Punkty izogonalnie sprzężone

Dominik Burek

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

dominik.burek@doctoral.uj.edu.pl

7 grudnia 2018

Plan

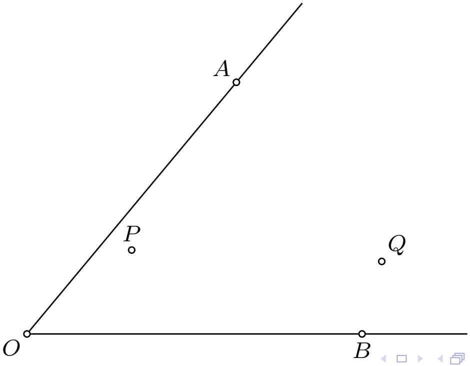
1. Wstępne informacje
2. Twierdzenia Eulera i ich uogólnienia
3. Szkic dowodu

Wstępne informacje

Wstępne informacje

Definicja

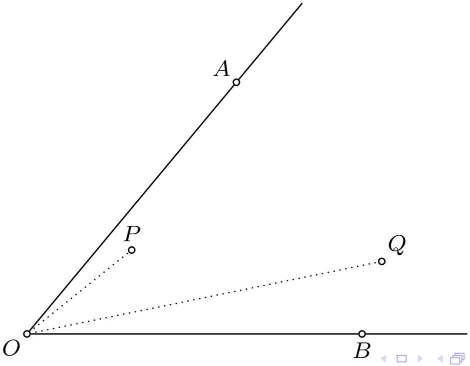
Dany jest kąt AOB oraz punkty P i Q. Wówczas proste OP i OQ są **izogonalne** względem kąta AOB, gdy są są symetryczne względem dwusiecznej kąta wewnętrznego AOB.



Wstępne informacje

Definicja

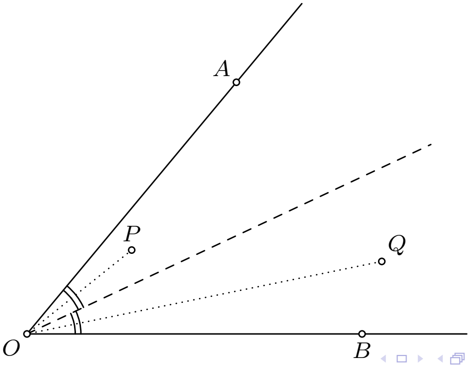
Dany jest kąt AOB oraz punkty P i Q. Wówczas proste OP i OQ są **izogonalne** względem kąta AOB, gdy są są symetryczne względem dwusiecznej kąta wewnętrznego AOB.



Wstępne informacje

Definicja

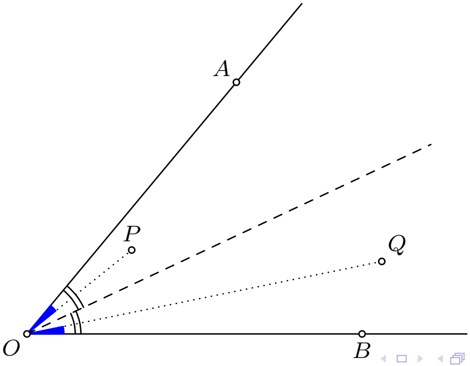
Dany jest kąt AOB oraz punkty P i Q. Wówczas proste OP i OQ są **izogonalne** względem kąta AOB, gdy są są symetryczne względem dwusiecznej kąta wewnętrznego AOB.



Wstępne informacje

Definicja

Dany jest kąt AOB oraz punkty P i Q. Wówczas proste OP i OQ są **izogonalne** względem kąta AOB, gdy są są symetryczne względem dwusiecznej kąta wewnętrznego AOB.

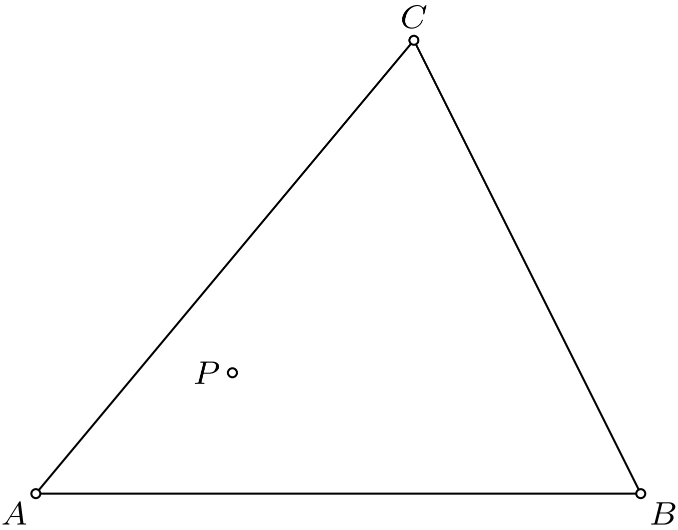


Wstępne informacje

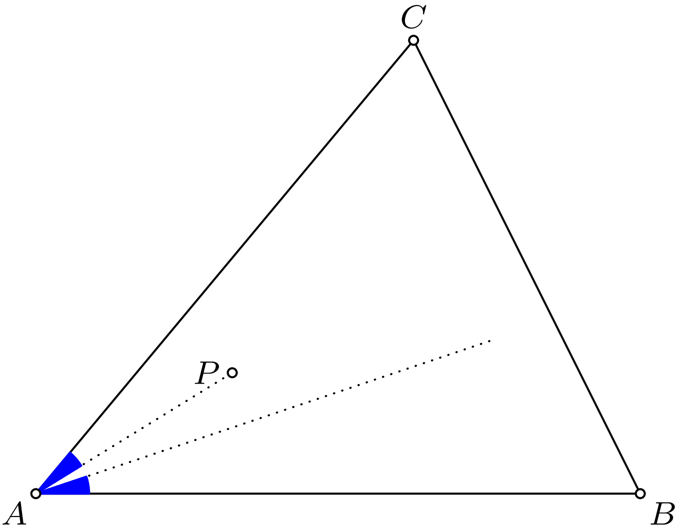
Twierdzenie

Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P w płaszczyźnie tego trójkąta. Wówczas proste izogonalne do prostych AP, BP i CP względem odpowiednio kątów BAC, CBA i ACB przecinają się w jednym punkcie Q, który nazywamy **punktem izogonalnie sprzężonym** do punktu P względem trójkąta ABC.

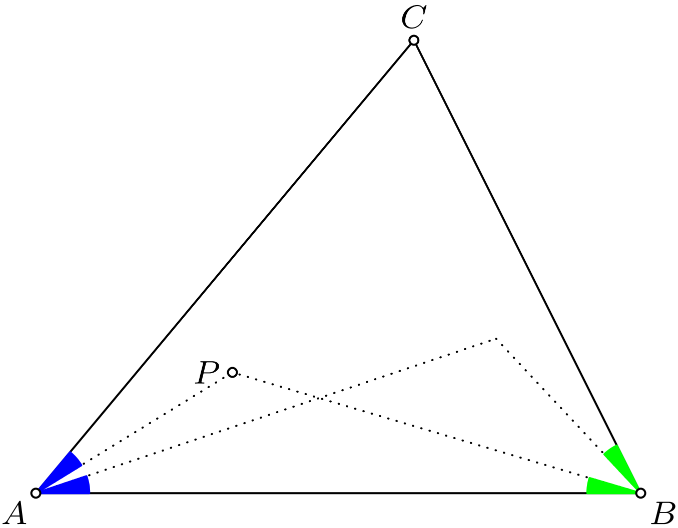
Wstępne informacje



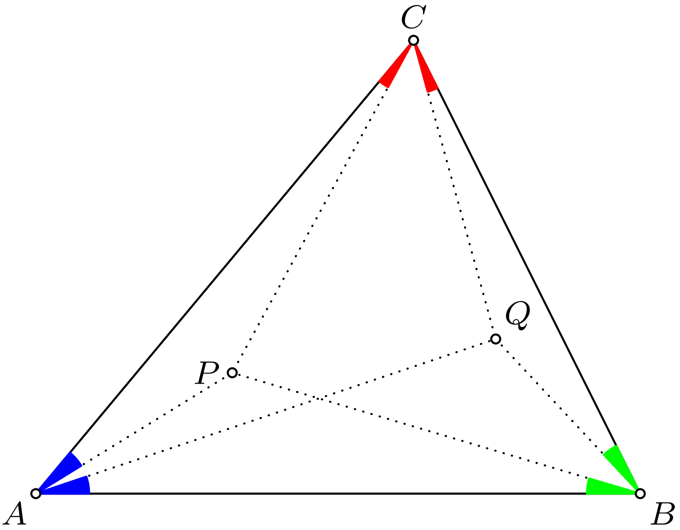
Wstępne informacje



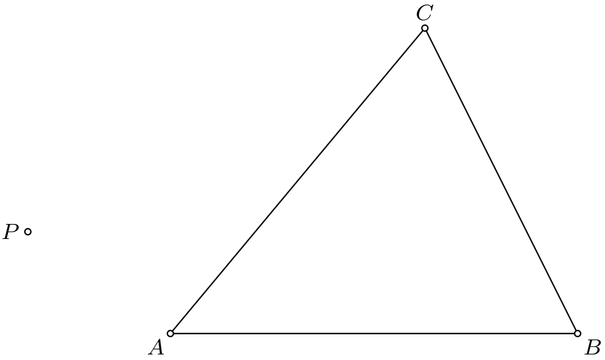
Wstępne informacje



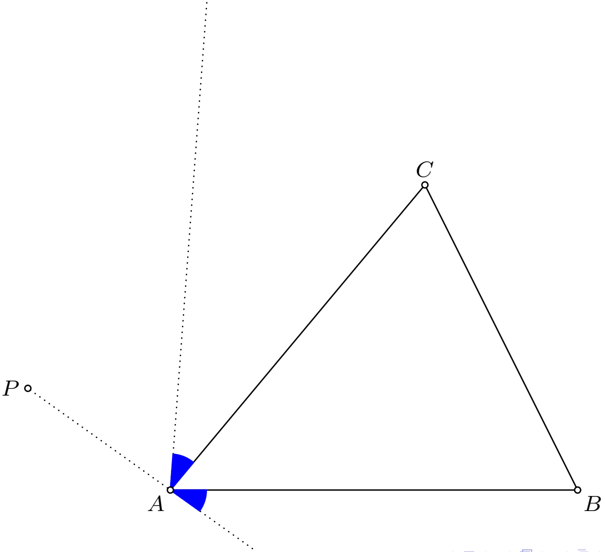
Wstępne informacje



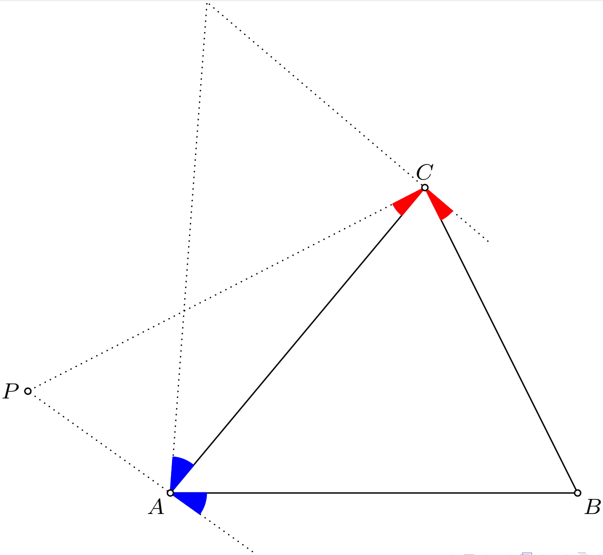
Wstępne informacje



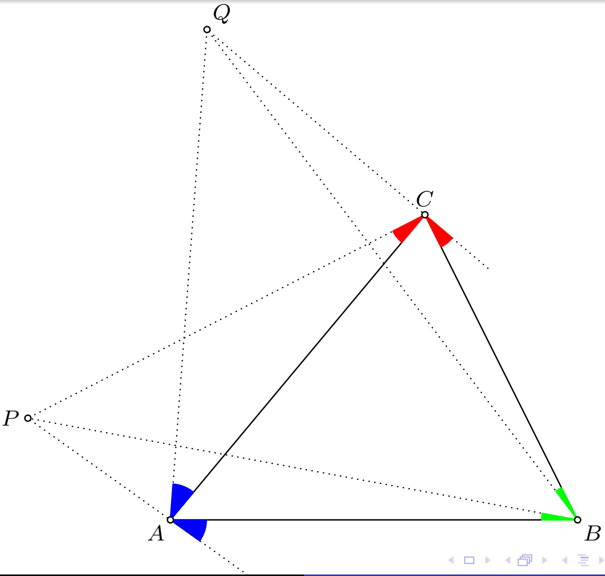
Wstępne informacje



Wstępne informacje



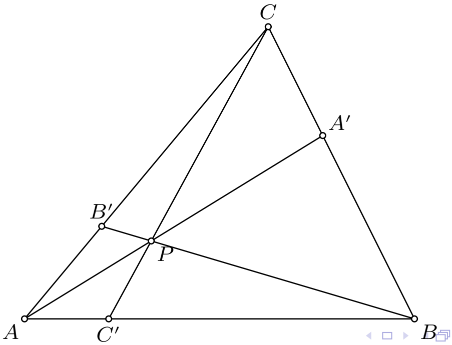
Wstępne informacje



Dowód

Twierdzenie Cevy

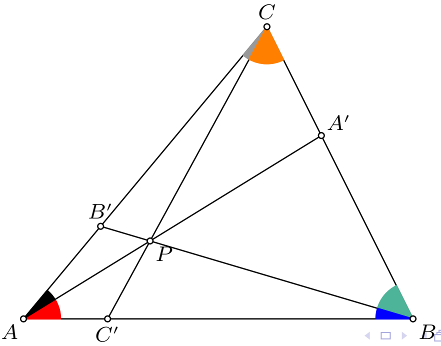
Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P w płaszczyźnie tego trójkąta. Wówczas proste AP, BP i CP przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}=1.$



Dowód

Twierdzenie Cevy

Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P w płaszczyźnie tego trójkąta. Wówczas proste AP, BP i CP przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC}=1.$



Przykłady i zastosowania

- Środki: okręgu wpisanego i okręgów dopisanych są same do siebie izogonalnie sprzężone. Są to jedyne takie punkty w trójkącie

Przykłady i zastosowania

- Środki: okręgu wpisanego i okręgów dopisanych są same do siebie izogonalnie sprzężone. Są to jedyne takie punkty w trójkącie
- Środek okręgu opisanego i ortocentrum są izogonalnie sprzężone

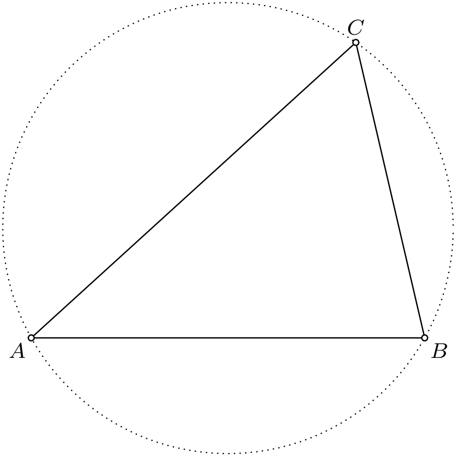
Przykłady i zastosowania

- Środki: okręgu wpisanego i okręgów dopisanych są same do siebie izogonalnie sprzężone. Są to jedyne takie punkty w trójkącie
- Środek okręgu opisanego i ortocentrum są izogonalnie sprzężone
- Środek ciężkości i punkt przecięcia symedian są izogonalnie sprzężone

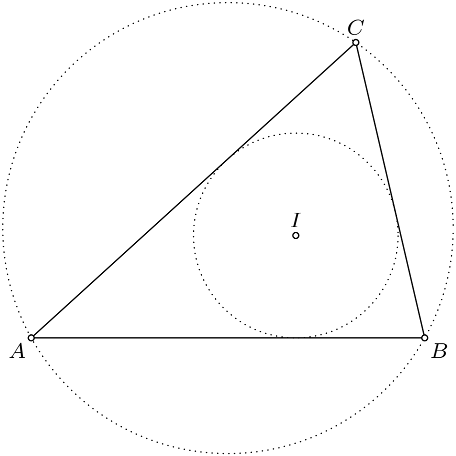
Przykłady i zastosowania

- Środki: okręgu wpisanego i okręgów dopisanych są same do siebie izogonalnie sprzężone. Są to jedyne takie punkty w trójkącie
- Środek okręgu opisanego i ortocentrum są izogonalnie sprzężone
- Środek ciężkości i punkt przecięcia symedian są izogonalnie sprzężone
- Punktem izogonalnie sprzężnym do punktu leżącego na okręgu jest punkt w nieskończoności

Trójliść

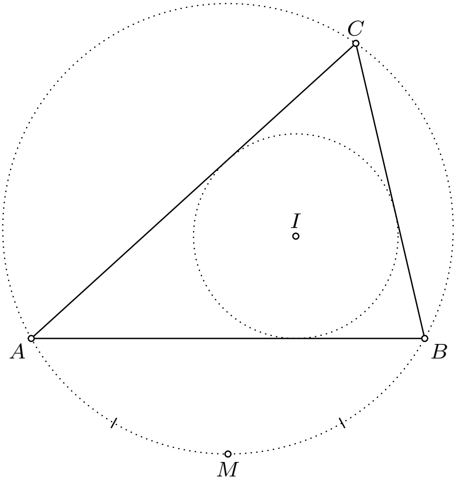


Trójliść



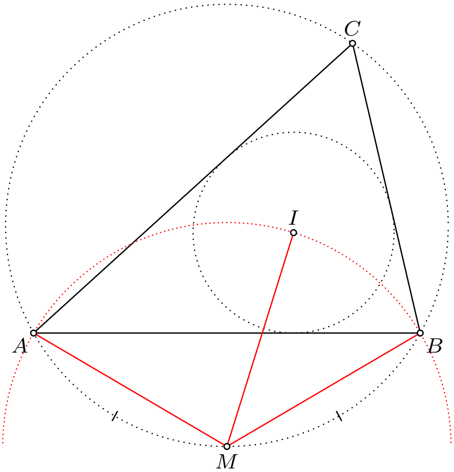
- I – środek okręgu wpisanego o promieniu r

Trójliść



- I – środek okręgu wpisanego o promieniu r
- M – środek krótszego łuku AB

Trójliść

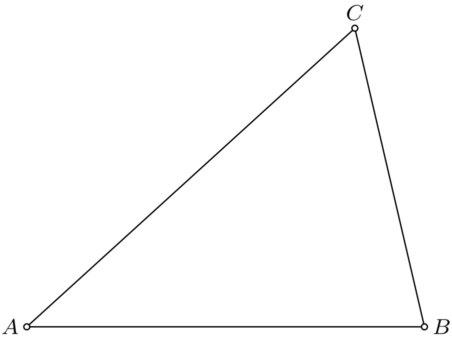


- I – środek okręgu wpisanego o promieniu r
- M – środek krótszego łuku AB

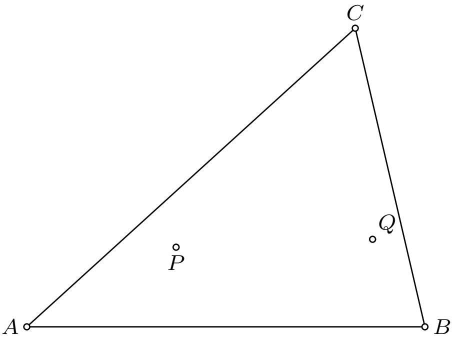
Wtedy

$$MA = MI = MB$$

Uogólnienie trójliścia

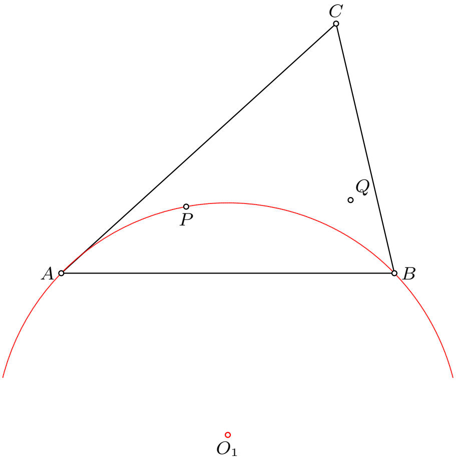


Uogólnienie trójliścia



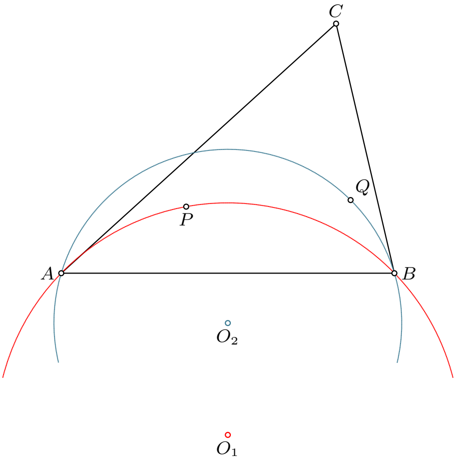
- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone

Uogólnienie trójliścia



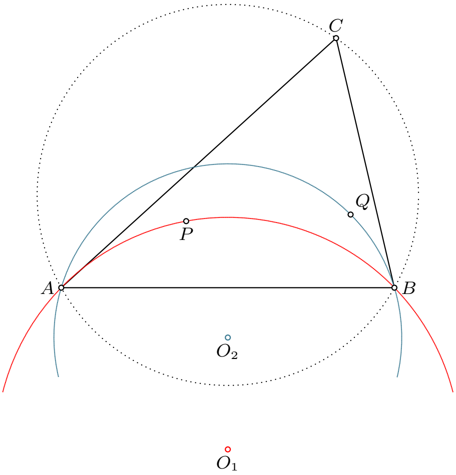
- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone
- O_1 – środek okręgu opisanego na APB

Uogólnienie trójliścia



- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone
- O_1 – środek okręgu opisanego na APB
- O_2 – środek okręgu opisanego na AQB

Uogólnienie trójliścia

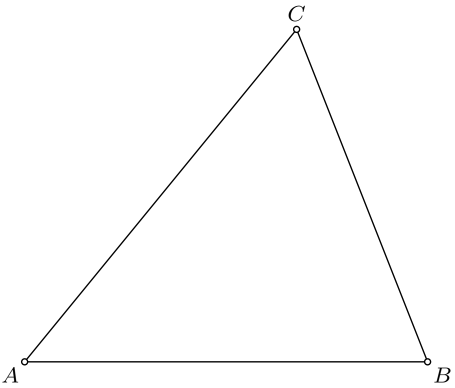


- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone
- O_1 – środek okręgu opisanego na APB
- O_2 – środek okręgu opisanego na AQB

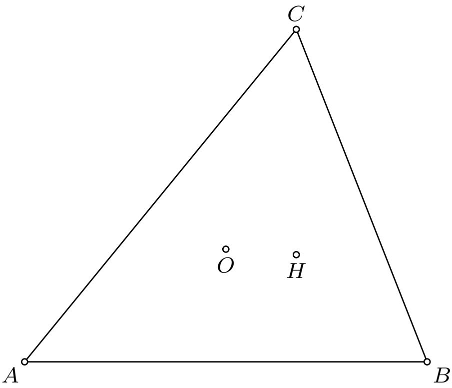
Wtedy O_1 i O_2 są inwersyjne względem okręgu opisanego

Twierdzenia Eulera i ich uogólnienia

Okrąg 9-ciu punktów

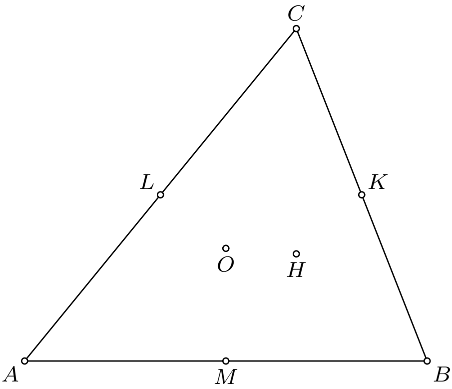


Okrąg 9-ciu punktów



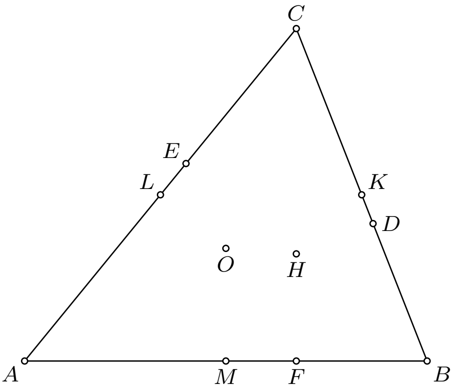
- O – środek okręgu opisanego
- H – ortocentrum

Okrąg 9-ciu punktów



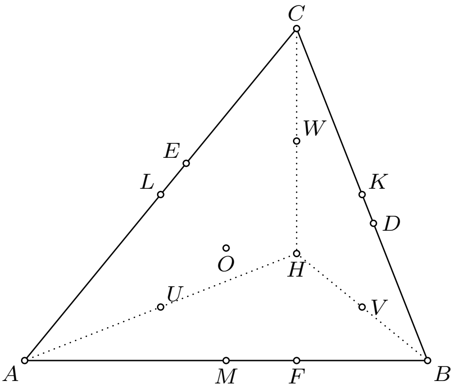
- O – środek okręgu opisanego
- H – ortocentrum
- K, L, M – środki boków

Okrąg 9-ciu punktów



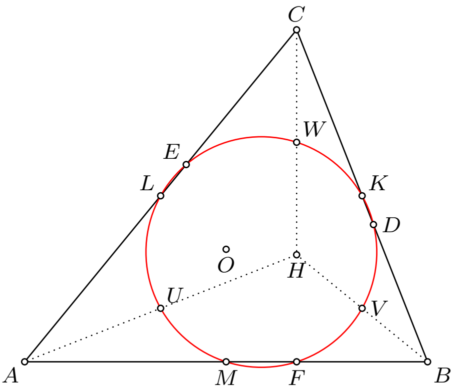
- O – środek okręgu opisanego
- H – ortocentrum
- K, L, M – środki boków
- D, E, F – spodki wysokości

Okrąg 9-ciu punktów



- O – środek okręgu opisanego
- H – ortocentrum
- K, L, M – środki boków
- D, E, F – spodki wysokości
- U, V, W – środki odcinków AH, BH i CH

Okrąg 9-ciu punktów



- O – środek okręgu opisanego
- H – ortocentrum
- K, L, M – środki boków
- D, E, F – spodki wysokości
- U, V, W – środki odcinków AH, BH i CH

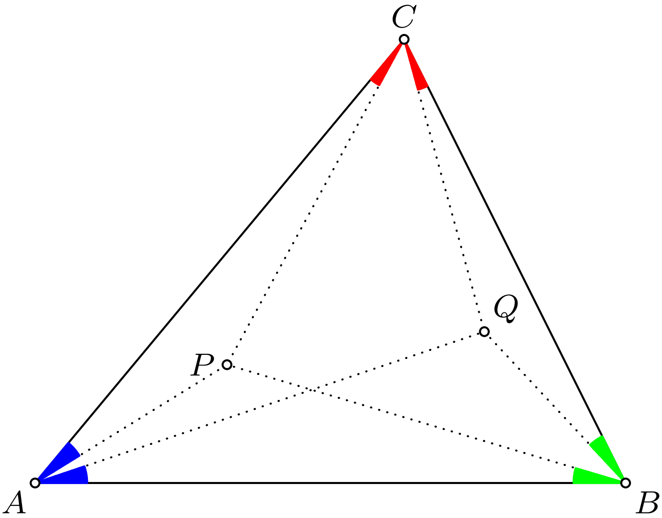
Wtedy K, L, M, D, E, F, U, F, V leżą na jednym okręgu

Uogólniony okrąg 9-punktów

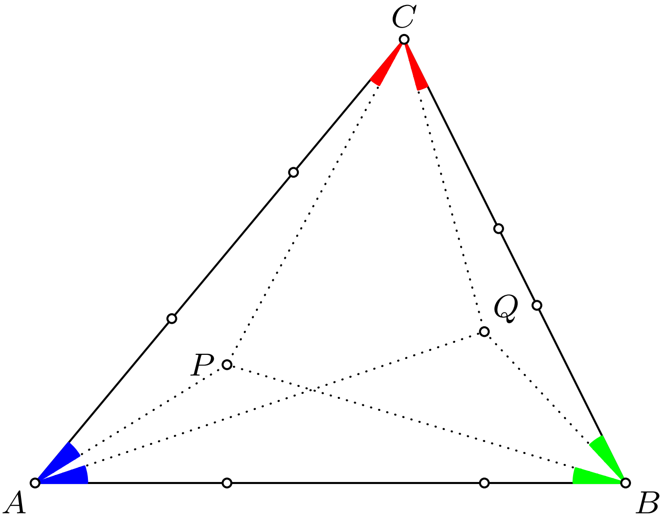
Twierdzenie

Punkty P i Q są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC. Wówczas rzuty punktów P i Q na boki trójkąta leżą na jednym okręgu, którego środkiem jest środek odcinka PQ.

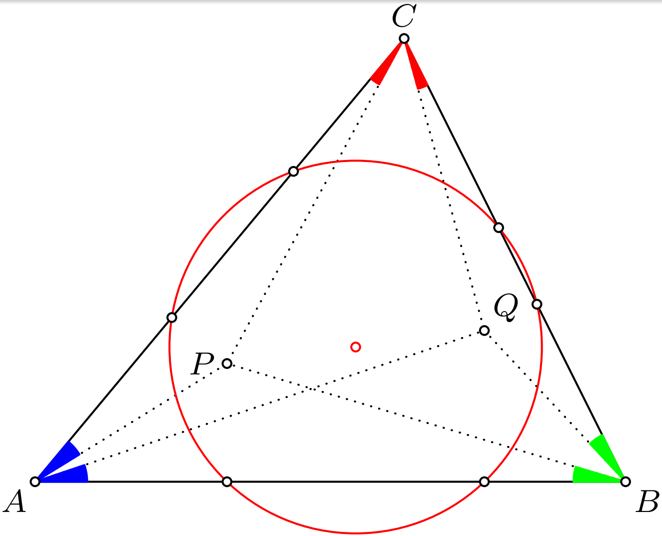
Uogólniony okrąg 9-punktów



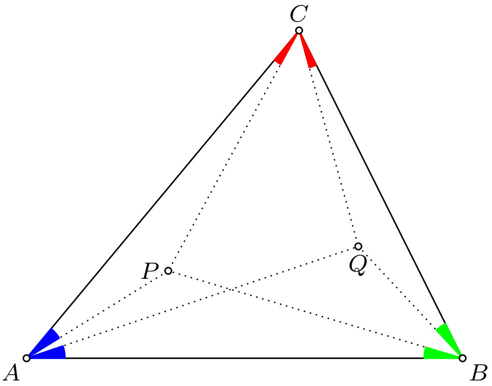
Uogólniony okrąg 9-punktów



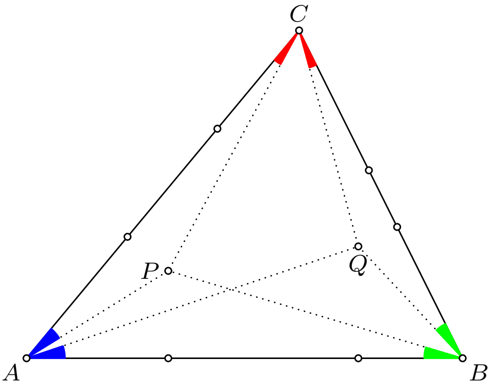
Uogólniony okrąg 9-punktów



Szkic dowodu

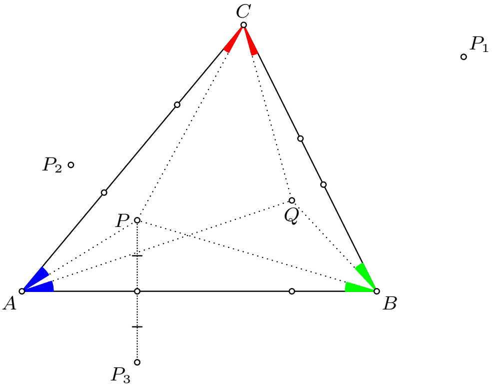


Szkic dowodu



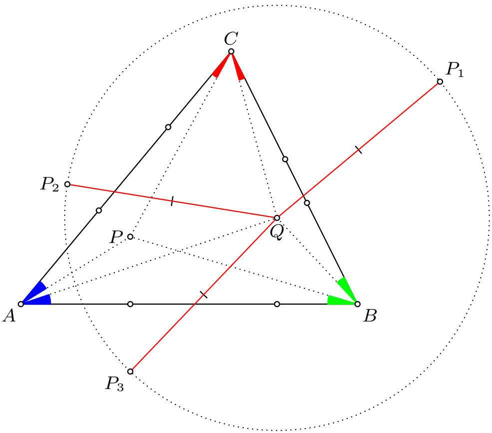
- ○ – rzuty punktów P i Q na boki

Szkic dowodu



- ○ – rzuty punktów P i Q na boki
- P_1, P_2, P_3 – obrazy punktów P i Q względem boków

Szkic dowodu

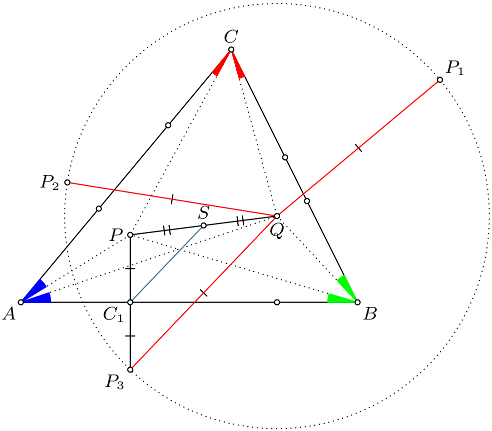


- ○ – rzuty punktów P i Q na boki
- P_1, P_2, P_3 – obrazy punktów P i Q względem boków

Wtedy

- $QP_1 = QP_2 = QP_3$

Szkic dowodu

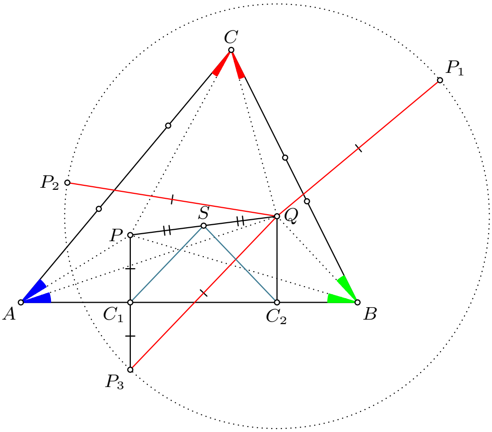


- $\circ$ – rzuty punktów P i Q na boki
- P_1, P_2, P_3 – obrazy punktów P i Q względem boków
- S – środek PQ
- C_1 – rzut P na BC

Wtedy

- $QP_1 = QP_2 = QP_3$
- $SC_1 = \frac{1}{2} QP_1$

Szkic dowodu

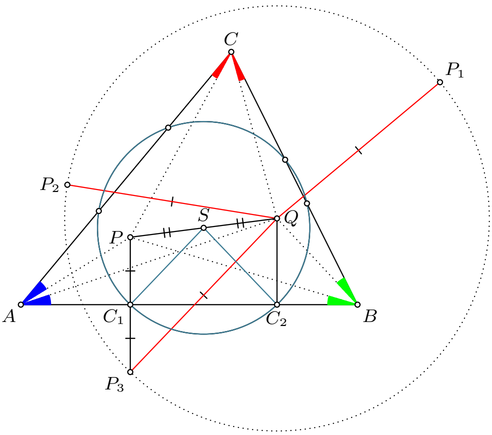


- ○ – rzuty punktów P i Q na boki
- P_1, P_2, P_3 – obrazy punktów P i Q względem boków
- S – środek PQ
- C_1 – rzut P na BC
- C_2 – rzut Q na BC

Wtedy

- $QP_1 = QP_2 = QP_3$
- $SC_1 = \frac{1}{2} QP_1 = SC_2$

Szkic dowodu

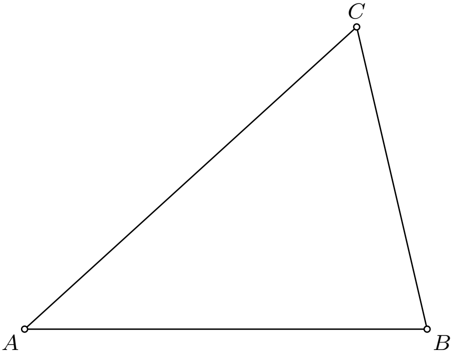


- ○ – rzuty punktów P i Q na boki
- P_1, P_2, P_3 – obrazy punktów P i Q względem boków
- S – środek PQ
- C_1 – rzut P na BC

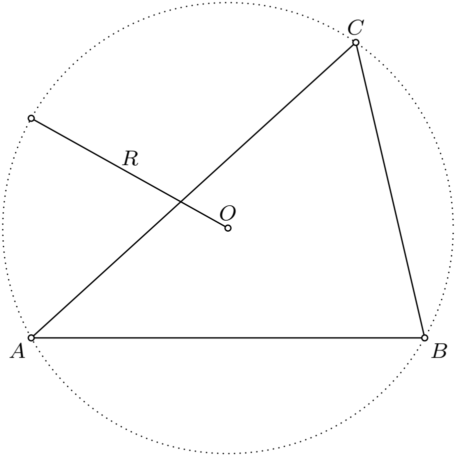
Wtedy

- $QP_1 = QP_2 = QP_3$
- $SC_1 = \frac{1}{2}QP_1$
- Rzuty leżą na okręgu o środku w S

Twierdzenie Eulera

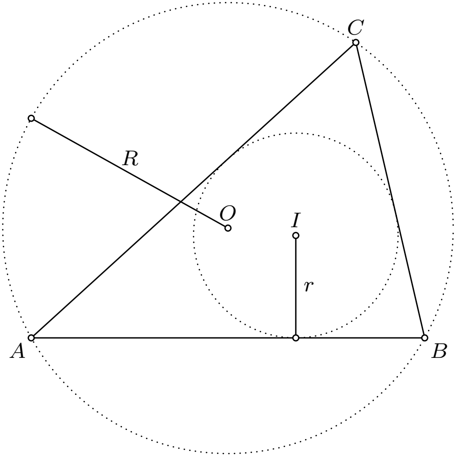


Twierdzenie Eulera



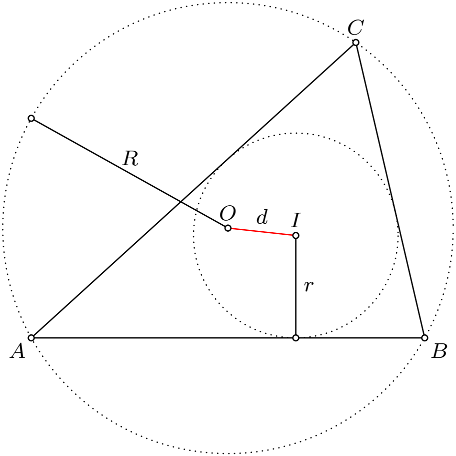
- O – środek okręgu opisanego o promieniu R

Twierdzenie Eulera



- O – środek okręgu opisanego o promieniu R
- I – środek okręgu wpisanego o promieniu r

Twierdzenie Eulera

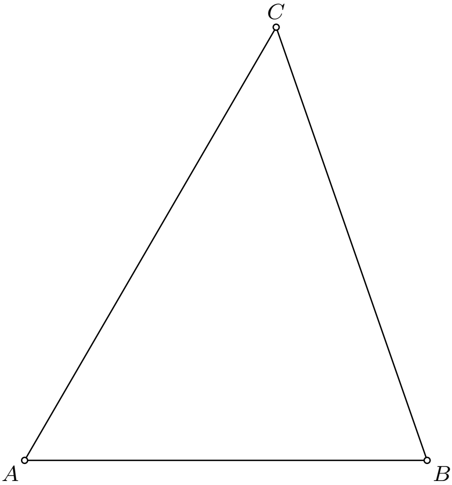


- O – środek okręgu opisanego o promieniu R
- I – środek okręgu wpisanego o promieniu r

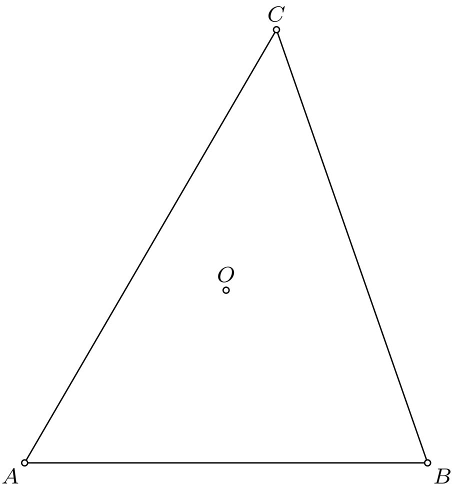
Wtedy

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Propozycja uogólnienia

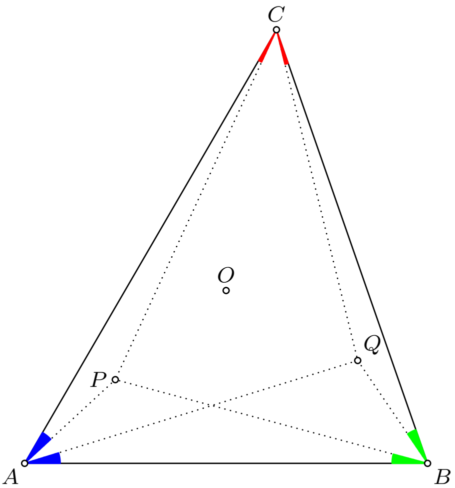


Propozycja uogólnienia



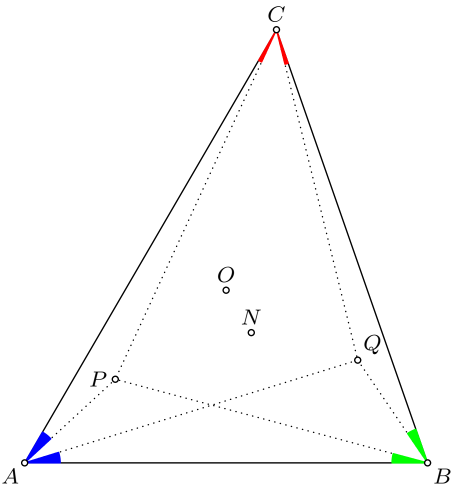
- O – środek okręgu opisanego o promieniu R

Propozycja uogólnienia



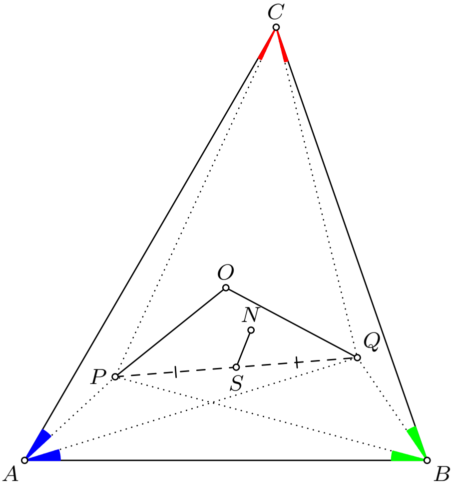
- O – środek okręgu opisanego o promieniu R
- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone

Propozycja uogólnienia



- O – środek okręgu opisanego o promieniu R
- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone
- N – środek okręgu 9-punktów

Propozycja uogólnienia



- O – środek okręgu opisanego o promieniu R
- P, Q – punkty izogonalnie sprzężone
- N – środek okręgu 9-punktów
- S – środek odcinka PQ

Wtedy

$$OP \cdot OQ = 2R \cdot NS$$

Propozycja uogólnienia

- Jest to uogólnienie, gdyż

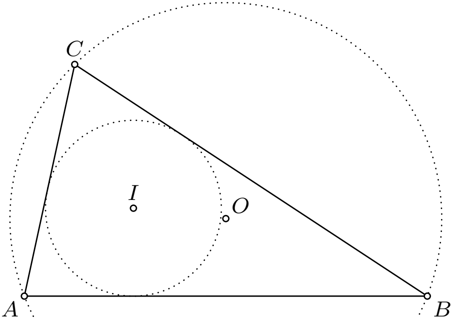
$$OI \cdot OI = OI^2 = R^2 - 2Rr = 2R \cdot \left(\frac{R}{2} - r\right) = 2R \cdot NI,$$

Propozycja uogólnienia

- Jest to uogólnienie, gdyż

$$OI \cdot OI = OI^2 = R^2 - 2Rr = 2R \cdot \left(\frac{R}{2} - r\right) = 2R \cdot NI,$$

gdzie w ostatnim kroku korzystamy z twierdzenia Feuerbacha

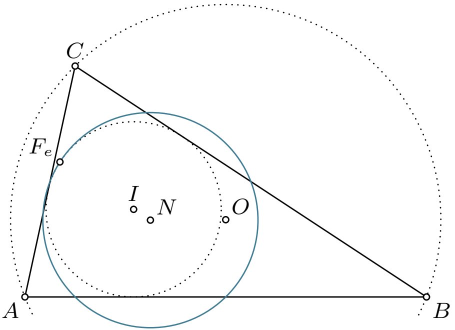


Propozycja uogólnienia

- Jest to uogólnienie, gdyż

$$OI \cdot OI = OI^2 = R^2 - 2Rr = 2R \cdot \left(\frac{R}{2} - r\right) = 2R \cdot NI,$$

gdzie w ostatnim kroku korzystamy z twierdzenia Feuerbacha



- $NI = F_eO - F_eI = \dfrac{R}{2} - r$

Propozycja uogólnienia

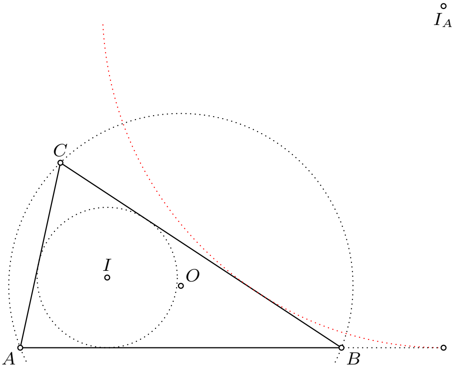
- Dla środku okręgu A-dopisanego I_A o promieniu R_A dostajemy związek

$$OI_A^2 = 2R \cdot NI_A = 2R \cdot \left(\frac{R}{2} + R_A\right) = R^2 + 2R \cdot R_A.$$

Propozycja uogólnienia

- Dla środku okręgu A-dopisanego I_A o promieniu R_A dostajemy związek

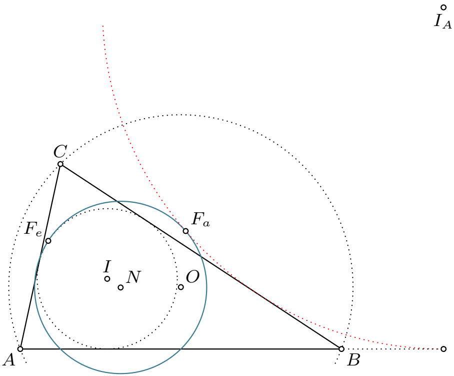
$$OI_A^2 = 2R \cdot NI_A = 2R \cdot \left(\frac{R}{2} + R_A\right) = R^2 + 2R \cdot R_A.$$



Propozycja uogólnienia

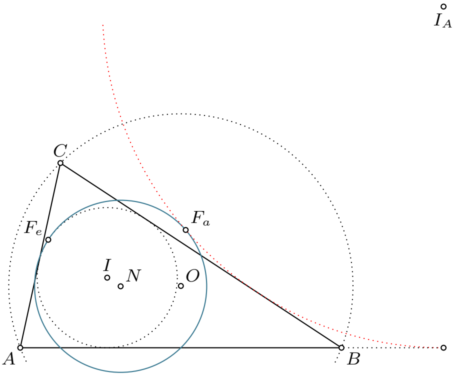
- Dla środku okręgu A-dopisanego I_A o promieniu R_A dostajemy związek

$$OI_A^2 = 2R \cdot NI_A = 2R \cdot \left(\frac{R}{2} + R_A\right) = R^2 + 2R \cdot R_A.$$



- $NI_A = \dfrac{R}{2} + R_A$

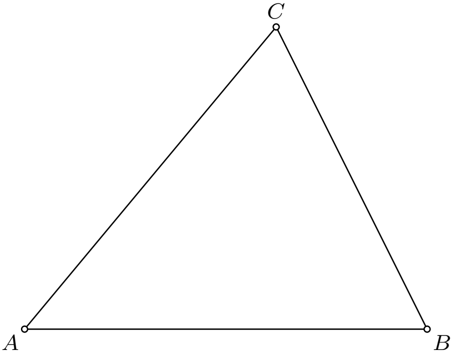
Propozycja uogólnienia

- 

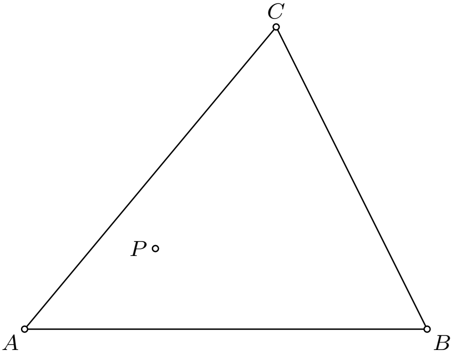
- $NI_A = \frac{R}{2} + R_A$

Szkic dowodu

Okrąg Hagge'a

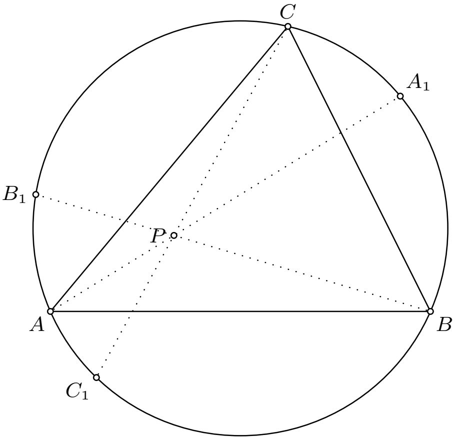


Okrąg Hagge'a



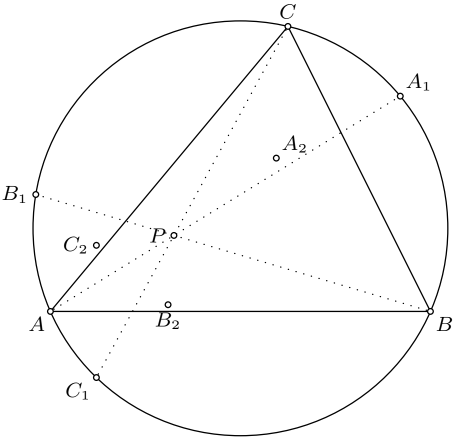
- P – dowolny punkt

Okrąg Hagge'a



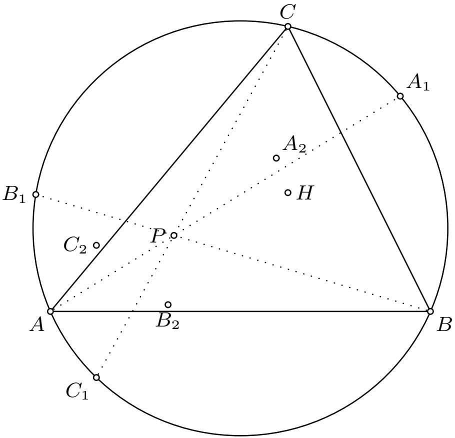
- P – dowolny punkt
- A_1, B_1, C_1 – przecięcia AP, BP i CP z okręgiem opisanym

Okrąg Hagge'a



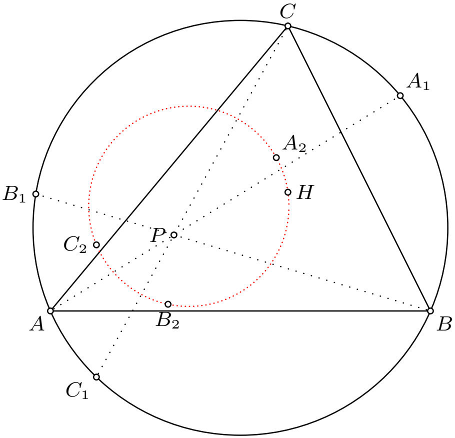
- P – dowolny punkt
- A_1, B_1, C_1 – przecięcia AP, BP i CP z okręgiem opisanym
- A_2, B_2, C_2 – obrazy punktów A_1, B_1, C_1 względem boków BC, CA i AB

Okrąg Hagge'a



- P – dowolny punkt
- A_1, B_1, C_1 – przecięcia AP, BP i CP z okręgiem opisanym
- A_2, B_2, C_2 – obrazy punktów A_1, B_1, C_1 względem boków BC, CA i AB
- H – ortocentrum

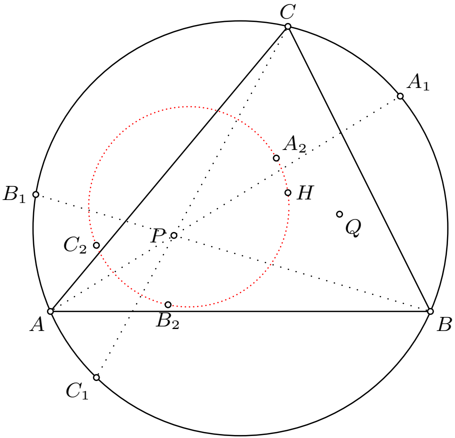
Okrąg Hagge'a



- P – dowolny punkt
- A_1, B_1, C_1 – przecięcia AP, BP i CP z okręgiem opisanym
- A_2, B_2, C_2 – obrazy punktów A_1, B_1, C_1 względem boków BC, CA i AB
- H – ortocentrum

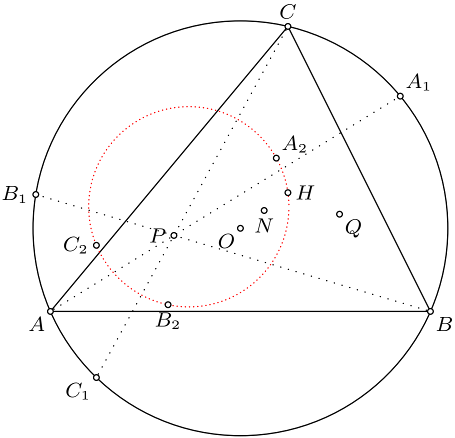
Wtedy punkty A_2, B_2, C_2, H leżą na jednym okręgu

Własności



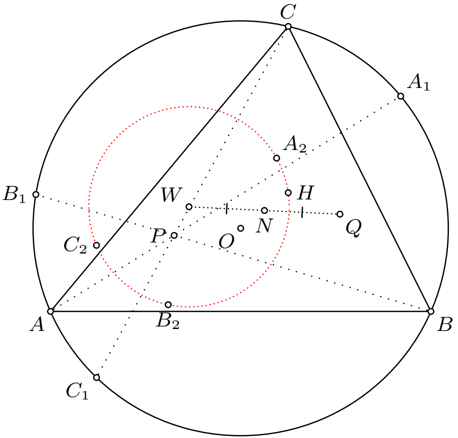
- Q – punkt izogonalnie sprzężony do P

Własności



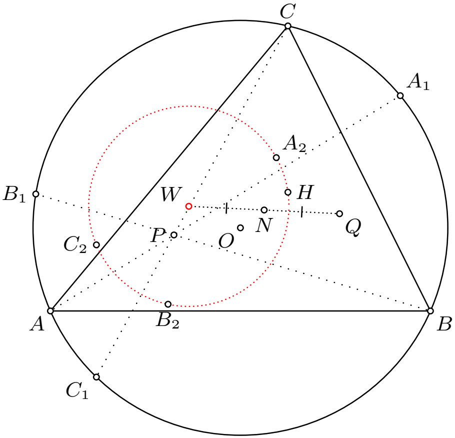
- Q – punkt izogonalnie sprzężony do P
- O – środek okręgu opisanego
- N – środek okręgu 9-ciu punktów

Własności



- Q – punkt izogonalnie sprzężony do P
- O – środek okręgu opisanego
- N – środek okręgu 9-ciu punktów
- W – obraz punkt Q względem N

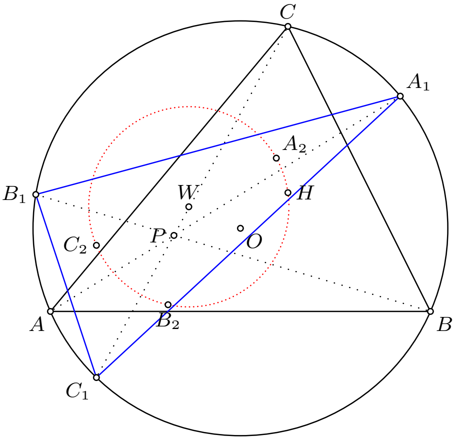
Własności



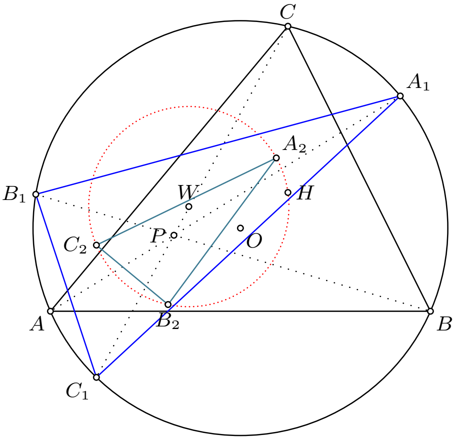
- Q – punkt izogonalnie sprzężony do P
- O – środek okręgu opisanego
- N – środek okręgu 9-ciu punktów
- W – obraz punkt Q względem N

Wtedy W jest środkiem okręgu Hagge'a

Własności

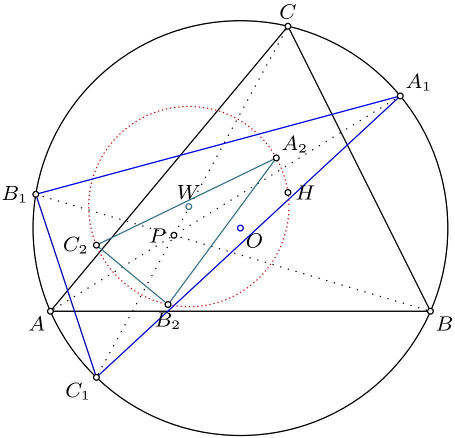


Własności



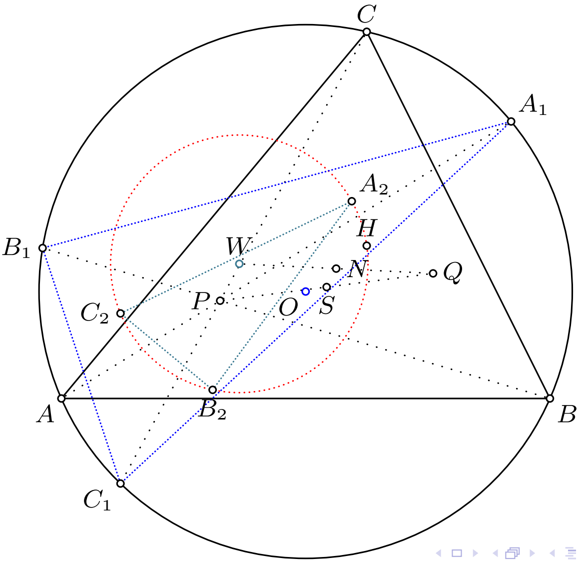
- Trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$ są podobne.

Własności

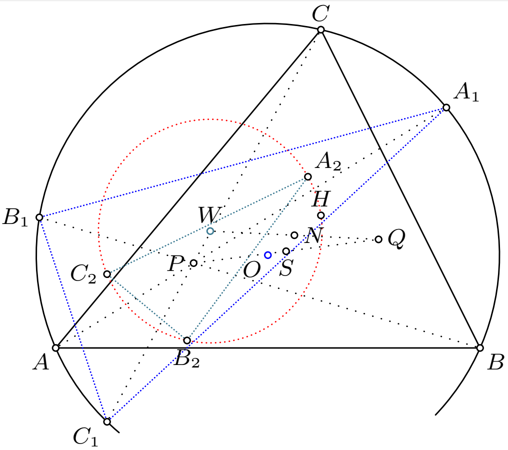


- Trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$ są podobne
- Para (P, O) w trójkącie $A_1B_1C_1$ odpowiada parze (P, W) w trójkącie $A_2B_2C_2$

Dowód głównego twierdzenia

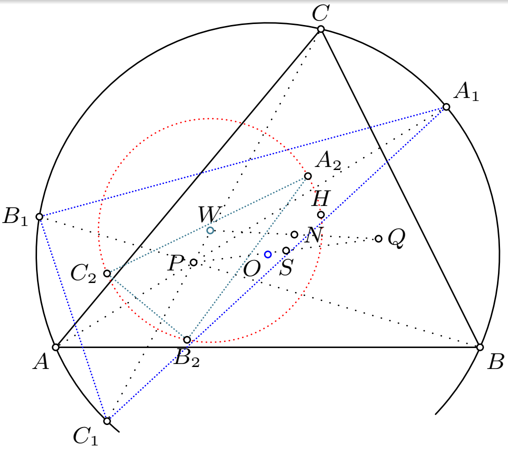


Dowód głównego twierdzenia



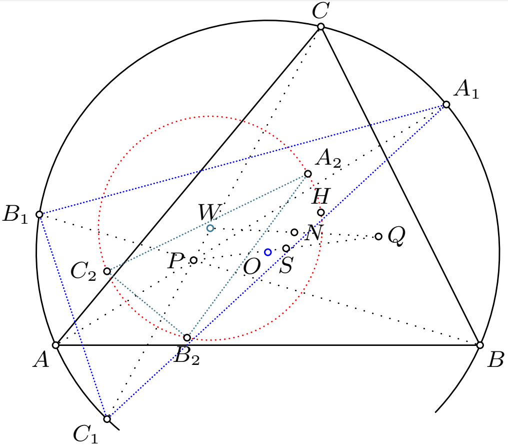
$$SN = \frac{WP}{2}$$

Dowód głównego twierdzenia



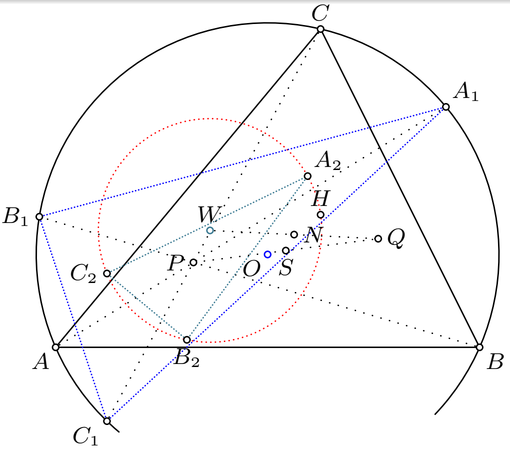
$$SN = \frac{WP}{2} = \frac{OP}{2} \cdot \frac{R_{A_2B_2C_2}}{R_{A_1B_1C_1}}$$

Dowód głównego twierdzenia



$$SN = \frac{WP}{2} = \frac{OP}{2} \cdot \frac{R_{A_2B_2C_2}}{R_{A_1B_1C_1}} = \frac{OP}{2} \cdot \frac{HW}{R}$$

Dowód głównego twierdzenia



$$SN = \frac{WP}{2} = \frac{OP}{2} \cdot \frac{R_{A_2B_2C_2}}{R_{A_1B_1C_1}} = \frac{OP}{2} \cdot \frac{HW}{R} = \frac{OP \cdot OQ}{2R}$$

Dziękuję za uwagę!