziemy dwóch uczniów, którzy się nie znają wzajemnie — sprzeczność. Zatem uczniowie b' i c się wzajemnie nie znają, jednakże oznacza to, że w zbiorze $\{a', b', c\}$ nie ma dwóch uczniów, którzy się wzajemnie znają — co jest niemożliwe. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. □

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest spełniona. Rozważmy pełny graf trójdzielny o wierzchołkach w zbiorze osób $A \cup B \cup C$. Malujemy jego krawędzie na dwa kolory w ten sposób, że krawędź jest czerwona jeżeli osoby się znają, zaś zielona jeżeli się nie znają. Wybierzmy minimalny cykl jednokolorowy postaci $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_k, b_k, c_k$. Taki cykl istnieje ponieważ z każdego wierzchołka istnieje co najmniej jedna zielona krawędź do osoby z następnej szkoły.

Przypuśćmy, że $k \geqslant 2$. Z warunków zadania wynika, że krawędzie b_1a_2 i a_2c_2 są przeciwnego koloru niż cykl, czyli b_1c_2 jest tego samego koloru co wyjściowy cykl. Możemy dzięki temu skrócić cykl do $a_1, b_1, c_2, a_3, \ldots, a_k, b_k, c_k$. Wobec tego $k = 1$, ale jest to sprzeczne z warunkami zadania. □

16. Czy istnieje ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ parami względnie pierwszych liczb naturalnych taki, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

nie jest iloczynem niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych?

Rozwiązanie:

Lemat. *Jeśli $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych w którym liczba a_0 jest pierwsza oraz spełniony jest warunek*

$$|a_0| > |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

wówczas f jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że f nie posiada pierwiastków w kole

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant 1\}.$$

Załóżmy przeciwnie tzn. $f(x_0) = 0$ dla $x_0 \in \mathbb{D}$, wówczas

$$\begin{aligned}|a_0| &= |f(x_0) - (a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots a_1x_0)| = \\ &= |(a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots a_1x_0)| \leqslant \\ &\leqslant |a_n| \cdot |x_0|^n + |a_{n-1}| \cdot |x_0|^{n-1} + \ldots + |a_1| \cdot |x_0| \leqslant \\ &\leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|,\end{aligned}$$

sprzeczność z warunkami zadania.

Przypuśćmy, że $f(x) = g(x)h(x)$, gdzie $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Ponieważ a_0 jest liczbą pierwszą, więc wyraz wolny jednego z wielomianów g lub h jest na moduł równy 1, jednakże na mocy wzorów *Viety* moduł wyrazu wolnego jest modułem iloczynem pierwiastków wielomianu, które jak wiemy mają moduł większy niż 1. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. □

Niech $a_0 = 2, a_1 = 3$. Załóżmy, że mamy nierozkładalny wielomian

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

o współczynnikach będących liczbami pierwszymi. Rozważmy liczbę pierwszą a_{n+1} taką, że $a_{n+1} > a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$. Załóżmy, że wielomian

$$\tilde{f}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

jest rozkładalny tzn. $\tilde{f}(x) = g(x)h(x)$ dla pewnych wielomianów $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n x + \ldots + a_1 x^n + a_0 x^{n+1} &= x^{n+1}\tilde{f}\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+1}g\left(\frac{1}{x}\right) \cdot h\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= x^l g\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^k h\left(\frac{1}{x}\right) = \tilde{g}(x) \cdot \tilde{h}(x), \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}[X]$ i $l = \deg(g)$, $k = \deg(h)$. Zatem powyższy wielomian jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$ — co jest sprzeczne z lematem.

Skonstruowaliśmy zatem ciąg liczb pierwszych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ spełniający warunki zadania. □

Grupa Zaawansowana

1. Niech x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 będą liczbami rzeczywistymi o zerowej sumie. Pokazać, że

$$|\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos x_3| + |\cos x_4| + |\cos x_5| \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|\sin(x+y)| \leqslant \min\{|\cos x| + |\cos y|, |\sin x| + |\sin y|\}$$

oraz

$$|\cos(x+y)| \leqslant \min\{|\sin x| + |\cos y|, |\sin y| + |\cos x|\}.$$

Zatem

$$1 = |\cos(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)| \leqslant |\cos x_1| + |\sin(x_2+x_3+x_4+x_5)| \leqslant$$
$$\leqslant |\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos(x_3+x_4+x_5)| \leqslant |\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos x_3| +$$
$$+ |\sin(x_4+x_5)| \leqslant |\cos x_1| + |\cos x_2| + |\cos x_3| + |\cos x_4| + |\cos x_5|.$$

$\square$

2. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Udowodnić, że liczba $2^{2^n}+1$ ma dzielnik pierwszy, który jest większy niż $2^{n+2}(n+1)$.

Rozwiązanie:
Udowodnijmy najpierw, że dla dowolnej liczby pierwszej p takiej, że $p \mid 2^{2^n}+1$ zachodzi $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

Niech k będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią dla której $2^k \equiv 1 \pmod{p}$. Skoro $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$ oraz $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$ to $k = 2^{n+1}$. Ponadto z małego twierdzenia Fermata, wynika, że $k \mid p-1$, a to chcieliśmy pokazać.

Powróćmy do rozwiązania zadania. Niech $2^{2^n}+1 = p_1p_2\ldots p_m$ będzie rozkładem na (niekoniecznie różne) czynniki pierwsze liczby $2^{2^n}+1$. Niech ponadto $p_i = 2^{n+1}k_i+1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Aby rozwiązać zadanie, wystarczy pokazać, że dla pewnego i zachodzi $k_i \geqslant 2(n+1)$.

Udowodnijmy najpierw, że $m \leqslant \dfrac{2^n}{n+1}$. Istotnie, mamy

$$2^{2^n}+1 = p_1p_2\ldots p_m \geqslant (2^{n+1}+1)^m \geqslant 2^{(n+1)m}+1,$$

stąd rzeczywiście $m \leqslant \dfrac{2^n}{n+1}$.

Oszacujmy teraz sumę $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ z dołu. Ponieważ, $n \geqslant 3$ to $2^n \geqslant 2n + 2$, zatem zachodzi

$$1 \equiv 2^{2^n}+1 \equiv (2^{n+1}k_1+1)\ldots(2^{n+1}k_m+1) \equiv 2^{n+1}(k_1+\ldots+k_m)+1 \pmod{2^{2n+2}}.$$

Oznacza to, że $2^{n+1} \mid k_1 + \ldots + k_m$, czyli w szczególności $2^{n+1} \leqslant k_1 + \ldots + k_m$.

Oznaczmy przez K maksymalną z liczb k_i dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy, że

$$2^{n+1} \leqslant k_1 + \ldots + k_m \leqslant mK \leqslant \frac{2^n}{n+1}K.$$

Stąd $K \geqslant 2(n + 1)$ i mamy tezę.

3. Niech $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $k \in S$. Wykazać, że istnieje dokładnie kn^{n-1} funkcji $f\colon S \to S$, takich, że dla dowolnego $s \in S$ istnieje takie $j \geqslant 0$, że $f^j(s) \leqslant k$, gdzie $f^j(x)$ oznacza j-krotne złożenie funkcji f.

Rozwiązanie:

Powiemy, że funkcja $f\colon S \to S$ jest *dobra* dla k, jeżeli spełniony jest warunek

dla dowolnego $s \in S$ istnieje takie $j \geqslant 0$, że $f^j(s) \leqslant k$.

Ustalmy n, będziemy dowodzić tezę zadania indukcyjnie po $n - k$. Jeżeli $k = n$ to teza zadania jest oczywiście spełniona. Weźmy dowolne $k < n$ i załóżmy, że teza zadania jest spełniona dla $k' > k$.

Policzmy te funkcje $f\colon S \to S$, które są dobre dla $k + 1$ ale nie są dobre dla k. Weźmy taką funkcję i rozważmy ciąg $k + 1, f(k + 1), f(f(k + 1)), \ldots$. Skoro funkcja jest dobra dla $k + 1$ i nie jest dobra dla k to ciąg ten musi być okresowy, oraz jego elementy muszą być równe co najmniej $k + 1$. Oznaczmy zbiór elementów tego ciągu przez C, niech C ma l elementów. Elementy zbioru C możemy wybrać na $\binom{n-k-1}{l-1}$ sposobów, zaś strukturę cyklu C na $(l-1)!$ sposobów. Poza cyklem C funkcja f musi spełniać warunek

$$\text{dla dowolnego } s \in S \text{ istnieje takie } j \geqslant 0, \text{ że } f^j(s) \in \{1, 2, \ldots, k\} \cup C. \tag{1}$$

Liczba wyborów takich funkcji to z założenia indukcyjnego to $(k+l)n^{n-1}$. Jednak my ustaliliśmy wartości tej funkcji na zbiorze C, zauważmy, że zmiana wartości funkcji na zbiorze C nie może sprawić, że funkcja przestanie spełniać warunek 1. Czyli dokładnie $1/n^l$ z tych funkcji spełnia nasze założenia o wartościach na zbiorze C. Ostatecznie przy ustalonym C tych funkcji jest $(k + l)n^{n-1-l}$. Mamy

$$\sum_{l=1}^{n-k} \binom{n-k-1}{l-1} \cdot (l-1)! \cdot (k+l)n^{n-1-l} =: M$$

funkcji dobrych dla $k+1$, które nie są dobre dla k. Aby wykonać krok indukcyjny wystarczy pokazać, że $M = n^{n-1}$. Mamy

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{l=1}^{n-k} (n-k-1)^{\underline{l-1}} \left(n - (n-(k+l)\right) n^{n-1-l} \\
&= \sum_{l=1}^{n-k} (n-k-1)^{\underline{l-1}} n^{n-l} - \sum_{l=1}^{n-k} (n-k-1)^{\underline{l-1}} (n-k-l) n^{n-l-1} \\
&= n^{n-1} + \sum_{l=2}^{n-k} (n-k-1)^{\underline{l-1}} n^{n-l} - \sum_{l=1}^{n-k} (n-k-1)^{\underline{l}} n^{n-l-1} \\
&= n^{n-1},
\end{aligned}$$

gdzie $x^{\underline{m}} = x(x-1)\ldots(x-(m-1))$. Czyli istotnie $M = n^{n-1}$ i teza zadania jest spełniona. $\square$

4. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Okrąg ω jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach M i N oraz do okręgu opisanego na trójkącie BOC. Pokazać, że prosta MN połowi odcinek AI, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rozwiązanie:

Niech ψ oznacza przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{\frac{1}{2}AB \cdot AC}$ z symetrią względem prostej AI. Niech X' oznacza obraz punktu X poprzez przekształcenie ψ.

Zauważmy, że B' oraz C' są środkami boków odpowiednio AC i AB. Niech H_A będzie rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Wykorzystując dobrze znany wzór na pole trójkąta mając dane jego boki oraz długość promienia okręgu opisanego widzimy, że

$$AO \cdot AH_a = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4[ABC]} \cdot \frac{2[ABC]}{BC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC,$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F. Wobec tego $O' = H_A$. Zatem obrazem okręgu o — opisanego na trójkącie BOC poprzez ψ jest okrąg ω_E — opisany na trójkącie $B'C'H_A$, który jest okręgiem *Eulera* trójkąta ABC.

Niech ω_A będzie okręgiem dopisanym do trójkąta ABC stycznym do boku BC. Na podstawie znane twierdzenia *Feuerbacha* wiemy, że okręgi ω_E i ω_A są styczne zewnętrznie. Ponieważ obraz okręgu ω poprzez ψ jest okręgiem stycznym do prostych AB i AC oraz stycznym do obrazu okręgu o (czyli do ω_E), więc jest to okrąg ω_A! Wobec tego punkty M' i N' są punktami styczności ω_A z prostymi odpowiednio AC i AB, więc

$$AM \cdot AM' = AN \cdot AN' = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

Niech S będzie środkiem odcinka MN. Zauważmy, że trójkąty AMS oraz AI_AM' są podobne, gdzie I_A oznacza środek okręgu ω_A. Zatem

$$AS = \frac{AM' \cdot AM}{AI_A} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{AI_A}.$$

Korzystając ze znanego faktu, że obrazem okręgu wpisanego w trójkąt ABC względem inwersji o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$, jest okrąg ω_A wnioskujemy, że $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$, stąd

$$\frac{AS}{AI} = \frac{\dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{AI_A}}{\dfrac{AB \cdot AC}{AI_A}} = \frac{1}{2},$$

więc $AI = 2AS$, stąd $AS = SI$. □

5. Wysokości AA_1, BB_1 i CC_1 trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Proste przechodzące przez H i prostopadłe do prostych B_1C_1 i A_1C_1 przecinają proste odpowiednio CA i CB w punktach P i Q (w tej kolejności). Pokazać, że prosta przechodząca przez C i prostopadła do A_1B_1 połowi odcinek PQ.

Rozwiązanie:

Rozpatrując jednokładność ϕ o środku w punkcie C przeprowadzającą H na C_1, niech $\phi(P) = P_1$ oraz $\phi(Q) = Q_1$. Zauważmy, że $P_1C_1 \perp B_1C_1$ oraz $C_1Q_1 \perp A_1C_1$. Niech N będzie rzutem punktu C na B_1A_1. Wystarczy pokazać, że CN połowi odcinek P_1Q_1.

Niech K i L będą rzutami punktów odpowiednio P_1 i Q_1 na prostą A_1B_1. Wówczas czworokąty $KB_1C_1P_1$ i $LA_1C_1Q_1$ są deltoidami, gdyż $\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1C$ oraz $\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle C_1A_1B$. Zauważmy, że

$$KL = KB_1 + B_1A_1 + LA_1 = B_1C_1 + B_1A_1 + A_1C_1 = \text{obwód } A_1B_1C_1 := 2p.$$

Ponieważ C jest środkiem okręgu dopisanego trójkąta $A_1B_1C_1$, a N punktem styczności z B_1A_1, to $B_1N = p - B_1C_1$, stąd $KN = B_1C_1 + p - B_1C_1 = p$, więc N jest środkiem odcinka KL. Łatwo zauważyć, że $KP_1 \parallel LQ_1 \parallel CN$, stąd CN połowi P_1Q_1. □

Rozwiązanie:

Wykorzystamy dobrze znany lemat:

Lemat. *Punkt S leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia równości $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SBC$ oraz $\sphericalangle CBS = \sphericalangle ACS$. Wówczas prosta AS jest symedianą w trójkącie ABC.*

Dowód. Niech CS przecina prostą AB w punkcie T. Wówczas

$$\frac{BT}{TC} = \frac{[ABS]}{[ACS]} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2,$$

gdyż trójkąty ASC i BCS są podobne. Wobec tego AS jest symedianą w trójkącie ABC. □

Zauważmy że w trójkącie PQC mamy

$$\sphericalangle PCH = \sphericalangle HA_1C_1 = \sphericalangle CQH.$$

Analogicznie $\sphericalangle HPC = \sphericalangle HCQ$. Stosując powyższy lemat dostajemy, że CH jest symediana w trójkącie PCQ, stąd prosta l — izogonalnie sprzężona do CH połowi odcinek PQ. Pozostaje zauważyć, że $l \perp A_1B_1$ — co jest konsekwencją faktu, iż środek okręgu opisanego i ortocentrum w trójkącie ABC są izogonalnie sprzężone. □

6. Pokazać, że istnieje nierozkładalny wielomian P postaci

$$P(X) = X^{2016} + a_{2015}X^{2015} + \ldots + a_1X + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_{2015}$ są niezerowymi liczbami całkowitymi taki, że $|P(x)|$ jest liczbą złożoną dla dowolnej liczby całkowitej x.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy wielomian

$$P(X) = X^{2016} + 210(X^{2015} + X^{2014} + \cdots + X^2) + 105X + 12.$$

Stosując kryterium *Eisensteina* dla $p = 3$, widzimy, że wielomian P jest nierozkładalny. Ponadto $P(x)$ jest liczbą parzystą dla dowolnej liczby całkowitej x.

Pozostaje pokazać, że równanie $|P(x)| = 2$ nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych. Jeśli $P(x_0) = 2$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{Z}$, to wielomian

$$P(X) - 2 = X^{2016} + 210(X^{2015} + X^{2014} + \cdots + X^2) + 105X + 10$$

ma pierwiastek całkowity, więc jest rozkładalny — co jest sprzeczne z kryterium *Eisensteina* dla $p = 5$.

Jeśli $P(x_0) = -2$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{Z}$, to wielomian

$$P(X) + 2 = X^{2016} + 210(X^{2015} + X^{2014} + \cdots + X^2) + 105X + 14$$

ma pierwiastek całkowity, więc jest rozkładalny — co jest niemożliwe dzięki kryterium *Eisensteina* dla $p = 7$. □

Rozwiązanie:

Biorąc wielomian

$$P(X) = X^{2016} + 29(X^{2015} + X^{2014} + \cdots + X^2 + X) + 29 \cdot 14$$

widzimy, że kryterium *Eisensteina* dla $p = 29$ daje nam nierokładalność P. Ponadto modulo 7 nasz wielomian jest postaci

$$\tilde{P}(X) = X^{2016} + X^{2015} + X^{2014} + \cdots + X^2 + X,$$

więc

- jeśli $7 \mid x$, to $7 \mid \tilde{P}(x)$,
- jeśli $7 \mid x - 1$, to

  $$x^{2016} + x^{2015} + x^{2014} + \cdots + x^2 + x \equiv 0 \pmod 7,$$

  więc $7 \mid \tilde{P}(x)$,
- w pozostałych przypadkach na podstawie twierdzenia *Fermata* wiemy, że $x^6 \equiv 1 \pmod 7$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{Z}$, stąd $x^{2016} \equiv 1 \pmod 7$, więc

  $$\tilde{P}(x) = x^{2016} + x^{2015} + x^{2014} + \cdots + x^2 + x = x\left(\frac{x^{2016} - 1}{x - 1}\right) \equiv 0 \pmod 7.$$

Pozostaje sprawdzić, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{Z}$ mamy, że $|\tilde{P}(x)| \neq 7$, jednakże jest to oczywiste po rozpatrzeniu równania

$$X^{2016} + 29(X^{2015} + X^{2014} + \cdots + X^2 + X) + 29 \cdot 14 = \pm 7$$

modulo 2. $\square$

7. Niech $a > 1$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita nieujemna n, że liczba $2^{2^n} + a$ nie jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że liczba $2^{2^n} + a = p_n$ jest pierwsza dla dowolnego n. Wybierzmy n takie, że $n > v_2(a - 1)$. Wówczas $v_2(2^{2^n} + a - 1) = v_2(a - 1) < n$, wobec tego możemy dobrać tak pewną liczbę całkowitą dodatnią k, żeby

$$2^{2^n} + (a - 1) \mid 2^n(2^k - 1).$$

Mamy wówczas

$$2^{n+k} \equiv 2^n \pmod{2^{2^n} + (a-1) = \varphi(p_n)},$$

stąd

$$2^{2^{n+k}} \equiv 2^{2^n} \pmod{p_n}$$

Dodając obustronnie a do powyższej kongruencji mamy

$$p_{n+k} = 2^{2^{n+k}} + a \equiv 0 \pmod{p_n}.$$

Sprzeczność. $\square$

8. W szachownicy $n \times n$ wpisano liczby od 1 do n^2 w taki sposób, że liczby wpisane w dwa pola dzielące wspólny bok, różnią się o co najwyżej n. Pokazać, że istnieje kwadrat 2×2 taki, że sumy liczb wpisanych na przekątnych tego kwadratu są równe.

Rozwiązanie:

Lemat. *W szachownicy $n \times n$ wpisano liczby od 1 do n^2. Wówczas dla każdej kolumny o numerze i znajdziemy parę (a_i, b_i) liczb wpisanych w sąsiadujące pole tej kolumny o tej włanośći, że*

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \geqslant n^2.$$

Dowód. Niech m będzie najmniejszą liczbą dla której istnieje wiersz lub kolumna złożona z liczb nie większych niż m. Bez szkody możemy założyć, że m leży w pierwszym polu pierwszego wiersza.

Rozpatrzmy teraz j - tą kolumnę $\left(a_i^j\right)_{i=1}^{n}$.

Niech

$$i_0 = \min\left\{i \mid a_i^j \in \left\{m+1, m+2, \ldots, n^2\right\}\right\},$$

takie i_0 istnieje dzięki minimalności m oraz $i_0 \neq 1$, gdyż $a_1^j \leqslant m - 1$. Na mocy poczynionych wyborów $a_{i_0-1}^j \leqslant m - 1$. Zatem dla kolumny o numerze $j \neq 1$ znaleźliśmy sąsiednią parę $(a_j, b_j) := \left(a_{i_0-1}^j, a_{i_0}^j\right)$ taką, że $a_j < m < b_j$.

Jeżeli w kolumnie pierwszej znajduje się liczba większa niż m to powtarzając to samo rozumowanie znajdziemy sąsiednie liczby (a_1, b_1) takie, że $a_1 \leqslant m$ i $b_1 \geqslant m + 1$. Jeżeli w rozważanej kolumnie nie ma liczb większych od m, to istnieje para sąsiednich liczb (a_1, b_1) taka, że $a_1 \leqslant m - 1$ oraz $b_1 = m$.

Istnieją zatem liczby całkowite $A < B$ takie, że

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leqslant A \text{ oraz } B \leqslant \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

oraz $(A, B) \in \{(m, m+1), (m-1, m)\}$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant B + (B+1) + \cdots + (B+n-1) = \left(B + \frac{n-1}{2}\right) n \tag{2}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant A + (A-1) + \cdots + (A-n+1) = \left(A - \frac{n-1}{2}\right) n. \qquad (3)$$

Ostatecznie, więc

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \geqslant \left(B + \frac{n-1}{2}\right) n - \left(A - \frac{n-1}{2}\right) n = n(B-A) + n^2 - n \geqslant n^2.$$

□

Rozważmy pary $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, które istnieją na podstawie lematu i nazwijmy je *fajnymi*. Dzięki warunkom zadania wiemy, że $b_i - a_i \leqslant n$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, stąd i z lematu dostajemy, że

$$n^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$$

Wobec tego wszystkie nierówności stają się równościami, więc $b_i - a_i = n$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wykorzystując ponownie nierówności (2) i (3) z lematu widzimy, że stają się one równościami, więc fajne pary to dokładnie

$$(m+1-n, m+1)\,,\ (m+2-n, m+2),\ \ldots,\ (m-1, m+(n-1))\,,\ (m, m+n)$$

lub

$$(m-n, m)\,,\ (m+1-n, m+1),\ \ldots,\ (m-1, m+(n-1))\,.$$

Oczywiście innych fajnych par nie ma.

Rozważmy parę (a_2, b_2) oraz liczby x i y należące do pierwszej kolumny takie, że pary (x, a_2) i (y, b_2) są wpisane w sąsiednie pola. Zauważmy, że

$$x, y \notin \{m-(n-1), \ldots, m-1\}, \qquad (4)$$

gdyż liczby z tego zbioru należą do fajnych par należących do wszystkich kolumn z wyłączeniem pierwszej. Analogicznie

$$x, y \notin \{m+1, \ldots, m+n-1\}. \qquad (5)$$

Na podstawie warunków zadania wiemy, że $y \geqslant b_2 - n \geqslant m + 1 - n$ a ponieważ zachodzi (5) więc $y \geqslant m + n$.

Gdyby $y > m + n$, to $x \geqslant y - n > m + n - n = m$, więc $x \geqslant m + n$, gdyż mamy (5). Korzystając z powyższego dostajemy, że $x - a_2 > m + n - m = n$ — co jest sprzeczne z warunkami zadania, gdyż x i a_2 są wpisane w sąsiednie pola.

Ostatecznie $y = m + n$ a ponieważ (x, a_2) i (x, y) są sąsiednie, to mamy nierówności $x \geqslant y - n = m$ oraz $m > a_2 \geqslant x - n \Longrightarrow x < m + n$, które w połączeniu z (4) dają równość $x = m$. Rozpatrując kwadrat 2×2

x	a_2
y	b_2

i powyższe równości widzimy, że $x + b_2 = m + a_2 + n = y + a_2$. □

9. Niech $P_1, P_2, \ldots, P_n$ będą punktami na płaszczyźnie. Udowodnić, że dla pewnego i od 1 do n zbiór odległości pomiędzy punktem P_i a pozostałymi punktami ma co najmniej $\sqrt{\left(n - \frac{3}{4}\right)} - \frac{1}{2}$ różnych elementów.

Rozwiązanie:

Niech m oznacza maksymalną liczbę różnych odległości z jednego z punktów. Niech ponadto P_l będzie punktem najbardziej na lewo. Oznaczmy przez s liczbę różnych odległości z P_l. Ponadto niech t oznacza maksymalną liczbę punktów które są w tej samej odległości od P_l. Mamy

$$st \geqslant n - 1, \quad \text{oraz}, \quad m \geqslant \max\{s, t - 1\}.$$

(Nierówność $m \geqslant t-1$ zachodzi ponieważ t punktów leży na pewnym półokręgu i tworzą one co najmniej $t - 1$ różnych odległości od punktu brzegowego). Wynika stąd, że $m(m + 1) \geqslant n - 1$, czyli $m \geqslant \sqrt{\left(n - \frac{3}{4}\right)} - \frac{1}{2}$. □

10. Niech I będzie środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg o opisany na trójkącie BIC przecina ω w punktach X i Y. Wspólne styczne zewnętrzne do o i ω przecinają się w punkcie Z. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie XYZ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że punkt M — środek łuku BC (niezawierającego punktu A), jest środkiem okręgu o. Oznaczmy przez D punkt styczności ω z BC. Niech prosta AI przecina ω w punktach T i W przy czym, W leży na odcinku IM. Ponieważ Z jest środkiem jednokładności zewnętrznej okręgów o i ω widzimy, że $\dfrac{ZT}{ZI} = \dfrac{r}{r_a}$, gdzie r i r_a to długości promieni okręgów odpowiednio ω i o. Jednakże $ZT = ZI - r$, więc $ZI = \dfrac{rr_a}{r_a - r}$. Zatem

$$MW \cdot MZ = (r_a - r)(r_a + ZI) = (r_a - r) \cdot \frac{r_a^2}{r_a - r} = r_a^2.$$

Rozpatrzmy teraz inwersję względem okręgu o. Wystarczy pokazać, że obrazy okręgów opisanych na trójkątach XYZ i ABC są styczne. Zauważmy, że obrazem okręgu opisanego na trójkącie ABC jest prosta BC. Na podstawie powyższej zależności punkt W jest obrazem punktu Z względem tej inwersji.

Ponadto punkty X i Y są punktami stałymi tego przekształcenia, więc obrazem okręgu opisanego na trójkącie XYZ jest ω. Oczywiście okrąg ω jest styczny do BC, wobec tego pokazaliśmy tezę zadania. $\square$

11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a^4+2b^2c^2}{a^2+2bc}}+\sqrt{\frac{b^4+2c^2a^2}{b^2+2ca}}+\sqrt{\frac{c^4+2a^2b^2}{c^2+2ab}} \geqslant a+b+c.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności *Höldera* dostajemy

$$(a^4+b^2c^2+b^2c^2)(a+b+c)(a+c+b) \geqslant (a^2+2bc)^3.$$

Wynika stąd, że

$$\sqrt{\frac{a^4+2b^2c^2}{a^2+2bc}} \geqslant \frac{a^2+2bc}{a+b+c}.$$

Sumując trzy analogiczne nierówności otrzymujemy

$$\mathrm{LHS} \geqslant \frac{a^2+2bc}{a+b+c}+\frac{b^2+2ac}{a+b+c}+\frac{c^2+2ab}{a+b+c}=a+b+c.$$

$\square$

12. Niech φ oznacza funkcję *Eulera*. Wykazać, że istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2016}$ takie, że

$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \ldots > \varphi(a_{2016}).$$

Rozwiązanie:

Lemat. *Niech $u < v$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieją liczby całkowite dodatnie e i b takie, że*

$$u < \frac{p^e}{2^b} < v.$$

Dowód. Zapiszmy żądane nierówności w postaci

$$\log_p u + b\log_p 2 < e < \log_p v + b\log_p 2,$$

wobec tego wystarczy aby dla pewnego b w przedziale

$$\left(\log_p u + b\log_p 2, \log_p v + b\log_p 2\right)$$

była liczba całkowita. Jeżeli $\{\log_p v\} \leqslant \{\log_p u\}$ to przedział ma długość co najmniej 1 i bez trudu dobieramy b. W przeciwnym razie, ponieważ dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg $\{n\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ jest gęsty w $[0,1]$ (twierdzenie *Kroneckera*), to można dobrać liczbę naturalną b tak, aby

$$1 - \{\log_p v\} < \{b \log_p 2\} < 1 - \{\log_p u\}.$$

Wtedy do b można dobrać e tak aby żądana nierówność była spełniona. $\square$

Niech p_k oznacza k-tą liczbę pierwszą. Niech N będzie odpowiednio dużą liczbą naturalną (jej wielkość będzie widoczna na podstawie konstrukcji liczb spełniających warunki zadania). Rozważamy ciąg postaci $a_k = 2^{N-x_k} p_k^{e_k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Nierówność $a_k < a_{k+1}$ jest równoważna

$$2^{N-x_k} p_k^{e_k} < 2^{N-x_{k+1}} p_{k+1}^{e_{k+1}}$$

czyli

$$2^{-x_k} p_k^{e_k} < \frac{p_{k+1}^{e_{k+1}}}{2^{x_{k+1}}}.$$

Natomiast nierówność $\varphi(a_{k+1}) < \varphi(a_k)$ jest równoważna

$$2^{N-x_k} p_k^{e_k} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) > 2^{N-x_{k+1}} p_{k+1}^{e_{k+1}} \left(1 - \frac{1}{p_{k+1}}\right).$$

Czyli obie nierówności są równoważne

$$2^{-x_k} p_k^{e_k} < \frac{p_{k+1}^{e_{k+1}}}{2^{x_{k+1}}} < 2^{-x_k} p_k^{e_k} \cdot \frac{p_k(p_{k+1}-1)}{p_{k+1}(p_k-1)}.$$

Na podstawie lematu widzimy, że mając dane x_k, e_k możemy dobrać x_{k+1}, e_{k+1}. Oznacza to, że teza zadania jest spełniona. $\square$

13. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y i z, że

$$abc + xyz \equiv ab + bc + ca - xy - yz - zx \equiv 0 \pmod{a+b+c+x+y+z}.$$

Pokazać, że liczba $a+b+c+x+y+z$ jest złożona.

Rozwiązanie:

Niech $p = a+b+c+x+y+z$ będzie liczbą pierwszą. Rozważmy wielomian

$$P(X) = (X+a)(X+b)(X+c) - (X-x)(X-y)(X-z).$$

Łatwo zauważyć, że jego współczynnikami są liczby p, $ab+bc+ca-xy-yz-zx$ oraz $abc+xyz$ czyli liczby podzielne przez p. Zatem liczba

$$P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$$

jest również podzielna przez p, jednakże oznacza to, że któraś z liczb $x + a$, $x + b$ lub $x + c$ jest podzielna przez p, co jest niemożliwe, gdyż każda z nich jest liczbą niezerową i mniejszą od p. Sprzeczność kończy dowód. $\square$

14. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, ponadto niech f^k oznacza k-krotne złożenie funkcji f. Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazwiemy *ładną* jeżeli równość

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n,$$

zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie m, że dla dowolnej ładnej funkcji zachodzi $f^{2016}(m) = m$.

Rozwiązanie:

Niech f będzie ładną funkcją. Ustalmy pewną liczbę naturalną a i rozważmy ciąg $a_n = f^n(a)$, z warunków zadania wynika, że jest to ciąg okresowy, niech m będzie minimalnym okresem tego ciągu. Z warunków zadania mamy, że

$$m \mid f^{f(a_i)}(a_i) = f^{a_{i+1}}(a_i) = a_{i+a_{i+1}} = a_{(i+a_{i+1}) \pmod m},$$

dla dowolnego i. Zauważmy, że skoro ciąg a_n jest okresowy o okresie m to z warunku $m \mid a_{i+1}$ wynika $m \mid a_i$. Oznacza to, że wszystkie liczby w ciągu a_n są podzielne przez m.

Przejdźmy do rozwiązania zdania. Liczbami spełniającymi warunki zadania są dzielniki liczby 2016. Istotnie, weźmy $d \mid 2016$ i pewną ładną funkcję f. Rozważmy ciąg $d_n = f^n(d)$. Oznaczmy przez m długość jego okresu. Wówczas z powyższych rozważań wynika, że $m \mid d \mid 2016$ i stąd $f^m(d) = d$ implikuje $f^{2016}(d) = d$.

Pokażmy teraz, że żadne inne liczby nie spełniają warunku zadania. Ustalmy liczbę m taką, że $m \nmid 2016$. Skonstruujemy ładną funkcję f tak, aby $f^{2016}(m) \neq m$. Niech $f(km) = (k + 1)m$ dla $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ oraz $f(m^2) = m$, ponadto niech $f(n) = n$ dla pozostałych n. Bez trudu sprawdzamy, że ta funkcja jest ładna, ponadto ciąg $a_n = f^n(m)$ jest okresowy o okresie m, czyli $f^{2016}(m) = m$ oznacza $m \mid 2016$ — sprzeczność. $\square$

15. W trójkącie ABC punkty O i I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego. Punkty D, E i F leżące na bokach odpowiednio BC, CA i AB są takie, że $BD + BF = CA$ oraz $CD + CE = AB$. Okręgi opisane na trójkątach BFD i CDE przecinają się w punkcie $P \neq D$. Pokazać, że $OP = OI$.

Rozwiązanie:

Warunki w treści zadania implikują również, że $AF + AE = BC$. Niech dwusieczna kąta BAC przecina bok BC oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach odpowiednio M i N. Ponadto niech okrąg opisany na trójkącie

AEF przecina prostą AM w punkcie L. Weźmy punkt R na odcinku AB taki, że F leży na odcinku AR oraz $\sphericalangle ARL = \sphericalangle RAL$. Ponieważ na czworokącie $AELF$ można opisać okrąg i $FL = LE$, więc trójkąty AEL oraz FLR są przystające, stąd $FR = AE \Longrightarrow AR = BC$ — oznacza to, że trójkąty BNC i ALR są przystające, więc $AL = BN$.

Na podstawie dobrze znanego lematu wiemy, że $IN = BN = NC = AL$, więc punkt I jest obrazem punktu M w symetrii względem środka odcinka $AN \Longrightarrow OI = OL$. Na podstawie twierdzenia *Miquela* punkt P leży na okręgu ω — opisanym na trójkącie BFD. Jeśli teraz $AI \cap \omega = S$, to rozumując analogicznie mamy, że $OS = OL = OI$.

Bez szkody dla ogólności przyjmijmy, że punkt S leży między B i I oraz P leży po tej samej stronie prostej AI co punkt C (dowód w przypadku innych konfiguracji pozostaje ten sam). Widzimy, że

$$\sphericalangle SIL = \sphericalangle PDB = \sphericalangle PEC = \sphericalangle ILP,$$

więc na czworokącie $ISLP$ można opisać okrąg, jednakże punkty S, L, I leżą na okręgu o środku w punkcie O, więc $OP = OI$. $\square$

16. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej k. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ przez $f(n)$ oznaczmy najmniejszą liczbę całkowitą dla której ostnieje n-elementowy zbiór liczb całkowitych $\mathcal{A}$ taki, że $S\left(\sum_{x\in\mathcal{B}} x\right) = f(n)$ dla dowolnego niepustego podzbioru $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Pokazać, że istnieją liczby rzeczywiste $0 < k_1 < k_2$ takie, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$k_1 \log_{10} n \leqslant f(n) \leqslant k_2 \log_{10} n.$$

Rozwiązanie:

Lemat. *Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz liczby całkowitej $1 \leqslant x \leqslant 10^n$ zachodzi równość $S(x(10^n - 1)) = 9n$.*

Dowód. Niech $x = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$, gdzie $k \leqslant n$ oraz $a_0 \neq 0$. Wtedy

$$x(10^n - 1) = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0 \underbrace{00\dots0}_{n}} - \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} =$$

$$= \overline{a_k \dots a_2 a_1 (a_0 - 1) \underbrace{99\dots9}_{n-k-1} (9 - a_k) \dots (9 - a_1)(10 - a_0)}.$$

Zatem

$$S(x(10^n - 1)) = S(x) - 1 + 9(n - k - 1) + 9k + 10 - S(x) = 9n.$$

$\square$

Lemat. *Dla dowolnego n-elementowego zbioru liczb całkowitych $\mathcal{A}$ istnieje podzbiór $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ taki, że*

$$n \mid \sum_{x \in \mathcal{B}} x.$$

Dowód. Niech $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Rozpatrując liczby

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

widzimy, że albo któraś z nich jest podzielna przez n albo dwie z nich dają jednakową resztę z dzielenia przez n. W pierwszym przypadku teza jest oczywista, natomiast w drugim, różnica tych dwóch liczb, która jest podzielna przez n ma postać $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$, więc zbiór $\mathcal{B} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ jest szukanym podzbiorem $\mathcal{A}$. □

Lemat. *Dowolna wielokrotność liczby $10^n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}$ ma sumę cyfr nie mniejszą niż $9n$.*

Dowód. Niech $M = \overline{a_p a_{p-1} \ldots a_0}$ ($a_p \neq 0$) będzie najmniejszą wielokrotnością liczby $a = 10^n - 1$ i załóżmy, że $S(a) < 9n$. Oczywiście $M > 10^n$, stąd $p \geqslant n$. Rozpatrzmy liczbę $N = M - 10^{p-n}a$. Wówczas

$$N = M - 10^p + 10^{p-n} = \overline{(a_p - 1)a_{p-1}a_{p-2} \ldots (a_{p-n} + 1)a_{p-n-1} \ldots a_0}.$$

Zatem

$$S(N) \leqslant a_p - 1 + a_{p-1} + \ldots + a_{p-n+1} + a_{p-k} + 1 + a_{p-n-1} + \ldots + a_0 = S(M) < 9n$$

a ponieważ N jest wielokrotnością a, to uzyskaliśmy sprzeczność z minimalnością M. □

Pokażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\log_{10}(n+1) \leqslant f(n) \leqslant 9 \log_{10}\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)$$

z której oczywiście wynika teza zadania. Niech l będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że

$$10^l - 1 \geqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Niech

$$\mathcal{A} = \left\{ i\left(10^l - 1\right) : 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

Dzięki lematowi oraz powyższej nierówności widzimy, że

$$S\left(\sum_{x \in \mathcal{B}} x\right) = 9l$$

dla dowolnego niepustego podzbioru $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Zatem $f(n) \leqslant 9l$, stąd

$$f(n) \leqslant 9 \log_{10} \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 \right).$$

Niech teraz m będzie największą liczbą całkowitą taką, że $n \geqslant 10^m - 1$. Wówczas korzystając z drugiego lematu wiemy, że dla dowolnego n-elementowego zbioru liczb całkowitych $\mathcal{A}$ istnieje podzbiór $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. taki, że

$$10^m - 1 \mid S\left(\sum_{x \in \mathcal{B}} x\right),$$

więc na podstawie lematu trzeciego

$$S\left(\sum_{x \in \mathcal{B}} x\right) \geqslant m,$$

stąd $f(n) \geqslant m$ — co oczywiście implikuje ostatnią nierówność

$$\log_{10}(n+1) \leqslant f(n).$$

$\square$

Mecz Matematyczny

1. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych liczby rzeczywistych dodatnich x, y spełniona jest równość

$$(x+y)f((f(x)y)) = x^2 f(f(x)+f(y)).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy nasze równanie przez $(\star)$ i położmy $(x,y) \to (x,x)$ w $(\star)$. Wówczas dostajemy równość

$$f((f(x)x)) = \frac{x}{2} f(2f(x)). \tag{6}$$

Przypuśćmy, że $f(a) = f(b)$ dla pewnych liczb $a, b \in \mathbb{R}^+$. Wtedy

$$(a+b)f(bf(b)) = (a+b)f(bf(a)) = a^2 f(f(a)+f(b)) = a^2 f(2f(b)).$$

Dzięki (10) i powyższej równości widzimy, że

$$(a+b)\frac{b}{2} \cdot f(2f(b)) = a^2 f(2f(b)).$$

Zatem $(a+b)b = 2a^2$ lub inaczej $(a-b)(2a+b) = 0$, stąd f jest iniekcją.

Niech teraz $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Podstawiając $(x,y) \to (c,1)$ w $(\star)$ dostajemy równość

$$(c+1)f(f(c)) = c^2 f(f(c)+f(1))$$

a ponieważ $c+1 = c^2 > 0$, więc $f(f(c)) = f(f(c)+f(1))$. Jednakże f jest iniekcją, stąd $f(c) = f(c) + f(1) \Longrightarrow f(1) = 0$ — sprzeczność, gdyż $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Ostatecznie, równanie $(\star)$ nie posiada rozwiązań. $\square$

2. Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ są takie, że

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$$

dla $i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$, gdzie przyjmujemy, że $x_{2017} = x_1$, $x_{2018} = x_2$. Wyznaczyć największą możliwą wartość liczby

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i x_{i+2}.$$

Rozwiązanie:

Ustalmy $i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$. Nieujemność liczby x_i wraz z warunkiem zadania daje nam nierówność

$$x_i x_{i+2} \leqslant x_{i+2} - x_{i+2}^2 - x_{i+1}x_{i+2},$$

więc

$$2\sum_{i=1}^{2016} x_i x_{i+2} \leqslant \sum_{i=1}^{2016}(2x_i - (2x_i^2 + 2x_i x_{i+1})) = \sum_{i=1}^{2016}(x_i + x_{i+1}) - (x_i + x_{i+1})^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{2016}(x_i + x_{i+1})(1 - (x_i + x_{i+1})) \leqslant 2016 \cdot \frac{1}{4} = 504,$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną.

Ostatecznie, maksymalna szukana wartość naszej liczby to 252 i jest realizowana dla doboru liczb: $x_{2i} = \dfrac{1}{2}$ oraz $x_{2i-1} = 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, 1008\}$. $\square$

3. Niech f i g będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych takimi, że punkty $(f(i), g(i))$ dla $1 \leqslant i \leqslant 2016$, są na płaszczyźnie kolejnymi wierzchołkami 2016-kąta foremnego. Pokazać, że co najmniej jeden z wielomianów f i g ma stopień nie mniejszy niż 2015.

Rozwiązanie:

Mnożąc wielomiany f i g przez odpowiednią liczbę, możemy założyć, że wierzchołki $(f(i), g(i))$ są wierzchołkami 2016-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1.

Istnieje kąt α taki, że

$$f(k) = \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{2016}\right) \quad \text{oraz} \quad g(k) = \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{2016}\right)$$

dla $1 \leqslant k \leqslant 2016$.

Wykażemy przez indukcję, że jeśli powyższa równość zachodzi dla $1 \leqslant k \leqslant n$ to co najmniej jeden z wielomianów f i g ma stopień nie mniejszy niż $n - 1$. Wstawiając za $n = 2016$ dostaniemy tezę.

Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Przyjmijmy, że nasze stwierdzenie jest prawdziwe dla $k \leqslant n$. Rozpatrzmy wielomiany $\tilde{f}(x) = f(x+1) - f(x)$ oraz $\tilde{g}(x) = g(x+1) - g(x)$ i zauważmy, że

$$\tilde{f}(k) = \cos\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{2016}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{2016}\right) =$$
$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)\sin\left(\alpha + \frac{(2k+1)\pi}{2016}\right)$$

oraz

$$\tilde{g}(k) = \sin\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{2016}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{2016}\right) =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)\cos\left(\alpha + \frac{(2k+1)\pi}{2016}\right)$$

dla $1 \leqslant k \leqslant n$.

Stała $\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)$ jest różna od 0, więc założenie indukcyjne zastosowane do wielomianów $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ daje nam, że jeden z nich ma stopień nie niższy niż $n-1$. Jednakże dla niestałego wielomianu h, wielomian $\tilde{h} = h(x+1) - h(x)$ ma stopień o jeden mniejszy niż h, więc stopień co najmniej jednego z wielomianów f i g jest nie mniejszy niż n. $\square$

4. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej n. Pokazać, że $S(n!) \geqslant \lfloor \log n \rfloor$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $10^{\lfloor \log n \rfloor} - 1 \leqslant n$, to $10^{\lfloor \log n \rfloor} - 1 \mid n!$, stąd na podstawie lematu z zadania 8 wiemy, że $n!$ ma w zapisie dziesiętnym co najmniej $\lfloor \log n \rfloor$ niezerowych cyfr, stąd $S(n!) \geqslant \lfloor \log n \rfloor$. $\square$

5. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że liczba n^2+1 jest bezkwadratowa.

Rozwiązanie:

Lemat. *Dowolnej liczby pierwszej p równanie*

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

ma co najwyżej dwa rozwiązania w zbiorze $\{0, 1, \ldots, p^2-1\}$.

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że $p \neq 2$. Załóżmy, że istnieje rozwiązanie x_0. Wówczas $-x_0$ jest również rozwiązaniem. Gdyby pewna liczba $a \notin \{x_0, -x_0\}$ była rozwiązaniem, to $p^2 \mid x_0^2 - a^2 = (x_0-a)(x_0+a)$, więc $p \mid (x_0-a)$ i $p \mid (x_0+a)$, stąd $p \mid a \Longrightarrow 1 \equiv 1 + a^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ — sprzeczność. $\square$

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Na podstawie lematu wiemy, że dla ustalonej liczby naturalnej N w każdym ze zbiorów $\{1, 2, \ldots, p^2\}$, $\{p^2+1, p^2+2, \ldots, 2p^2\}$, $\ldots$, $\{N-p^2+1, N-p^2+2, \ldots, N\}$ istnieją co najwyżej dwie liczby całkowite n, że $p^2 \mid n^2+1$. Zatem w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ istnieje co najwyżej $\dfrac{2N}{p^2}$ liczb n takich, że $p^2 \mid n^2+1$. Oznaczając przez S_N liczbę liczb bezkwadratowych postaci n^2+1 w zbiorze $\{1,2,\ldots,N\}$ widzimy, że

$$S_N \geqslant N - 2N \cdot \left(\sum_{p \in X_N} \frac{1}{p^2} \right),$$

gdzie X_N jest zbiorem liczb pierwszych nieparzystych, których kwadrat dzieli wyraz ciągu $\{n^2+1\}_{n \in \{1,2,\ldots,N\}}$. Zatem

$$S_N \geqslant N - 2N \cdot \left(\sum_{p \in X_N} \frac{1}{p^2} \right) \geqslant N - 2N \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots \right) \geqslant$$
$$\geqslant N - 2N \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots \right) > N - 2N \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} \right) > 0$$

Otrzymaliśmy więc, że w zbiorze $\{1,2,\ldots,N\}$ istnieje co najmniej jedna liczba bezkwadratowa postaci n^2+1 — co oczywiście implikuje tezę zadania. $\square$

6. Dane są różne liczby całkowite $a, b > 1$. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że liczba $(a^n-1)(b^n-1)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że jeśli $(a^n-1)(b^n-1)$ jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnego n, to $a = b$.

Twierdzenie (Zsigmondy)**.** *Jeśli $a > b > 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, to dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \mid a^n - b^n$ oraz $p \nmid a^k - b^k$ dla $k < n$, wykluczając następujące przypadki:*

- *$n = 1$ oraz $a - b = 1$,*
- *$n = 2$ oraz $a + b$ jest potęgą dwójki,*
- *$n = 6$, $a = 2$, $b = 1$.*

Lemat. *Zbiory dzielników pierwszych liczb a^n-1 i b^n-1 są równe dla dowolnej liczby całkowitej n.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeśli $p|a^n-1$, to $p|b^n-1$. Przypuśćmy, że $p|a^n-1$ ale $p \nmid b^n - 1$. Wtedy $\nu_p(a^n-1)$ jest parzyste, gdyż $(a^n-1)(b^n-1)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Jednakże $p \nmid b^n - 1$ implikuje, że $p \nmid b^{np} - 1$, więc $\nu_p(a^{pn}-1) = 1 + \nu_p(a^n-1)$ musi być nieparzyste, więc $(a^{pn}-1)(b^{pn}-1)$ nie może być kwadratem liczby całkowitej. $\square$

Lemat. *Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą różnymi liczbami wymiernymi, natomiast $c_1, c_2, \dots, c_n$ to liczby rzeczywiste. Wtedy jeśli istnieje ciąg liczb całkowitych $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ taki, że*

$$\lim_{k\to\infty}(s_k - (c_1x_1^k + c_2x_2^k + \ldots + c_nx_n^k)) = 0,$$

to wszystkie liczby x_i dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ o module nie mniejszym niż 1 są całkowite.

Dowód. Bez szkody załóżmy, że $|x_i| \geqslant 1$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech

$$q_k = c_1x_1^k + c_2x_2^k + \ldots + c_nx_n^k,$$

i połóżmy $d_k = s_k - q_k$. Zastosujemy indukcję względem n. Jeśli $n = 1$, to dla $x = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\begin{aligned} qs_{k+1} - ps_k &= q\left(d_{k+1} + c_1\frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} - p\left(d_k + c_1\frac{p^k}{q^k}\right)\right) \\ &= qd_{k+1} - pd_k. \end{aligned}$$

Ponadto $\lim_{k\to\infty}(qd_{k+1} - pd_k) = 0$, więc $\lim_{n\to\infty}(qs_{k+1} - ps_k) = 0$. Jednakże $qs_{k+1} - ps_k$ jest zawsze liczbą całkowitą, stąd $qs_{k+1} = ps_k$ dla odpowiednio dużych k. Zatem, dla pewnego k i wszystkich całkowitych i wiemy, że

$$s_{k+i} = \left(\frac{p}{q}\right)^i s_k.$$

Ponieważ $c_ix_1^k$ jest nieograniczone oraz $s_k - c_ix_1^k$ zbiega (przy odpowiednio dużych k) widzimy, że $s_{k+i} \neq 0$ dla odpowiednio dużego k, więc $q = 1$.

Pokażemy teraz, że jeśli nasze stwierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej n, to jest prawdziwe dla $n + 1$. Niech

$$x_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

dla pewnych liczb całkowitych $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$\begin{aligned} q_{n+1}s_{k+1} - p_{n+1}s_k = q_{n+1}&\left(d_{k+1} + c_{n+1}\frac{p_{n+1}^{k+1}}{q_{n+1}^{k+1}} + \sum_{i=1}^{n} c_ix_i^{k+1}\right) - \\ &- p_{n+1}\left(d_k + c_{n+1}\frac{p_{n+1}^k}{q_{n+1}^k} + \sum_{i=1}^{n} c_ix_i^k\right) = \\ &= (q_{n+1}d_{k+1} - p_{n+1}d_k) + \sum_{i=1}^{n}(q_{n+1}x_ic_i - p_{n+1}c_i)x_i^k. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{k\to\infty}\left[(q_{n+1}s_{k+1}-p_{n+1}s_k)-\sum_{i=1}^{n}(q_{n+1}x_ic_i-p_{n+1}c_i)x_i^k\right]=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[q_{n+1}d_{k+1}-p_{n+1}d_k\right]=0,$$

więc jeśli $s'_k=q_{n+1}s_{k+1}-p_{n+1}s_k$ i $c'_i=q_{n+1}x_ic_i-p_{n+1}c_i$, to możemy zastosować założenie indukcyjne i zauważyć, że x_i, dla $1\leqslant i\leqslant n$ są całkowite. Powtarzając powyższy argument dla liczby przyjąwszy, że $n+1$-sza liczba to x_1 dostajemy, że $x_{n+1}\in\mathbb{Z}$. $\square$ $\square$

Niech n będzie liczbą całkowitą. Weźmy p całkowite takie, że $p>3n$. Widzimy, że liczby $r_1=\dfrac{(ab)^n}{a^p}$ i $r_2=\dfrac{(ab)^n}{b^p}$ są mniejsze niż 1. Szereg *Taylora* funkcji $\sqrt{1-x^n}$ w zerze jest postaci

$$\sqrt{1-x^n}=\sum_{i=0}^{p-1}c_ix^i+O(x^p),$$

dla pewnych liczb rzeczywistych $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{p-1}$. Rozpatrzmy ciąg zadany wzorem

$$s_k=a^{nk}b^{nk}\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ia^{-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ib^{-i}\right).$$

Mamy

$$\sqrt{(a^{nk}-1)(b^{nk}-1)}-s_k=a^{nk}b^{nk}\sqrt{(1-a^{-nk})(1-b^{-nk})}-s_k$$
$$==a^{nk}b^{nk}\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ia^{-ik}+O(a^{-kp})\right)\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ib^{-ik}+O(b^{-kp})\right)-$$
$$-a^{nk}b^{nk}\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ia^{-ik}\right)\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ib^{-ik}\right)=$$
$$=a^{nk}b^{nk}\left(O(b^{-kp})\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ia^{-ik}\right)+O(a^{-kp})\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ia^{-ik}\right)+O(a^{-kp}b^{-kp})\right)=$$
$$=O(r_1^k)O(1)+O(r_2^k)O(1)+O(r_1^kb^{-kp}).$$

Zatem,

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{(a^{nk}-1)(b^{nk}-1)}-s_k=0.$$

Ponadto opuszczając nawiasy w wyrażeniu

$$a^{nk}b^{nk}\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ia^{-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{p-1}c_ib^{-i}\right),$$

możemy zauważyć, że s_k jest kombinacją liniową wyrazów postaci $\left(a^{t_1}b^{t_2}\right)^k$, gdzie $n-p \leqslant t_1, t_2 \leqslant n$ są liczbami całkowitymi.

Ponieważ $a^{t_1}b^{t_2}$ jest zawsze liczbą wymierną oraz liczba $\sqrt{(a^{nk}-1)(b^{nk}-1)}$ jest zawsze kwadratem liczby całkowitej, to na podstawie powyższego lematu każda liczba postaci $\frac{a^{e_1}}{b^{e_2}}$ nie mniejsza niż 1 i taka, że $|e_1|, |e_2| < n$, musi być liczbą całkowitą. Biorąc n odpowiednio duże, dochodzimy do wniosku, że wszystkie liczby wymierne postaci $\frac{a^{e_1}}{b^{e_2}}$ nie mniejsze niż 1, są całkowite.

Pokażemy teraz, że liczba $\alpha = \log_b a$ jest wymierna. Weźmy względnie pierwsze u i v takie, że $0 \leqslant u\alpha - v < \log_b 2$. Wtedy

$$1 \leqslant \frac{a^u}{b^v} = b^{u\alpha - v} < b^{\log_b 2} = 2.$$

Jednakże $\frac{a^u}{b^v}$ jest liczbą całkowitą, stąd $a^u = b^v$, więc $\alpha = \frac{v}{u}$ jest liczbą wymierną.

Powyższy akapit pokazuje również, że $a = c^v$ i $b = c^u$ dla pewnej liczby całkowitej c. Niech $u' = 7u$ i $v' = 7v$. Na podstawie pierwszego lematu, zbiory dzielników pierwszych liczb $c^{u'}-1$ i $c^{v'}-1$ są równe. Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $u' \leqslant v'$. Na podstawie twierdzenia *Zsigmondy'ego* znajdujemy liczbę pierwszą p taką, że $c^{v'} \equiv 1 \pmod p$ i v' jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności (opuszczamy przypadek trywialny, gdy $u', v' > 6$). Jeśli $u' < v'$, to $p \nmid c^{u'}-1$ — co jest sprzeczne z pierwszym lematem. Zatem, $u' = v'$, więc $a = b$. □

Rozwiązanie:

Przy założeniu, że ab nie jest kwadratem liczby całkowitej rozwiązanie znacznie się upraszcza.

Rozpoczniemy od wykazania następującego lematu:

Lemat. *Niech c będzie liczbą całkowitą niebędącą kwadratem liczby całkowitej. Wówczas istnieje nieparzysta liczba pierwsza p taka, że* $\left(\frac{c}{p}\right) = -1$.

Dowód. Bez szkody załóżmy, że c jest liczbą bezkwadratową tzn. $c = p_1 p_2 \ldots p_n$, gdzie $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ są pierwsze. Rozważmy dwa przypadki:

- p_1 jest nieparzyste. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_n$ będą takie, że $\left(\frac{r_1}{p_1}\right) = -1$ oraz $\left(\frac{r_i}{p_i}\right) = 1$ dla $2 \leqslant i \leqslant n$. Korzystając z *Chińskiego twierdzenia o resztach* oraz twierdzenia *Dirichleta* znajdujemy liczbę pierwszą p taką, że

$$\begin{cases} p \equiv r_1 \pmod{p_i} \\ p \equiv r_2 \pmod{p_2} \\ \dots \\ p \equiv r_n \pmod{p_n} \\ p \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{p}{p_i}\right) = \left(\frac{r_i}{p_i}\right) = \begin{cases} -1 \text{ gdy } i = 1, \\ 1 \text{ gdy } 2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Na podstawie prawa wzajemności reszt kwadratowy oraz kongruencji $p \equiv 1 \pmod{4}$ wiemy, że $\left(\frac{p_i}{p}\right) = \left(\frac{p}{p_i}\right)$, więc

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{p_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{p_2}{p}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p_n}{p}\right) = -1.$$

- $p_1 = 2$. Niech $r_2, \dots, r_n$ będą takie, że $\left(\frac{r_i}{p_i}\right) = 1$ dla $2 \leqslant i \leqslant n$. Ponownie korzystając z *Chińskiego twierdzenia o resztach* oraz twierdzenia *Dirichleta* znajdujemy liczbę pierwszą p taką, że

$$\begin{cases} p \equiv r_2 \pmod{p_2} \\ p \equiv r_3 \pmod{p_3} \\ \dots \\ p \equiv r_n \pmod{p_n} \\ p \equiv 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Dzięki poczynionym wyborom wiemy, że

$$\left(\frac{p}{p_i}\right) = \left(\frac{r_i}{p_i}\right) = 1$$

dla $2 \leqslant i \leqslant n$. Ponieważ $p \equiv 1 \pmod{4}$, więc $\left(\frac{p_i}{p}\right) = \left(\frac{p}{p_i}\right)$. Kongruencja $p \equiv 5 \pmod{8}$ implikuje, że $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$. Zatem

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \cdot \left(\frac{p_2}{p}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p_n}{p}\right) = -1.$$

$\square$

Przypomnijmy jeszcze dobrze znany lemat *LTE:*

Lemat. *Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{P}$ będą takie, że p nie dzieli a i b wówczas:*

- *jeśli $p \neq 2$ oraz p dzieli $a - b$, to:*
$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$
- *jeśli $p = 2$ oraz p dzieli $\frac{a^2 - b^2}{2}$, to:*
$$v_p(a^n - b^n) = v_p\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) + v_p(n).$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Na podstawie lematu wiemy, że istnieje nieparzysta liczba pierwsza p taka, że

$$\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right) = -1.$$

Oznacza to, że

$$\begin{cases} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}, \\ b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}, \\ b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}. \end{cases}$$

Bez szkody możemy założyć, że zachodzi pierwsza możliwość. Wtedy liczba $b^{\frac{p-1}{2}} - 1$ nie jest podzielna przez p. Zatem jeśli $v_p\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ jest liczbą nieparzystą, to liczba
$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(b^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$$
nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Gdyby liczba $v_p\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ była parzysta, to wykorzystując *LTE* widzimy, że
$$v_p\left(a^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1\right) = v_p\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) + 1 - \text{ liczba nieparzysta},$$
więc liczba
$$\left(a^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1\right)\left(b^{\frac{p(p-1)}{2}} - 1\right)$$
nie jest kwadratem liczby całkowitej. $\square$

7. Na przyjęciu spotkało się n osób. Udowodnić, że można te osoby usadzić przy co najwyżej dwóch stołach w ten sposób, że każda osoba ma parzystą liczbę znajomych przy swoim stoliku.

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy dowód indukcyjny ze względu na n. Jeżeli jest tylko jedna osoba to sadzamy ją przy stoliku, ma ona zero znajomych czyli parzystą liczbę.

Rozważmy teraz grupę n osób. Jeżeli każda osoba ma parzystą liczbę znajomych to sadzamy wszystkich przy jednym stoliku. Załóżmy przeciwnie, niech osoba A ma nieparzystą liczbę znajomych $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2k+1}$. Rozważmy grupę G' wszystkich $n-1$ osób poza A. Przy czym w grupie G' osoba Z_i zna osobę Z_j wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zna jej w oryginalnej grupie osób, pozostałe znajomości są takie jak w oryginalnej grupie.

Z założenia indukcyjnego grupę G' możemy podzielić na dwa stoliki S_1 i S_2, tak, że każda osoba ma przy danym stoliku parzystą liczbę znajomych. Bez starty ogólności załóżmy, że przy S_1 siedzi nieparzysta liczba osób spośród $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2k+1}$, zaś przy S_2 siedzi parzysta liczba takich osób.

Zauważmy, że podział oryginalnej grupy znajomych na S_1 oraz $S_2 \cup \{A\}$ spełnia warunki zadania. $\square$

8. Każdy punkt przestrzeni pomalowano na biało lub czarno. Udowodnić, że istnieje takich 5 punktów jednego koloru, że jeden z nich jest środkiem czworościanu o wierzchołkach w pozostałych punktach.

Rozwiązanie:

Udowodnijmy najpierw, że istnieje czworościan o wierzchołkach w punktach jednego koloru. Aby to pokazać, udowodnijmy, że istnieją trzy niewspółliniowe punkty jednego koloru. Załóżmy przeciwnie. Wybieramy dwa punkty tego samego koloru A_1 i A_2. Z naszego założenia wynika, że wszystkie punkty poza prostą A_1A_2 są przeciwnego koloru, bez trudu wybieramy trzy niewspółliniowe punkty tego koloru. Pokazaliśmy, że istnieją trzy niewspółliniowe punkty jednego koloru, nazwijmy je P_1, P_2, P_3, gdyby nie dało się dobrać czwartego punktu tego koloru który dawałby czworościan, to każdy punkt poza płaszczyzną $P_1P_2P_3$ byłby przeciwnego koloru. Jednak wówczas, znajdziemy czworościan tego drugiego koloru.

Wybieramy czworościan o wierzchołkach jednego koloru A, B, C, D, jeżeli jego środek ciężkości M jest tego samego koloru to teza zadania jest spełniona. Załóżmy przeciwnie, rozważmy wówczas punkty $A' = 5A - (A + B + C + D)$, $B' = 5B - (A + B + C + D)$, $C' = 5C - (A + B + C + D)$, $D' = 5D - (A + B + C + D)$, (gdzie punkt X utożsamiamy z wektorem OX). Wówczas środkiem ciężkości czworościanu $A'BCD$ jest A, zatem jeżeli teza zadania nie jest spełniona to punkt A' musi być przeciwnego koloru do A, B, C, D. Analogicznie dowodzimy, że B', C', D' są koloru przeciwnego do A, B, C, D. Jednak środkiem ciężkości czworościanu A', B', C', D' jest również M, i wszystkie te punkty są tego samego koloru. $\square$

9. W każdym punkcie kratowym płaszczyzny, który ma niedodatnią współrzędną x położono jeden pionek. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu pewnej pary pionków stojących na sąsiadujących w pionie lub poziomie punktach A i B i „zbicie" jednym z nich drugiego, tj. zdjęcie pionka z pola A i przestawienie pionka z pola B na taki punkt C, że A jest środkiem odcinka BC (w punkcie C, na który przestawiamy pionek z punktu B, nie mógł dotychczas stać żaden pionek). Znaleźć największe x, dla którego istnieje skończona sekwencja dozwolonych ruchów, po której pewien pionek znajduje się w punkcie (x, y) (dla pewnego y).

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że da się postawić pionek na polu $(4, 0)$ oraz, że nie ma takiej sekwencji ruchów, po której pewien pionek stoi na polu $(5, 0)$. Sekwencja ruchów prowadząca do postawienia pionka na polu $(4, 0)$ wygląda następująco $(-1, -1) \to (1, -1)$, $(-1, -2) \to (1, -2)$, $(1, -2) \to (1, 0)$, $(0, 0) \to (2, 0)$, $(0, 2) \to (0, 0)$, $(-1, 0) \to (1, 0)$, $(1, 0) \to (3, 0)$, $(-3, -1) \to (-1, -1)$, $(-3, -2) \to (-1, -2)$, $(-1, -2) \to (-1, 0)$, $(-2, 0) \to (0, 0)$, $(-1, 2) \to (-1, 0)$, $(-1, 0) \to (1, 0)$, $(-4, 0) \to (-2, 0)$, $(-3, 2) \to (-3, 0)$, $(-3, 0) \to (-1, 0)$, $(-2, 2) \to (-2, 0)$, $(-2, 0) \to (0, 0)$, $(0, 0) \to (2, 0)$ oraz $(2, 0) \to (4, 0)$.

Udowodnijmy teraz, że nie da się postawić pionka na polu $(5, 0)$. Polu o współrzędnych (x, y) przypiszmy wagę $\varphi^{|5-x|+|y|}$, gdzie $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ jest pierwiastkiem równania $x^2 + x = 1$ leżącym w przedziale $(0, 1)$. Zauważmy, że w każdym ruchu suma liczb znajdujących się na polach na których są pionki nie zwiększa się. Istotnie, każdym dwóm sąsiednim polom przypisano liczby φ^k i φ^{k+1} dla pewnego k, dlatego w najgorszym razie nasza suma zmniejszy się o $\varphi^k + \varphi^{k+1}$ a zwiększy o φ^{k-1}, przy czym z doboru φ wynika, że te liczby są równe. Zauważmy, że gdyby na polu $(5, 0)$ stał pionek, to suma liczb przypisanych do pól wynosi co najmniej 1.

Obliczmy teraz sumę wszystkich liczb przypisanych do początkowych pól

$$\sum_{x=-\infty}^{0} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \varphi^{|5-x|+|y|} = \sum_{x=-\infty}^{0} \varphi^{5-x} \left(\frac{2}{1-\varphi} - 1 \right) = \frac{\varphi^5}{1-\varphi} \left(\frac{2}{1-\varphi} - 1 \right),$$

co jest równe

$$\frac{\varphi^5}{1-\varphi} \left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi} \right) = \varphi^4 \cdot \frac{1}{(1-\varphi)^2} = 1.$$

Czyli jeżeli na polu $(5, 0)$ stoi pionek to na żadnym innym polu nie może być pionka, a tego w skończonej liczbie ruchów zapewnić się nie da. $\square$

10. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty M i N są środkami odpowiednio łuków ABC i BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Pokazać, że punkty M, I i N są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC + BC = 3AB$.

Rozwiązanie:

Niech J będzie środkiem okręgu dopisanego stycznego do AB w trójkącie ABC. Wykorzystując znany fakt, że punkty M i N są środkami okręgów opisanych na trójkątach odpowiednio ACJ i BCJ widzimy, że MN jest symetralną odcinka CJ. Zatem punkty M, I i N są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy I jest środkiem CJ. Rozpatrując jednokładność o środku w punkcie C i skali $\frac{1}{2}$ zauważamy, że powyższa sytuacja jest równoważna temu, że okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka XY łączącego środki boków CA i CB, a to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $ABXY$ można wpisać okrąg, co jest równoważne temu, że $XY + AB = AX + BY \iff AC + BC = 3AB$. $\square$

11. Sfera ω wpisana w ostrosłup czworokątny $ABCDS$ jest styczna do ścian ABS i CBS w punktach odpowiednio K i L. Półproste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, natomiast półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie Q. Pokazać, że jeśli PK i QL się przecinają, to punkt styczności ω z płaszczyzną $ABCD$ leży na prostej BD.

Rozwiązanie:

Rozpoczniemy od wykazania lematu:

Lemat. *Sfera ω wpisana w ostrosłup czworokątny $ABCDS$ jest styczna do podstawy w punkcie T. Proste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, natomiast proste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie Q. Wówczas $\sphericalangle CTQ = \sphericalangle PTA$ oraz $\sphericalangle CTD + \sphericalangle ATB = 180°$.*

Dowód. Poprowadźmy przez punkt S wszystkie proste, które są styczne do danej sfery ω. Proste te wyznaczają stożek σ, w który wpisana jest sfera ω. Część wspólna stożka σ, oraz płaszczyzny $ABCD$ jest elipsą e wpisaną w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt P. Oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności elipsy e odpowiednio z bokami DA, AB, BC, CD. Na podstawie dobrze znanych własności elipsy dostajemy zależności $\sphericalangle ATK = \sphericalangle ATL$, $\sphericalangle BTL = \sphericalangle BTM$, $\sphericalangle CTM = \sphericalangle CTN$ oraz $\sphericalangle DTN = \sphericalangle DTK$ z których łatwo wynika druga z szukanych równości — $\sphericalangle CTD + \sphericalangle ATB = 180°$.

Biorąc pod uwagę analogiczne zależności: $\sphericalangle KTP = \sphericalangle PTM$, $\sphericalangle QTL = \sphericalangle NTQ$, $\sphericalangle KTA = \sphericalangle ATL$ oraz $\sphericalangle CTN = \sphericalangle MTC$ dostajemy, że

$$\sphericalangle ATP = \sphericalangle KTP - \sphericalangle KTA = \sphericalangle PTM - \sphericalangle ATL = \sphericalangle LTM - \sphericalangle ATP,$$

więc $2\sphericalangle ATP = \sphericalangle LTM$. Analogicznie $2\sphericalangle CTQ = \sphericalangle LTM$, stąd $\sphericalangle CTQ = \sphericalangle PTA$. $\square$

Ponieważ punkty P, Q, K i L są współpłaszczyznowe, to PL i QK przecinają się w punkcie R leżącym na prostej BS. Niech T będzie punktem styczności ω z podstawą $ABCD$. Trójkąty QBK i QGT są przystające, gdyż $QT = QK$.

Analogicznie trójkąty PBL i PBT są przystające oraz trójkąty RKB i RLB również są przystające. Zatem $\sphericalangle QTB = \sphericalangle QKB = \sphericalangle PLB = \sphericalangle PTB$. Wykorzystując lemat dostajemy:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DTB &= \sphericalangle QTB + \sphericalangle QCT + \sphericalangle DTC = \sphericalangle BTP + \sphericalangle PTA + \sphericalangle DTC = \\ &= \sphericalangle BTA + \sphericalangle DTC = 180^\circ,\end{aligned}$$

więc T leży na BD. □

12. Skonstruować za pomocą cyrkla i linijki czworokąt, który jest wpisany w okrąg o promieniu R i opisany na okręgu o promieniu r, znając promienie r i R oraz kąt α między przekątnymi czworokąta.

Rozwiązanie:

Niech $ABCD$ będzie szukanym czworokątem. Oznaczmy przez O i I punkty będące środkami okręgów: opisanego (Ω) i wpisanego (ω) w czworokąt $ABCD$. Wykorzystamy dobrze znany wzór (pochodzący od *Fussa*) wiążący promienie R i r oraz długość d odcinka OI, mianowicie zachodzi wzór

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}.$$

Dzięki niemu możemy bez trudu skonstruować odcinek o długości d, zatem znamy położenie naszych okręgów względem siebie.

Lemat. *Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku w punkcie I i wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Przekątne AC i BD czworokąta przecinają się w punkcie P. Wówczas, punkty I, O i P leżą na jednej prostej.*

Dowód. Przyjmijmy, że proste AI, BI, CI, DI przecinają okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ odpowiednio w punktach E, F, G, H. Ponieważ proste AI, BI, CI, DI są dwusiecznymi odpowiednich kątów czworokąta $ABCD$, więc proste EG i FH są średnicami okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Zatem proste EG i FH przecinają się w punkcie O.

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych EB i CH. Korzystając z twierdzenia *Pascala* dla sześciokąta $ACHDBE$ widzimy, że punkty P, X, I leżą na jednej prostej. Stosując ponownie twierdzenie *Pascala* dla sześciokąta $GCHFBE$ wnioskujemy, że punkty O, X, I są współliniowe. Zatem punkty O, I oraz P są współliniowe. □

Przypomnijmy również dwa inne (dobrze znane) twierdzenia z których będziemy korzystać.

Twierdzenie (Newtona). *W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu o środku w punkcie I, środki przekątnych oraz I leżą na jednej prostej.*

Twierdzenie (Ponceleta - wersja dla czworokąta). *Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg Ω i opisany na okręgu ω, to dla dowolnej czwórki punktów X, Y, Z i T na Ω takiej, że proste XY, YZ, ZT są styczne do ω, wiemy, że prosta TX jest również styczna do ω. Ponadto przekątne czworokątów $ABCD$ i $XYZT$ przecinają się w tym samym punkcie będącym środkiem inwersji przekształcającej ω w Ω.*

Na mocy powyższego lematu widzimy, że punkt P będący punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ leży na prostej OI. Dzięki twierdzeniu *Ponceleta* wiemy, że punkt P jest stały na prostej OI dla wszystkich czworokątów $ABCD$ o badanej własności. Zatem punkt P również umiemy skonstruować.

Niech teraz M i N oznaczają środki przekątnych czworokąta $ABCD$. Łatwo zauważyć, że punkty M i N leżą na okręgu o średnicy OP, więc $MN = \sin\alpha \cdot OP$. Twierdzenie *Newtona* daje nam współliniowość punktów M, I i N. Wystarczy zatem skonstruować odcinek przechodzący przez I i o długości równej $\sin\alpha \cdot OP$ by uzyskać środki przekątnych czworokąta. Oczywiście mając już środki M i N konstrukcja czworokąta jest już oczywista. □

Uwaga. *Możemy pokazać, że odcinek OP jest stały bez odwołania się do twierdzenia Ponceleta, zachodzi bowiem równość*

$$OP = \frac{2R^2d}{R^2 + d^2}.$$

Uwaga. *Innym sposobem pokazania, że punkt P się nie zmienia jest wykorzystanie biegunowych. W sytuacji z zadania pokażemy, że biegunowe punktu P względem ω i Ω pokrywają się — co oczywiście będzie oznaczało, że punkt P jest jedyny.*

Niech punkty E, F, G i H będą punktami styczności ω z bokami odpowiednio AB, BC, CD i DA. Na podstawie twierdzenia Brianchona wiemy, że P jest punktem przecięcia prostych EG i FH. Oznaczając przez X i Y bieguny (względem ω) prostych EG i FH widzimy, że prosta XY jest biegunową P względem ω.

Zauważmy jednak, że $X = AB \cap CD$ oraz $Y = BC \cap AD$, więc patrząc na okrąg Ω fakt, iż XY jest biegunową punktu P względem Ω jest już dobrze znany. □

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

    Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści